MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

60. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

60. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

9183 – 60#

9183 – 60

Inhalt des 60. Bandes.

André, J., Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe . 156

Bagchi, H. D., and B. N. Mukherjee, Note on the operational representations of some special functions 88

Föllinger, O., Kontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung 243

Gaschütz, W., Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden 274

Graeub, W., Über die schwächste Uniformisierende 66

Hadwiger, H., und W. Nef, Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen 305

Hahn, W., Über einige Grenzwertbeziehungen bei unendlichen Produkten 488

Hämisch, W., Über die Topologie in der Algebra 458

Herrmann, O., Eine metrische Charakterisierung eines Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppen 148

Holyoke, T. C., Transitive extensions of dihedral groups 79

Hornfeck, B., Ein Satz über die Primzahlmenge. 271

Huppert, B., Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen 409

Jeger, M., Zur projektiven Differentialgeometrie der ebenen Kurven-3-Gewebe . . 112

Jurkat, W., und A. Peyerimhoff, Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. I 255

Klingenberg, W., Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen 384

Knothe, H., Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse 235

Krull, W., Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. III 109

Lorenzen, P., Über die Korrespondenzen einer Struktur 61

Meyer-König, W., und K. Zeller, Über das Taylorsche Summierungsverfahren . 348

Müller, M., Über die Konvergenz eines Verfahrens zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten 81

Naumann, H., Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie 120

Neumer, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. III 1

Nitsche, J., Randwertprobleme für die Verbindung positiv gekrümmter Flächenstücke 353

Rajagopal, C. T., A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants (II) 142

Reid, W. T., A Tauberian Theorem for Power Series 94

Rieger, G. J., Zu Linniks Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$ 213

Schneider, Th., Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes 98

Schöneborn, H., Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. II 17

Söhngen, H., Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation 31

Stallmann, F., Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. I 187

Stoll, W., Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen 287

Thimm, W., Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen 435

Thosar, Y. V., Generalisations of Neumann's formula for $Q_n(y)$ 52

Velte, W., Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale 367

Vidav, I., Über eine Eigenschaft der Kugel 320

Vries, H. L. de, Über Riemannsche Räume, die infinitesimale konforme Transformationen gestatten 328

Wielandt, H., Zum Satz von Sylow 407

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 1—16 (1954)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. III.

Von
WALTER NEUMER.

Vorbemerkung.

Die beiden ersten Abschnitte dieser Arbeit (zitiert als I und II) erschienen in dieser Z. **58**, 391—413 (1953) und **59**, 434—454 (1954); sie enthalten die §§ 1—6. Der vorliegende dritte Abschnitt umfaßt die §§ 7 und 8 und bringt zunächst einige Rechenregeln für den freien Algorithmus (§ 7). Sodann werden zwei konstruktive Algorithmen mit dem Grundoperator U ($\alpha U = \alpha + 1$) bzw. W ($\alpha W = \alpha \cdot 2$) skizziert und es wird gezeigt, daß man mit jedem dieser Algorithmen denselben Abschnitt der zweiten Zahlenklasse erfaßt wie mit dem in I entwickelten Algorithmus (§ 7). In § 8 werden einige Möglichkeiten für die Einführung neuer Operatoren dargestellt und das Beispiel der Operatoren $\overline{V}$ und I_0 ($\alpha \overline{V} = \alpha V^{\alpha} = \alpha V I_0$) wird genauer durchgerechnet.

Die Paragraphen werden durchgehend, die Sätze, Formeln und Fußnoten in jedem Abschnitt für sich numeriert.

3. Abschnitt.

Beispiele für das Rechnen im freien Algorithmus.

§ 7. Einige Rechenregeln. Anwendungen.

1. Unter dem freien Algorithmus wollen wir von jetzt ab ganz allgemein das Rechnen mit beliebigen Operatoren aller Stufen gemäß den Regeln (1) und (2_i) ($i = 1, 2, \ldots$) von II, § 4, **1** verstehen. Wenn wir speziell vom freien Algorithmus der Symbole $V, J, J_1, J_2, \ldots$ (als Einzelzeichen für Operatoren 1., 2., 3., ... Stufe) sprechen, so meinen wir, daß außer diesen Symbolen keine ursprünglichen Einzelzeichen mehr für Operatoren verwendet werden sollen, sondern höchstens noch Einzelzeichen als Abkürzungen für Operatoren, die aus Zahlenfiguren $\tilde{\mathfrak{F}}$ entnommen sind; unter einem $\tilde{\mathfrak{F}}$ verstehen wir dabei eine Figur, die aus einem $\mathfrak{F}$ (s. II, § 4, **2**) entsteht, wenn $J, J_1, J_2, \ldots$ an die Stelle von $I, I', I'', \ldots$ gesetzt werden.

Es erscheint zunächst nötig, die in II, § 6, **1** für Operatoren erster Stufe definierte Monotonie auch für Operatoren höherer Stufen zu erklären. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Am nächsten liegt folgende Definition („Operatormonotonie"). Ein *Operator zweiter Stufe* J heiße *monoton*, wenn gilt:

$\alpha W J \leq \beta \overline{W} J$ für $\alpha \leq \beta$, $W \leq \overline{W}$, W und $\overline{W}$ monotone Operatoren erster Stufe.

Ein *Operator dritter Stufe* J_1 heiße *monoton*, wenn gilt:

$\alpha W J J_1 \leq \beta \overline{W} \bar{J} \bar{J}_1$ für $\alpha \leq \beta$, $W \leq \overline{W}$, $J \leq \bar{J}$, W und $\overline{W}$ bzw. J und $\bar{J}$ monotone Operatoren erster bzw. zweiter Stufe.

(Bezüglich der Relationen $W \leq \overline{W}$, $J \leq \bar{J}$ s. II, § 6, 1). — Sind W, J, J_1 monotone Operatoren 1., 2., 3. Stufe, so sind WJ, J^ν, JJ_1, J_1^ν monotone Operatoren 1., 2., 2., 3. Stufe. — Entsprechende Definitionen und Bemerkungen gelten für die Operatoren vierter und höherer Stufe. — I, I', I'' sind monotone Operatoren in diesem Sinn, überhaupt alle Operatoren zweiter und höherer Stufe, die in einer Figur $\mathfrak{F}$ vorkommen.

Für unsere Zwecke wichtiger ist eine andere Art von Monotonie, die speziell für Iteratoren (s. II, § 4, 2) erklärt wird („Iteratormonotonie"). Zur Vorbereitung geben wir folgende Definitionen. — Sind V und W Operatoren erster Stufe und gilt dabei $\alpha W \in \{\alpha V^\nu\}_{1 \leq \nu < P}$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, so nennen wir W eine *V-Potenz*. — V ist eine V-Potenz. Mit W ist W^ν eine V-Potenz, allgemein WJ, wenn J ein Iterator erster Stufe ist. — Eine V-Potenz W heiße *V-monoton*, wenn $\alpha W \leq \beta W$ gilt für $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$. — Mit W ist W^ν eine V-monotone V-Potenz.

Nun definieren wir: Ein *Iterator J von erster Stufe* heiße *monoton*, wenn stets $\alpha WJ \leq \beta \overline{W} J$ gilt, sobald $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$ ist und $W \leq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen sind, unter V einen beliebigen Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ verstanden ($\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$).

Ist W eine V-monotone V-Potenz, J ein monotoner Iterator erster Stufe, so ist auch WJ eine V-monotone V-Potenz. — Mit J ist jede Potenz J^ν monoton.

Ist J ein monotoner Iterator erster Stufe, $\bar{J}$ ein Operator zweiter Stufe, so daß $J \leq \bar{J}$, ist ferner $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$ und sind $W \leq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen, so gilt

$$\alpha WJ \leq \beta \overline{W} \bar{J}.$$

Denn $\alpha WJ \leq \beta \overline{W} J \leq \beta \overline{W} \bar{J}$. Daraus schließt man induktiv, wenn auch noch $\bar{J}$ ein monotoner Iterator ist:

$$\text{für } \nu < P: \quad \alpha W J^\nu \leq \beta \overline{W} \bar{J}^\nu \quad \text{für} \quad \nu < P.$$

Einen *monotonen Iterator zweiter Stufe* J_1 erklären wir durch die Forderung $\alpha WJ J_1 \leq \beta \overline{W} \bar{J} J_1$, wenn $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$, $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, V ein beliebiger Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, $W \leq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen und $J \leq \bar{J}$ zwei monotone Iteratoren erster Stufe sind. Entsprechend sind monotone Iteratoren 3., 4., ... Stufe zu definieren. — JJ_1 ist wieder monoton, ebenso J_1^ν usw. — $I, I', I'', \ldots$ sind monotone Iteratoren, überhaupt alle Operatoren zweiter und höherer Stufe in einer Figur $\mathfrak{F}$ des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$.

2. Ähnlich wie Hilfssatz 2 in II beweisen wir nun den

Satz 1. *Für beliebiges $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und beliebige Operatoren V und J erster und zweiter Stufe dieses Bereichs ist $\alpha V J I'$ eine Zahl der Form $\omega^\nu \geq \omega$.*

Zunächst wird nämlich [vgl. II, (19)]

(1) (a) $\alpha V J^\xi \geq \alpha V + \xi$ (b) $\alpha V J I' \geq (\alpha V) \cdot \omega$.

Denn $\alpha V J \geq \alpha V + 1$, $\alpha V J^2 \geq \alpha V J + 1 \geq \alpha V + 2$ usw. Also wird $\alpha V J^{\alpha V J} \geq \alpha V + \alpha V J \geq \alpha V + \alpha V + 1$ usw., woraus die Relation (1b) folgt, die ihrerseits liefert:

$$\alpha V + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{2}$$

Sodann zeigen wir:

$$\alpha (V J^{\nu}) J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{3}$$

Zur Bestätigung setzen wir $\beta = \alpha V J I' = \lim\limits_{n} \beta_n$, $\beta_1 = \alpha V J$, $\beta_{n+1} = \alpha V J^{\beta_n}$; $\gamma = \alpha (V J^{\nu}) J I' = \lim\limits_{n} \gamma_n$, $\gamma_1 = \alpha (V J^{\nu}) J = \alpha V J^{\nu+1}$, $\gamma_{n+1} = \alpha V J^{\nu+\gamma_n}$. Dann gilt $\beta_n < \gamma_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Denn $\beta_1 < \gamma_1$ (wir denken $\nu > 0$, sonst ist nichts zu beweisen), und aus $\beta_n < \gamma_n$ folgt $\beta_{n+1} < \gamma_{n+1}$. Somit ist $\beta = \lim\limits_{n} \beta_n \leq \lim\limits_{n} \gamma_n = \gamma$.— Andererseits wird nach der Voraussetzung über ν in (3): $\alpha (V J^{\nu}) J^{\beta} = \alpha V J^{\nu+\beta} = \alpha V J^{\beta} = \beta$, so daß nach dem Prinzip der kritischen Zahlen (II, § 6, 2) $\beta \geq \gamma$ wird. — Daher ist $\beta = \gamma$.

Aus (2), auf $V J^{\nu}$ statt V angewandt, und (3) folgt

$$\alpha V J^{\nu} + \alpha V J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{3a}$$

Für $\nu = 1$ schließt man durch Iteration von (3a), daß $\beta_n + \alpha V J I' = \alpha V J I'$ ist für $n = 1, 2, \ldots$, was $\nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'$ für $\nu < \alpha V J I'$ impliziert. — Damit ist Satz 1 bewiesen. Zugleich haben wir gefunden:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha (V J^{\nu}) J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu < \alpha V J I', \ \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \\ V \text{ und } J \text{ beliebige Operatoren erster und zweiter Stufe in } [\alpha^{(0)}, P). \end{cases}$$

Ist J ein Iterator erster Stufe, so gilt

$$\alpha (V J)^{\nu} \geq \alpha V^{2^{\nu}} \qquad (0 \leq \nu < P, \ J \text{ Iterator erster Stufe}). \tag{5}$$

Denn $\alpha (V J)^0 = \alpha V^0 = \alpha$, $\alpha V J \geq \alpha V^2$; ist (5) richtig für $\nu < \xi$, so ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit für $\nu = \xi$, wenn ξ Limeszahl. Ist $\xi = \eta + 1$, so wird $\alpha (V J)^{\eta+1} = (\alpha (V J)^{\eta}) V J \geq (\alpha (V J)^{\eta}) V^2 \geq \alpha V^{2^{\eta+2}} = \alpha V^{2^{\xi}}$.

Des weiteren bestehen die Relationen

$$(6) \quad \left.\begin{array}{ll} \alpha V J^{n+1} \geq \alpha (V J)^{2^n} & \text{für} \quad n < \omega \\ \alpha V J^{\nu} \geq \alpha (V J)^{2^{\nu}} & \text{für} \quad \omega \leq \nu < P \end{array}\right\} J \text{ Iterator erster Stufe.}$$

Beweis. Es ist $\alpha V J^2 = \alpha V J^{1+1} = \alpha (V J) J \geq \alpha (V J)^2 = \alpha (V J)^{2^1}$. Sei (6) richtig für $n \leq m$. Dann kommt $\alpha V J^{m+1} = \alpha (V J^m) J \geq \alpha (V J^m)^2 = (\alpha V J^m) V J^m \geq (\alpha V J^m) (V J)^{2^m - 1} \geq (\alpha (V J)^{2^m - 1}) (V J)^{2^m - 1} = \alpha (V J)^{2^m}$ [1]). Also kommt $\alpha V J^{\omega} = \lim\limits_{n} \alpha V J^{n+1} \geq \lim\limits_{n} \alpha (V J)^{2^n} = \alpha (V J)^{2^{\omega}}$. — Sei (6) richtig für $\omega \leq \nu < \xi$. Wenn ξ Limeszahl, so folgt sofort die Richtigkeit für $\nu = \xi$. Ist $\xi = \eta + 1$, so wird

$$\begin{aligned} \alpha V J^{\eta+1} &= \alpha (V J^{\eta}) J \geq \alpha (V J^{\eta})^2 \\ &= (\alpha V J^{\eta}) V J^{\eta} \geq (\alpha V J^{\eta}) (V J)^{2^{\eta}} \geq (\alpha (V J)^{2^{\eta}}) (V J)^{2^{\eta}} = \alpha (V J)^{2^{\eta+1}} \text{ [1])}. \end{aligned}$$

[1]) Wir benützen den Umstand, daß, unter J einen Iterator erster Stufe verstanden $\alpha V J^{\nu}$ für $\nu \geq 2$ eine Zahl aus $\{\alpha (V J)^{\mu}\}_{2 \leq \mu < P}$ ist.

(6) liefert in Verbindung mit (5):

$$\alpha V J I' = \alpha V J^{\alpha V J I'} \geq \alpha (V J)^{2^{\alpha V J I'}} \geq \alpha V^{2^{\alpha V J I'}} \geq 2^{\alpha V J I'} \geq \alpha V J I',$$

woraus folgt:

(7) $\alpha V J I' = \alpha (V J)^{\alpha V J I'} = \alpha V^{\alpha V J I'} = 2^{\alpha V J I'}$ (J Iterator erster Stufe),

daher

Satz 2. *Ist J ein Iterator erster Stufe und ist $\alpha V J I' > \omega$, so ist $\alpha V J I'$ eine ε-Zahl.*

Es gilt ferner für beliebige Operatoren J von zweiter Stufe:

(8) $\alpha V (J^n) I' = \alpha V J I'$ für $n = 1, 2, \ldots,$ J Operator zweiter Stufe.

Zum Beweis setzen wir wieder $\alpha V J I' = \beta = \lim\limits_n \beta_n$, $\beta_1 = \alpha V J$ usw., $\alpha V (J^n) I' = \gamma = \lim\limits_n \gamma_n$, $\gamma_1 = \alpha V J^n$, $\gamma_2 = \alpha V (J^n)^{\gamma_1}$ usw. Dann wird $\gamma_1 \geq \beta_1$, $\gamma_2 = \alpha V J^{n \gamma_1} \geq \alpha V J^{\beta_1} = \beta_2$ usw., also $\gamma \geq \beta$. Andererseits ist $\alpha V (J^n)^\beta = \alpha V J^\beta = \beta$ und somit nach dem Prinzip der kritischen Zahlen $\beta \geq \gamma$.

Wir bringen jetzt zwei Relationen bezüglich monotoner Iteratoren erster Stufe.

(9) $(\alpha V) V J I' = \alpha V J I'$, wenn J ein monotoner Iterator erster Stufe.

Beweis. Da auch $J I'$ monoton, ist $\alpha V J I' \leq (\alpha V) V J I'$. — Sei wieder $\alpha V J I' = \beta = \lim\limits_n \beta_n$, $\beta_1 = \alpha V J$ usw., $(\alpha V) V J I' = \gamma = \lim\limits_n \gamma_n$, $\gamma_1 = (\alpha V) V J$ usw. Wir wollen zeigen, daß es eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ gibt mit $\gamma_i < \beta_{n_i}$ ($i = 1, 2, \ldots$). Zunächst wird $\gamma_1 \leq (\alpha V J) V J = \alpha (V J)^2 \leq \alpha V J^2 < \alpha V J^{\alpha V J} = \beta_2$ (da $\alpha V J \geq 3$), also $\gamma_1 < \beta_2$, so daß wir $n_1 = 2$ setzen können. Sei $\gamma_i < \beta_{n_i}$ für $i \leq p$ bewiesen. Dann wird $\gamma_{p+1} = (\alpha V) V J^{\gamma_p} \leq (\alpha V J^{\gamma_p}) V J^{\gamma_p} = \alpha (V J^{\gamma_p})^2 \leq \alpha V (J^{\gamma_p})^2 = \alpha V J^{\gamma_p + \gamma_p}$. Wegen $\gamma_p < \beta_{n_p} < \alpha V J I'$ und Satz 1 ist aber $\gamma_p + \gamma_p < \alpha V J I'$, so daß es ein kleinstes $m \geq n_p$ gibt mit $\gamma_p + \gamma_p < \beta_m$. Also wird $\gamma_{p+1} < \alpha V J^{\beta_m} = \beta_{m+1}$. Setzen wir $n_{p+1} = m + 1$, so kommt $\gamma_{p+1} < \beta_{n_{p+1}}$. — Somit ist $\beta \geq \gamma$.

Ersetzen wir in (9) V durch $V J$, so folgt vermöge (4) für $\nu = 1$:

$$(\alpha V J)(V J) J I' = \alpha (V J) J I' = \alpha V J I';$$

für $\alpha V J$ statt α und $\nu = 1$ liefert (4):

$$(\alpha V J)(V J) J I' = (\alpha V J) V J I'.$$

Beides zusammen gibt

(10) $(\alpha V J) V J I' = \alpha V J I'$, wenn J ein monotoner Iterator erster Stufe.

3. Nun sollen einige Sätze folgen über die Invarianz des Zahlenwertes von Figuren $\mathfrak{F}$ (II, § 4, 2) gegenüber gewissen Substitutionen.

Satz 3. *Seien α und β zwei verschiedene Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und V ein Operator erster Stufe in diesem Bereich; es möge die Gleichung $\alpha V = \beta V$ bestehen. Ist dann $\mathfrak{F}$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$, in welcher α als Kernvariable vorkommt und ersetzt man α an diesen Stellen durch β, wodurch die Figur $\widetilde{\mathfrak{F}}$ entstehe, so gilt $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$* (im Sinn der Gleichheit des Zahlenwertes).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Regeln (2_i) und (3_i) in **II**, wenn man beachtet, daß $\alpha V^\nu = \beta V^\nu$ wird für alle $\nu \in [1, P)$.

Satz 4. *Seien α und β wieder zwei verschiedene Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und V ein Operator erster Stufe darin; es werde vorausgesetzt, daß $\alpha V I = \beta V I$ ist. $\mathfrak{F}$ sei eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$, in welcher α als Kernvariable so auftritt, daß sie eine Kette $\alpha($...$(V($...$(I$ beginnt, wobei (...(eine Kette von linken Klammern bedeutet, die auch fehlen dürfen. Indem man an diesen Stellen α durch β ersetzt, ergebe sich die Figur $\widetilde{\mathfrak{F}}$. Dann gilt $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$.*

Unter einer *Kette* in einer Figur $\mathfrak{F}$ (allgemein in einer nach den Regeln der Potenzschreibweise gebildeten Figur aus Einzelzeichen; vgl. **II**, § 4, **3**, Schluß) verstehen wir eine Reihe von Einzelzeichen, die in derselben Zeile im Sinn der Links-rechts-Struktur unmittelbar aufeinander folgen. Die Hälften „(" und „)" einer Klammer ( ) gelten dabei als Einzelzeichen.

Zum Beweis des Satzes 4 braucht man nur von der Gleichung $(\alpha V I) V^\nu = (\beta V I) V^\nu$ $(\nu \in [1, P))$ auszugehen und die Regeln (2_i), (3_i) von **II** anzuwenden. Der Satz folgt so für Figuren der genannten Art, die nur in der Grundzeile Zeichen $V, I, I', \ldots$ enthalten; durch Induktion nach der Zeilenanzahl bestätigt man ihn für beliebige $\mathfrak{F}$.

Beispiel: $\left(\alpha\left(V(II')^{\alpha V I^{\alpha V}}\right) I^\alpha\right) V^\beta = \left(\beta\left(V(II')^{\beta V I^{\alpha V}}\right) I^\alpha\right) V^\beta$

Bemerkung. Man kann Satz 4 nicht aus Satz 3 erhalten, indem man dort V durch VI ersetzt.

Die Voraussetzung $\alpha V I = \beta V I$ des Satzes 4 ist z.B. erfüllt für $\beta = \alpha V$, $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, denn es gilt sogar $(\alpha V^\nu) V I = \alpha V I$ für $\nu < \alpha V I$ [vgl. **II**, § 6, **2**, (22)].

Satz 5. *Seien α eine Zahl aus $[\alpha^{(0)}, P)$, V und W zwei Operatoren erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ und sei $\alpha V^\nu = \alpha W^\nu$ für $1 \leq \nu < P$. Dann gilt $\mathfrak{F}(\alpha) = \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha)$, wenn $\widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha)$ aus der Figur $\mathfrak{F}(\alpha)$ des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ vermöge Ersetzung von V durch W hervorgeht.* ($\mathfrak{F}(\alpha)$ ist in **II**, § 4, **2** erklärt.)

Die Regeln (2_i), (3_i) lassen zunächst erkennen, daß $\mathfrak{F}(\alpha) = \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha) = \alpha V^\xi = \alpha W^\xi$ ist [mit von $\mathfrak{F}(\alpha)$ abhängigem ξ] bei Figuren, welche die Zeichen V bzw. W und $I, I', \ldots$ nur in der Grundzeile aufweisen; Induktion nach der Zeilenanzahl vervollständigt den Beweis.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendung bringen wir noch einen Satz von ähnlichem Charakter wie Satz 4:

Satz 6. *Seien V und W zwei Operatoren erster und J ein Operator zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ und es bestehe die Relation $\alpha V J = \alpha W J$ bzw. $\alpha V J I' = \alpha W J I'$ für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$. $\mathfrak{F}$ sei eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, J, I', I'', \ldots$, in welcher V stets eine Kette $V(\ldots(J$ bzw. $V(\ldots(J(\ldots(I'$ beginnt, worin die linken Klammern „(" auch fehlen dürfen, und $\mathfrak{F}^*$ entstehe aus $\mathfrak{F}$ durch Substitution von W an Stelle von V. Dann gilt $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.*

Der Beweis verläuft analog wie bei Satz 4, wenn man beachtet, daß die in Satz 6 vorausgesetzten Relationen sich auch in der Form $VJ = WJ$ bzw. $VJI' = WJI'$ schreiben lassen.

Die Voraussetzung $\alpha VJI' = \alpha WJI'$ ist z. B. erfüllt für beliebige V und J, wenn $W = VJ$ gesetzt wird, denn es gilt sogar die Relation (4).

Die Sätze und Formeln dieser und der vorangehenden Ziffer lassen sich mannigfach variieren und auch auf Operatoren höherer Stufe übertragen.

4. In **II**, § 4, **3** und § 5, **5** (Schluß) wurden die Sonderfälle erwähnt, wo als Ausgangszahl des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ die Zahl $\vartheta = 1$ genommen und der Grundoperator V durch $\xi V = \xi + 1$ bzw. $\xi V = \xi \cdot 2$ erklärt wird. Für den Augenblick wollen wir mit U, W, V die folgendermaßen definierten Operatoren bezeichnen:

$$\xi U = \xi + 1, \quad \xi W = \xi \cdot 2, \quad \xi V = \xi \cdot \omega \quad (\xi \in [1, P)); \tag{11}$$

dementsprechend reden wir vom U-, W-, V-Algorithmus, indem wir uns die Iteratoren $I, I', I'', \ldots$ hinzugenommen denken.

Wir betrachten zunächst den U-Algorithmus. In **II**, Fußnote [4]) wurde bemerkt, daß $\xi UI = \xi \cdot \omega$, also $UI = V$ ist. Nach Satz 6 und anschließender Bemerkung ist daher $1UI \ldots I^{(n)} = 1VI \ldots I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, also auch

$$1UII'I'' \cdots = 1VII'I'' \cdots . \tag{12}$$

Offenbar kann man mittels der Zeichen $1, (\,), U, I, I', I'', \ldots$ auch einen *konstruktiven* U-Algorithmus entwickeln (nach Analogie des konstruktiven V-Algorithmus von **I**). Die „vollregulären" Zahlenfiguren des konstruktiven U-Algorithmus sind nach Ersetzung von U durch V diejenigen vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven V-Algorithmus, welche kein $+$-Zeichen enthalten (vgl. **II**, § 4, **3**); dasselbe gilt hinsichtlich der „vollständigen Hilfsfiguren" des U-Algorithmus.

Die Folge der natürlichen Zahlen wird im konstruktiven U-Algorithmus dargestellt durch die vollregulären Figuren

$$1,\ 1U,\ 1U^{1U},\ 1U^{1U^{1U}},\ \ldots .$$

Nachträglich kann man wieder die übliche Ziffernschreibweise als Abkürzung einführen und demgemäß zu abgekürzten regulären und abgekürzten Hilfsfiguren übergehen. Wir beschränken uns jedoch bei den folgenden Bemerkungen auf vollständige (d. h. unabgekürzte) Figuren.

Der Zusammenhang einer regulären Zahlenfigur mit ihren Hilfsfiguren ist im U-Algorithmus teilweise anders als im V-Algorithmus. So ist der Nachfolger eines vollregulären α im U-Algorithmus durch αU gegeben und das kann noch eine Hilfsfigur sein. Für $\alpha = 1U^{1U}$ z. B. hat man die Konstruktion $\left(1U^{1U}\right)U = 1U^{(1U)U} = 1U^{1U^{1U}}$, worin die beiden ersten Ausdrücke als Hilfsfiguren zu werten sind. Ist allgemein αU bzw. αU^{β} eine vollreguläre Zahlenfigur des U-Algorithmus, so gilt für ihren Nachfolger die Konstruktion $(\alpha U)U = \alpha U^{1U}$ bzw. $(\alpha U^{\beta})U = \alpha U^{\beta U}$, worin jedesmal die erste Figur als Hilfsfigur zu gelten hat; αU^{1U} ist vollregulär, $\alpha U^{\beta U}$ nur dann, wenn βU es ist (d. h. wenn β nicht die Form γU oder γU^{δ} hat). Im übrigen gelten auch im konstruktiven U-Algorithmus die Schemata $(\mathfrak{O}_n)$, $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von I, § 1, 5, wobei nur $\beta + 1$ durch βU zu ersetzen ist, was allerdings zur Folge haben kann, daß die betreffende Figur nicht mehr regulär bleibt, wenn sie es vorher war [wie in $(\mathfrak{O}_1\,a)$]; denn βU ist möglicherweise noch Hilfsfigur. Die Schemata $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ fallen natürlich im U-Algorithmus weg[2]).

Wegen (12) erfaßt der U-Algorithmus konstruktiv denselben Abschnitt der zweiten Zahlenklasse wie der V-Algorithmus. Nach Satz 6 stellt ferner jede vollständige Zahlenfigur des konstruktiven U-Algorithmus, in welcher U stets eine Kette der Form $U(\ldots(I(\ldots(I'$ beginnt, die nämliche Zahl der zweiten Zahlenklasse dar wie die entsprechende Figur des konstruktiven V-Algorithmus. — Transfinit sind nur solche Zahlen des konstruktiven U-Algorithmus, welche wenigstens das Zeichen I enthalten (von den Hilfsfiguren mit „lim" abgesehen).

Beispiel. Die Zahl $\omega^2 2 + \omega 2 + 3$ wird im U-Algorithmus wiedergegeben durch

$$(1(UI)^2)U^{(1(UI)^2)U^{(1UI)U^{(1UI)U^{1U^{1U}}}}}$$

und dieser Ausdruck läßt sich nur geringfügig abkürzen, indem man $1U^{1U}$ durch 3 ersetzt. Im V-Algorithmus lautet dieselbe Zahl: $1V^{1+1}(1+1) + 1V(1+1) + 1 + 1 + 1$, abgekürzt $1V^2 2 + 1V 2 + 3$. Der Fortfall des $+$-Zeichens im U-Algorithmus ist somit keine praktische Vereinfachung.

5. Jetzt wollen wir den W-Algorithmus mit dem Grundoperator $W = \cdot 2$ [vgl. (11)] etwas näher betrachten. Es wird offenbar $\xi W^{\omega} = \xi V$ für $\xi \in [1, P)$, d. h. $W^{\omega} = V$. Für $\xi \geq \omega$ ist nach Hilfssatz 3 in II, § 6, 2 die Zahl ξWI eine ε-Zahl, somit $\xi(W^{\omega})^{\xi WI} = \xi W^{\xi WI} = \xi WI$, also nach dem Prinzip der

[2]) Selbstverständlich bleiben die Konstruktionsprinzipien I und II von I, § 1, 3 in Kraft.

kritischen Zahlen $\xi WI \geq \xi(W^{\omega})I$; umgekehrt muß natürlich $\xi WI \leq \xi(W^{\omega})I$ sein. Daher gilt

$$\xi WI = \xi VI \quad \text{für} \quad \xi \geq \omega. \tag{13}$$

Für eine natürliche Zahl n wird offenbar

$$nWI = nV = \omega. \tag{14}$$

Daher liefert (13): $(nWI)WI = (nV)VI$, also wegen II, § 6, **2**, (22): $n(WI)^2 = nVI$. Indem man diese Schlußweise fortsetzt, gelangt man zu den Relationen

$$n(WI)^{1+\nu} = n(VI)^{\nu} \quad \text{für} \quad n \in [1, \omega), \quad \nu \in [1, P) \tag{15}$$

$$\xi(WI)^{\nu} = \xi(VI)^{\nu} \quad \text{für} \quad \xi \in [\omega, P), \quad \nu \in [1, P). \tag{16}$$

Nun kann man für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und jeden Operator V von erster Stufe in diesem Bereich statt (3_1) in II auch schreiben:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha VI = \lim \left\{ \alpha V^{\beta},\ \alpha V^{\alpha V^{\beta}},\ \alpha V^{\alpha V^{\alpha V^{\beta}}},\ \ldots \right\} \quad \text{für} \quad \beta \in [1, \alpha VI) \\ \qquad (\alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \quad V \text{ ein Operator erster Stufe in } [\alpha^{(0)}, P)) \end{array} \right. \tag{17}$$

denn jedes Glied innerhalb { } in (17) ist einerseits nicht kleiner als das entsprechende Glied innerhalb { } in II, (3_1), andererseits aber $< \alpha VI$. Ersetzt man in (17) α durch ξ, V durch WI und β durch 2, so kommt

$$\xi WI^2 = \xi(WI)I = \lim \left\{ \xi(WI)^2,\ \xi(WI)^{\xi(WI)^2},\ \xi(WI)^{\xi(WI)^{\xi(WI)^2}},\ \ldots \right\};$$

vermöge (15) und (16) ist für $\xi < \omega$ die Folge innerhalb der vorstehenden { } gliedweise gleich der Folge $\xi VI,\ \xi(VI)^{\xi VI},\ \xi(VI)^{\xi(VI)^{\xi VI}}, \ldots$, deren Limes ξVI^2 ist, während für $\xi \geq \omega$ die Glieder in { } ihren Wert behalten, wenn W durch V ersetzt wird. Also wird immer $\xi WI^2 = \xi VI^2$ für $\xi \in [1, P)$, d.h. $WI^2 = VI^2$. Das aber liefert

$$\xi WI^{\nu} = \xi VI^{\nu} \quad \text{für} \quad \nu \in [2, P), \ \xi \in [1, P). \tag{18}$$

Analog zu (17) hat man nun die Relation

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha VJI' = \lim \left\{ \alpha VJ^{\beta},\ \alpha VJ^{\alpha VJ^{\beta}},\ \ldots \right\} \quad \text{für} \quad \beta \in [1, \alpha VJI'), \\ \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \ V \text{ bzw. } J \text{ ein Operator erster bzw. zweiter Stufe in } [\alpha^{(0)}, P). \end{array} \right. \tag{19}$$

Setzt man in (19) und in der aus ihr durch die Substitution von W an Stelle von V entstehenden Relation $\alpha = \xi$, $J = I$, $\beta = 2$, so kommt vermöge (18):

$$\xi WII' = \xi VII' \quad \text{für} \quad \xi \in [1, P). \tag{20}$$

Somit läßt sich auf die Operatoren V und W der Satz 6 anwenden; insbesondere wird $1WI \ldots I^{(n)} = 1VI \ldots I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und

$$1WII'I'' \ldots = 1VII'I'' \ldots. \tag{21}$$

Mit den Zeichen $1, (\,), +, W, I, I', I'', \ldots$ kann man wieder einen *konstruktiven* W-Algorithmus aufbauen, indem man zunächst folgende Schemata benützt:

$(\mathfrak{N})$ $\qquad \xi + 1 = \text{Nachfolger von } \xi;$

$(\mathfrak{W})$ $\qquad (1)\quad \xi + \xi = \xi W \qquad (2)\quad \eta + \xi + \xi = \eta + \xi W.$

$\xi + 1$ kann für jedes vollreguläre ξ gebildet werden, ist aber eventuell noch Hilfsfigur, nämlich genau dann, wenn $\xi = \eta + 1$ ist. Denn nach $(\mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{W}, 2)$ wird $\eta + 1 + 1 = \eta + 1W$. Das Schema $(\mathfrak{W})$ wird nur angewendet, wenn die vollreguläre Figur ξ kein $+$-Zeichen in der Grundzeile enthält. Solche vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven W-Algorithmus nennen wir *W-Potenzen*.

Jede vollreguläre Zahl α hat im konstruktiven W-Algorithmus die Form

$$(22) \qquad \alpha = \chi_1 + \cdots + \chi_q + 1, \quad \chi_1 > \cdots > \chi_q,$$

worin die χ_i W-Potenzen bedeuten; q kann gleich 1 sein und $+1$ kann fehlen. In $(\mathfrak{W}\,2)$ ist $\eta + \xi$ von der Form (22), also $\xi = \chi_q$ oder $\xi = 1$; $\eta + \xi W$ kann noch Hilfsfigur sein, desgleichen ξW selbst.

An die Stelle der Schemata $(\mathfrak{A})$ in **I**, § 1, **5** tritt dieses:

$$(\mathfrak{L}) \qquad \zeta + \lambda = \lim_n (\zeta + \gamma_n), \quad \lambda = \lim_n \gamma_n,$$

wo λ vollregulär ist. $(\mathfrak{L})$ darf in folgenden Fällen angewandt werden:

1. $\zeta = \chi_1 + \cdots + \chi_q$, $\lambda = \chi_{q+1} + \cdots + \chi_{p+q}$ mit $\chi_q > \chi_{q+1}$; also $\zeta + \lambda = \chi_1 + \cdots + \chi_{q+p}$.

2. ζ wie zuvor, aber mit $q > 1$; $\lambda = \chi_q$; $\zeta + \lambda = \chi_1 + \cdots + \chi_{q-1} + \chi_q W$. 3. $\zeta = \lambda = \chi_1$ $(q = 1)$; $\zeta + \lambda = \chi_1 W$. Im ersten Fall ist $\zeta + \lambda$ vollregulär; im 2. und 3. Fall, wo das Schema $(\mathfrak{W})$ herangezogen wird, ist $\zeta + \lambda$ möglicherweise Hilfsfigur.

Ist in (22) χ_i Limeszahl, so auch $\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}$.

Das Schema $(\mathfrak{V})$ (**I**, § 1, **5**) des konstruktiven V-Algorithmus fällt weg, die Schemata $(\mathfrak{O}_n)$, $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ daselbst gelten ungeändert auch im konstruktiven W-Algorithmus[3]).

Die vollregulären Zahlenfiguren des W-Algorithmus sind, nach Ersetzung von W durch V, diejenigen vollregulären Zahlenfiguren des V-Algorithmus von **I**, welche keine Kombination $1 + 1$ als Teilfigur enthalten (vgl. **II**, § 5, **5**, Schluß). Ferner werden alle vollständigen Hilfsfiguren des V-Algorithmus, in denen keine Zeichengruppe $1 + 1$ auftritt, nach Substitution von W an Stelle von V zu vollständigen Hilfsfiguren des W-Algorithmus, freilich ohne daß damit der Bereich der letzteren erschöpft würde.

[3]) Die Konstruktionsprinzipien **I**, **II** aus **I**, § 1, **3** bleiben natürlich wieder bestehen.

Die Reihe der natürlichen Zahlen, d.h. der Zahlen $< 1W I$, wird dargestellt durch

$$1;\ 1+1=\underline{1W};\ \underline{1W+1};\ 1W+1+1=1W+1W=(1W)W=1W^{1+1}=$$
$$\underline{1W^{1W}};\ \underline{1W^{1W}+1};\ 1W^{1W}+1+1=\underline{1W^{1W}+1W};\ \underline{1W^{1W}+1W+1};$$
$$1W^{1W}+1W+1+1=1W^{1W}+1W+1W=1W^{1W}+(1W)W=1W^{1W}$$
$$+1W^{1+1}=1W^{1W}+1W^{1W}=\left(1W^{1W}\right)W=\underline{1W^{1W+1}};\ldots,$$

wobei die unterstrichenen Ausdrücke vollregulär sind. Man sieht, daß zu den vorhin genannten Hilfsfiguren des W-Algorithmus noch solche hinzukommen, in denen die Kombination $1+1$ genau einmal auftritt. — Ersetzen wir in den obigen unterstrichenen Figuren W durch $\cdot 2$, so erhalten wir nach Weglassung der Faktoren 1 die Darstellung der natürlichen Zahlen als Summen von Zweierpotenzen. Es wäre daher angemessen, die abgekürzten Figuren des konstruktiven W-Algorithmus mittels des dualen Ziffernsystems einzuführen.

Wegen (21) ist der vom konstruktiven W-Algorithmus erfaßte Abschnitt der zweiten Zahlenklasse wieder derselbe wie beim konstruktiven V-Algorithmus. Nach Satz 6 und den Formeln (16) und (18) gibt es eine ganze Kategorie von Zahlenfiguren des konstruktiven W-Algorithmus, welche dieselbe Zahl der zweiten Zahlenklasse repräsentieren wie die entsprechenden Figuren des konstruktiven V-Algorithmus. — Transfinit sind wieder nur diejenigen Zahlen des konstruktiven W-Algorithmus, die wenigstens das Zeichen I enthalten.

§ 8. Definition neuer Operatoren mittels gegebener Operatoren.

1. Man kann den Algorithmus erweitern, indem man im Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ gleichzeitig mehrere Operatoren derselben Stufe zuläßt und damit natürlich auch deren „Produkte". Unter dem *Produkt* $U \times V$ zweier Operatoren U, V von erster Stufe verstehen wir den durch $\alpha U \times V = (\alpha U) V$ erklärten Operator erster Stufe. Es lassen sich auch Produkte von beliebig vielen Operatoren erster Stufe V_ν, $\nu \in [0, \sigma)$, $\sigma < P$, erklären durch die induktive Definition

$$\alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma+1} = \alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma} \times V_\sigma, \quad \alpha V_\nu \prod_{\nu<\lambda} = \lim_{\sigma<\lambda} \alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma} \quad (\lambda \text{ Limeszahl}).$$

Diese Produktbildung ist assoziativ; $V_\nu \prod_{\nu<\sigma}$ ist wieder ein Operator erster Stufe.

Entsprechend definiert man die Produkte von beliebig vielen Operatoren der n-ten Stufe. Sind z.B. $J, \bar{J}$ zwei Operatoren zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, so ist der Operator zweiter Stufe $J \times \bar{J}$ zu definieren durch $\alpha V J \times \bar{J} = \alpha (V J) \bar{J}$, unter α eine beliebige Zahl aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und unter V einen beliebigen Operator erster Stufe darin verstanden.

2. Mit der vorstehend skizzierten Produktbildung wollen wir uns hier nicht näher beschäftigen, sondern einige Beispiele für eine andersartige Gewinnung

neuer Operatoren betrachten. Die Definitionen (3) in II, § 4, 1 legen folgende Erklärungen nahe:

$$(23_1) \qquad \alpha V I = \lim_{\nu} \alpha V_\nu; \quad \alpha V_1 = \alpha V, \ \alpha V_{\nu+1} = \alpha V^{\alpha V_\nu}$$

$$(23_2) \qquad \alpha V J I' = \lim_{\nu} \alpha V J_{0\nu}; \quad \alpha V J_{01} = \alpha V J, \ \alpha V J_{0,\nu+1} = \alpha V J^{\alpha V J_{0\nu}}$$

$$(23_{n+2}) \qquad \begin{cases} \alpha V J \dots J_n I^{(n+1)} = \lim_{\nu} \alpha V J \dots J_{n-1} J_{n\nu}, \\ \alpha V J \dots J_{n-1} J_{n1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n, \\ \alpha V J \dots J_{n-1} J_{n,\nu+1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{\alpha V J \dots J_{n-1} J_{n\nu}}. \end{cases}$$

$V_\nu, J_{0\nu}, \dots, J_{n\nu}$ sind Operatoren 1., 2., ..., $(n+2)$. Stufe. V_ν ist eine V-monotone V-Potenz; die $J_{n\nu}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sind monotone Iteratoren $(n+1)$. Stufe, wenn die J_n es sind (vgl. § 7, 1). — Insbesondere schreiben wir

$$(24) \qquad J_{0\nu} = I_\nu \quad \text{für} \quad J = I, \qquad J_{n\nu} = I_\nu^{(n)} \quad \text{für} \quad J_n = I^{(n)}.$$

Eingehender wollen wir uns nun dem folgendermaßen auf Grund eines Operators erster Stufe V definierten Operator $\overline{V}$ zuwenden:

$$(25) \qquad \alpha \overline{V} = \alpha V^\alpha \quad (\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)).$$

Wegen $\alpha V^\alpha \geq \alpha + \alpha = \alpha 2$ (vgl. II, § 6, 2, (19a)) gilt

$$(26) \qquad \alpha \overline{V} \geq \alpha \cdot 2,$$

d.h. nach Hilfssatz 3 daselbst ist $\alpha \overline{V} I$ eine ε-Zahl für $\alpha \geq \omega$.

Es wird ferner $\alpha \overline{V}^2 = (\alpha \overline{V}) \overline{V} = (\alpha \overline{V}) V^{\alpha \overline{V}} = (\alpha V^\alpha) V^{\alpha \overline{V}} = \alpha V^{\alpha + \alpha \overline{V}}$. Nach II, § 6, 2, Hilfssatz 2 ist $\alpha + \alpha \overline{V} < \alpha V I$, also auch $\alpha \overline{V}^2 < \alpha V I$. Ebenso folgt $\alpha \overline{V}^3 = (\alpha \overline{V}^2) V^{\alpha \overline{V}^2} = \alpha V^{\alpha + \alpha \overline{V} + \alpha \overline{V}^2} < \alpha V I$ usw. Andererseits ist $\alpha \overline{V} \geq \alpha V$, $\alpha \overline{V}^2 \geq \alpha V^{\alpha V} = \alpha V_1$, $\alpha \overline{V}^3 \geq \alpha V^{\alpha V_1} = \alpha V_2$ usf. Daraus schließt man:

$$(27) \qquad \alpha \overline{V}^\omega = \alpha V I \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

$\overline{V}$ ist offenbar eine V-monotone V-Potenz. Es gilt außerdem:

Hilfssatz 1. *Ist ein Operator erster Stufe $\overline{V}$ eine V-monotone V-Potenz mit der Eigenschaft* (27), *so ist $\overline{V} I$ eine $V I$-monotone $V I$-Potenz.*

Beweis. Nach II, Hilfssatz 2 gilt $\alpha \overline{V} I = \omega \cdot \omega^\mu$, $\mu \geq 0$. Also wird $\alpha \overline{V} I = \alpha \overline{V}^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V}^{\omega \cdot \omega^\mu} = \alpha (\overline{V}^\omega)^{\omega^\mu} = \alpha (V I)^{\omega^\mu}$ (vermöge (27) ist ja $\overline{V}^\omega = V I$). $\overline{V} I$ ist somit eine $V I$-Potenz. Da $\overline{V} I$ zugleich eine V-monotone V-Potenz ist, muß $\overline{V} I$ auch $V I$-monoton sein.

Für $\alpha \geq \omega$ wird $\alpha (\overline{V}^\omega)^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V}^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V} I$, also nach dem Prinzip der kritischen Zahlen $\alpha \overline{V} I \geq \alpha (\overline{V}^\omega) I$. Umgekehrt ist natürlich $\alpha (\overline{V}^\omega) I \geq \alpha \overline{V} I$.

Somit kommt in Verbindung mit (27):

$$(28) \qquad \alpha(\overline{V}^{\omega})I = \alpha\overline{V}I = \alpha VI^2 \quad \text{für} \quad \alpha \geq \omega, \qquad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Wir wollen nun zeigen, daß gilt:

$$(29) \qquad \alpha(\overline{V}I)^{\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu} \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \qquad \nu \in [\omega, P).$$

Für diejenigen α, welche die Gleichung $\alpha\overline{V}I = \alpha VI^2$ erfüllen, gewinnt man (29) induktiv aus (28), sogar für $\nu < \omega$, indem man dort α durch $\alpha(\overline{V}I)^{\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \sigma, \ldots$ $(\sigma < P)$ ersetzt. Ist aber $\alpha\overline{V}I \neq \alpha VI^2$, so ist $\alpha\overline{V}I < \alpha VI^2 = \alpha(VI)I$ (denn es gilt $\overline{V} < VI$, und beide Operatoren sind V-monotone V-Potenzen, woraus $\alpha\overline{V}I \leqq \alpha VI^2$ folgt). Wegen $\alpha\overline{V}I \geq \omega$ liefert (28): $\alpha(\overline{V}I)^2 = (\alpha\overline{V}I)\overline{V}I = (\alpha\overline{V}I)VI^2 = (\alpha\overline{V}I)(VI)I$. Wegen Hilfssatz 1 und $\alpha\overline{V}I < \alpha(VI)I$ kann man auf den letzten Ausdruck der vorstehenden Kette von Gleichungen die Sätze 7 und 10 aus II, § 6, 4 für $n = 1$ anwenden, indem man α mit ϑ und VI mit dem dortigen V identifiziert sowie $\alpha\overline{V}I$ als Ausgangsvariable ξ ansieht. Dann wird $(\alpha\overline{V}I)(VI)I = \alpha(VI)I$, d.h.

$$(30) \qquad \alpha(\overline{V}I)^2 = \alpha VI^2 \quad \text{für} \quad \alpha\overline{V}I < \alpha VI^2.$$

Aus (30) gewinnt man aber induktiv vermöge (28) (analog wie (29) aus $\alpha\overline{V}I = \alpha VI^2$): $\alpha(\overline{V}I)^{1+\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu}$ für $\nu \in [1, P)$, also wiederum (29).

Ersetzt man in (17) β durch ω und V durch $\overline{V}I$ bzw. VI^2, so ergibt sich vermöge (29): $\alpha(\overline{V}I)I = \alpha(VI^2)I$, d.h.

$$(31) \qquad \alpha\overline{V}I^2 = \alpha VI^3 \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Die Relation (31) kann man übrigens auch mittels des Prinzips der kritischen Zahlen gewinnen. Denn nach (29) wird $\alpha\overline{V}I^2 = \alpha(\overline{V}I)^{\alpha\overline{V}I^2} = \alpha(VI^2)^{\alpha\overline{V}I^2}$ also $\alpha\overline{V}I^2 \geq \alpha VI^3$. Ebenso folgt $\alpha VI^3 \geq \alpha\overline{V}I^2$.

Aus (31), oder, was dasselbe ist, aus $\overline{V}I^2 = VI^3$ erhält man durch Induktion die Relationen

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} (1) & \alpha\overline{V}I^n = \alpha VI^{n+1} & (n = 2, 3, \ldots) \\ (2) & \alpha\overline{V}I^{\nu} = \alpha VI^{\nu} & (\nu \geq \omega) \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Aus (32, 2) erschließt man auf analoge Weise wie (31) aus (29), d.h. vermöge (19) mit $\beta = \omega$ und $J = I$ oder mittels des Prinzips der kritischen Zahlen die Relation

$$(33) \qquad \alpha\overline{V}II' = \alpha VII' \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

3. *Vermöge* (33) *kann man auf V und $\overline{V}$ statt V und W den Satz* 6 *mit $J = I$ anwenden.* — Bei der Herleitung von (33) wurde nur benützt, daß $\overline{V}$ eine V-monotone V-Potenz mit $\overline{V} \geq \cdot 2$ ist, welche die Bedingung (27) erfüllt. Also gilt vorstehende Aussage für alle Operatoren $\overline{V}$ von erster Stufe, welche diese Eigenschaften besitzen. Das trifft unter anderem zu für die in (23_1)

erklärten Operatoren V_β mit $\beta = 2, 3, \ldots$. Wegen $V_\beta > \overline{V} \geq \cdot 2$ ist sogar $V_\beta > \cdot 2$. Außerdem gilt $\alpha \overline{V}^\omega \leq \alpha V_\beta^\omega$. Andererseits hat man $\alpha V_\beta^n < \alpha V I$, wie man folgendermaßen einsieht.

Sei $\beta < \alpha V I$, also $\alpha V^\beta < \alpha V I$. Dann wird nach Hilfssatz 2 aus II auch $(\alpha V^\beta) V_1 = \alpha V^{\beta+1} < \alpha V I$, $(\alpha V^\beta) V_2 = (\alpha V^\beta) V^{(\alpha V^\beta) V_1} = \alpha V^{\beta + (\alpha V^\beta) V_1} < \alpha V I$, $(\alpha V^\beta) V_3 = \alpha V^{\beta + (\alpha V^\beta) V_2} < \alpha V I$ usw., allgemein

$$(34) \qquad (\alpha V^\beta) V_\beta = \alpha V^{\gamma_\beta} < \alpha V I \quad \text{für} \quad \beta < \alpha V I, \quad \beta = 1, 2, 3, \ldots.$$

Setzt man hierin $\beta = \alpha V_{\beta-1}$ für $\beta = 2, 3, \ldots$, so kommt nach (23_1): $(\alpha V_\beta) V_\beta = \alpha V_\beta^2 = \alpha V^{\gamma_\beta^{(2)}} < \alpha V I$. Daraus ergibt sich $\alpha V_\beta^3 = \alpha V^{\gamma_\beta^{(3)}} < \alpha V I$ usw., d.h. $\alpha V_\beta^\omega \leq \alpha V I = \alpha \overline{V}^\omega$. — Somit wird $\alpha V_\beta^\omega = \alpha \overline{V}^\omega$ und daher nach (27)

$$(35) \qquad \alpha V_\beta^\omega = \alpha V I \quad \text{für} \quad \beta = 2, 3, \ldots, \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Demnach ist auch

$$(36) \qquad \alpha V_\beta I I' = \alpha V I I' \quad \text{für} \quad \beta = 2, 3, \ldots, \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Nach Satz 6 ist somit $\vartheta V I \ldots I^{(n)} = \vartheta V_\beta I \ldots I^{(n)}$ für $n = 1, 2, \ldots$ und $\vartheta \in [\alpha^{(0)}, P)$. Nach II, Satz 5 und 10 gelangt man daher niemals aus dem Bereich $[1, \vartheta V I \ldots I^{(n)})$ heraus, wenn man Figuren $\mathfrak{F}^{*(n+1)}$ bildet, welche durch die Substitution $V \to V_\beta$ aus solchen Figuren $\mathfrak{F}^{(n+1)}$ (s. II, § 6, **1**) hervorgehen, deren Zahlenvariable Zahlen $< \vartheta V I \ldots I^{(n)}$ bedeuten und deren Kernvariable insbesondere Zahlen aus $\{\vartheta V^\nu\}_{\nu < \vartheta V I \ldots I^{(n)}}$ darstellen.

Analoge Ergebnisse lassen sich hinsichtlich der durch (24) erklärten Iteratoren I_β, I'_β, I''_β gewinnen; vgl. § 7, **3**, Schlußbemerkung.

4. Man kann die durch (23) definierten Operatoren V_β, $J_{0\beta}$, $J_{n\beta}$ auch mittels gewisser Iteratoren $\bar{I}_\beta^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ darstellen:

$$(37) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha V_{\beta+1} = \alpha V \bar{I}_\beta (\bar{I}_\beta^{(0)} = \bar{I}_\beta); \quad \alpha V J_{0,\beta+1} = \alpha V J \bar{I}_\beta; \\ \alpha V J \ldots J_{n-1} J_{n,\beta+1} = \alpha V J \ldots J_{n-1} J_n \bar{I}_\beta^{(n+1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{array} \right\} \beta = 1, 2, \ldots.$$

$\bar{I}_\beta^{(n)}$ ist offenbar ein monotoner Iterator $(n+1)$. Stufe. — Ebenso kann man den durch (25) gegebenen Operator $\overline{V}$ für $\alpha > 1$ mittels eines monotonen Iterators I_0 von erster Stufe repräsentieren in der Form

$$(38) \qquad \alpha \overline{V} = \alpha V I_0 = \alpha V^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{00}, P), \qquad \alpha^{00} = \max(\alpha^{(0)}, 2).$$

Hinsichtlich I_0 wollen wir einige Formeln herleiten. (27) und (28) schreiben sich jetzt so:

$$(39) \qquad \alpha (V I_0)^\omega = \alpha V I \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{00}, P)$$

$$(40) \qquad \alpha (V I_0) I = \alpha V I^2 \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{00}, P), \qquad \alpha \geq \omega.$$

Zunächst zeigen wir

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (1) & \alpha(VI_0^\nu)I=\alpha VI^{\nu+1} \qquad (\nu\geq 1)\\ (2) & \alpha VI_0^\lambda=\alpha VI^\lambda \qquad (\lambda \text{ Limeszahl})\end{array}\right\}\ \alpha\geq\omega.$$

Beweis. Angenommen, (41) sei richtig für alle $\nu<\xi$, $\lambda<\xi$ [für $\xi=2$ wegen (40) zutreffend]. Ist ξ eine Limeszahl der Form $\omega^2\sigma=\omega(\omega\,\sigma)$, so kann man eine Fundamentalfolge $\xi_\tau\to\xi$ angeben, die aus lauter Limeszahlen besteht. Folglich ist $\alpha VI_0^\xi=\lim\limits_\tau \alpha VI_0^{\xi_\tau}=\lim\limits_\tau \alpha VI^{\xi_\tau}=\alpha VI^\xi$. — Sei nun ξ eine Limeszahl der Form $\sigma+\omega$, $\sigma=0$ oder σ Limeszahl. Es wird nach (39), d.h. wegen $(VI_0)^\omega=VI$ in $[\alpha^{00},P)$, für $n\geq 1$: $\alpha VI_0^{\sigma+n+1}=\alpha(VI_0^{\sigma+n})I_0=\alpha(VI_0^{\sigma+n})^\alpha\geq \alpha(VI_0^{\sigma+n})^\omega=\alpha\big((VI_0^{\sigma+n-1})I_0\big)^\omega=\alpha(VI_0^{\sigma+n-1})I=\alpha VI^{\sigma+n}$ (Induktionsvoraussetzung!), mithin $\alpha VI_0^{\sigma+n+1}\geq\alpha VI^{\sigma+n}$, folglich $\alpha VI_0^\xi=\alpha VI_0^{\sigma+\omega}\geq\alpha VI^\xi$. Andererseits ist $\alpha VI_0^\xi\leq\alpha VI^\xi$ wegen $I_0<I$ (s. die letzte Relation im vorletzten Absatz von § 7, **1**). Also ist wieder $\alpha VI_0^\xi=\alpha VI^\xi$. — Ist endlich $\xi=\eta+1$, so kommt vermöge (40), angewandt auf VI_0^η statt V: $\alpha(VI_0^\xi)I=\alpha(VI_0^{\eta+1})I=\alpha\big((VI_0^\eta)I_0\big)I=\alpha(VI_0^\eta)I^2=\alpha\big((VI_0^\eta)I\big)I=\alpha(VI^{\eta+1})I=\alpha VI^{\xi+1}$ (Induktionsvoraussetzung!). — Nebenbei haben wir gefunden:

$$(42)\qquad \alpha(VI_0^{\nu+1})^\omega=\alpha VI^{\nu+1} \quad \text{für} \quad \alpha\geq\omega,\ \nu\geq 0.$$

Aus (41, 2) schließt man:

$$(43)\qquad \alpha VI_0I'=\alpha VII' \quad \text{für} \quad \alpha\geq\omega.$$

Da nämlich $\alpha VI_0I'$ eine Limeszahl, so wird $\alpha VI_0I'=\alpha VI_0^{\alpha VI_0I'}=\alpha VI^{\alpha VI_0I'}$, daher $\alpha VI_0I'\geq\alpha VII'$; ebenso folgt $\alpha VII'\geq\alpha VI_0I'$.

Die Relationen (40) bis (43) sind eine Folge von (39) in Verbindung mit $VI_0\geq\cdot 2$ [man beachte die Herleitung von (28) aus (27)] und dem Umstand, daß I_0 ein monotoner Iterator erster Stufe $<I$ ist; sie gelten also für alle Iteratoren erster Stufe J mit den genannten Eigenschaften von I_0, insbesondere für $J=\bar I_\rho$ ($\rho=1,2,\ldots$), wie aus $I_0<\bar I_\rho$ und (35), (37) folgt, desgleichen für $J=I_0^+$, wenn $\alpha VI_0^+=\alpha V^{\alpha+1}=(\alpha VI_0)V$ gesetzt wird (denn $I_0<I_0^+\leq\bar I_1$).

Für unsere weiteren Schlüsse wollen wir nur (43) zugrunde legen. Wir nehmen daher jetzt an, J sei ein monotoner Iterator erster Stufe $\leq I$ im Bereich $[\alpha^{00},P)$, $\alpha^{00}\geq\alpha^{(0)}$, und V ein beliebiger Operator erster Stufe im selben Bereich (was natürlich für alle V in $[\alpha^{(0)},P)$ zutrifft), und es gelte

$$(44)\qquad \alpha VJI'=\alpha VII' \quad \text{für} \quad \alpha\geq\omega,\quad \alpha\in[\alpha^{00},P),\quad V \text{ in } [\alpha^{00},P).$$

Ein solches J ist nach dem vorstehenden I_0 mit $\alpha^{00}=\max(2,\alpha^{(0)})$, ebenso $\bar I_\rho$ ($\rho=1,2,\ldots$) und I_0^+ ($\alpha VI_0^+=\alpha V^{\alpha+1}$), beide mit $\alpha^{00}=\alpha^{(0)}$. — Wenn $\alpha^{00}\geq\omega$, so besagt (44), daß $JI'=II'$ ist. Im Fall $\alpha^{00}<\omega$ gilt wegen $J\leq I$ für $\alpha\in[\alpha^{00},\omega)$: $\alpha VJI'\leq\alpha VII'$. Wir haben also nur die Möglichkeiten $\alpha VJI'=\alpha VII'$ und

$\alpha V J I' < \alpha V I I'$, wenn ein Paar α, V in $[\alpha^{00}, P)$ gegeben ist. — Zunächst wird

$$(45_1) \qquad \alpha(V J I')^\nu = \alpha(V I I')^\nu \quad \text{für} \quad \nu \geq 0 \quad \text{und} \quad \alpha V J I' = \alpha V I I',$$

$$(45_2) \qquad \alpha(V J I')^{1+\nu} = \alpha(V I I')^\nu \quad \text{für} \quad \nu \geq 1 \quad \text{und} \quad \alpha V J I' < \alpha V I I', \quad \text{also}$$

$$(45_3) \qquad \alpha(V J I')^\nu = \alpha(V I I')^\nu \quad \text{für} \quad \nu \geq \omega, \ \alpha \in [\alpha^{00}, P).$$

Beweis. (45_1) folgt induktiv aus (44). indem man dort α durch $\alpha V J I' = \alpha V I I'$, $\alpha(V J I')^2 = \alpha(V I I')^2, \ldots, \alpha(V J I')^\omega = \alpha(V I I')^\omega, \ldots$ ersetzt. — (45_2) folgt so. Die Sätze 7 und 10 in **II** liefern:

$$(46) \qquad (\alpha V J I') V I I' = \alpha V I I' \quad \text{für} \quad \alpha V J I' < \alpha V I I'.$$

Aus (44) entnimmt man bei Ersetzung von α durch $\alpha V J I'$:

$$(47) \qquad (\alpha V J I') V J I' = (\alpha V J I') V I I' \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{00}, P).$$

(46) und (47) zusammen ergeben

$$(48) \qquad \alpha(V J I')^2 = \alpha V I I' \quad \text{für} \quad \alpha V J I' < \alpha V I I'.$$

Aus (48) findet man jetzt (45_2) vermöge (44) durch eine analoge Schlußweise, wie sie vorhin angewendet wurde.

Nun zeigen wir, daß

$$(49) \qquad \alpha V(J I')^2 = \alpha V(I I')^2 \quad \text{für alle } \alpha \text{ und } V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$$

Beweis. (44) liefert mit $V J I'$ und $\alpha V J I'$ an Stelle von V und α:

$$(50) \qquad (\alpha V J I')(V J I') J I' = (\alpha V J I')(V J I') I I'.$$

1. Fall: $\alpha V J I' = \alpha V I I'$. Wir ersetzen in (45_1) α durch $\alpha V J I' = \alpha V I I'$ und erhalten vermöge Satz 5:

$$(\alpha V J I')(V J I') I I' = (\alpha V I I')(V I I') I I'.$$

Diese Relation liefert zusammen mit (50):

$$(\alpha V J I')(V J I') J I' = (\alpha V I I')(V I I') I I'.$$

Hieraus erhält man durch geeignete Anwendung von (9): $\alpha(V J I') J I' = \alpha(V I I') I I'$, also (49).

2. Fall: $\alpha V J I' < \alpha V I I'$. Dann gilt (46); wir wenden Satz 3 an, indem wir $\alpha V J I'$ mit β und $V I I'$ mit V identifizieren. Das liefert $(\alpha V J I')(V I I') I I' = \alpha(V I I') I I'$, also

$$(\alpha V J I') V(I I')^2 = \alpha V(I I')^2.$$

Indem wir in (45_1) α durch $\alpha V J I' \geq \omega$ ersetzen und Satz 5 anwenden, erhalten wir

$$(\alpha V J I')(V J I') I I' = (\alpha V J I')(V I I') I I' = (\alpha V J I') V(I I')^2.$$

Die beiden letzten Relationen liefern zusammen mit (50):

$$(\alpha V J I')(V J I') J I' = \alpha V(I I')^2.$$

Durch geeignete Anwendung von (9) folgt:

$$(\alpha V J I')(V J I') J I' = \alpha(V J I') J I' = \alpha V (J I')^2.$$

Damit ist (49) auch im zweiten Fall bestätigt.

(49) besagt, daß $(J I')^2 = (I I')^2$ ist. Daher hat man

$$\alpha V (J I')^{2\nu} = \alpha V (I I')^{2\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geq 1, \ \alpha \text{ und } V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$$

Diese Relation drückt die Gleichheit $V(J I')^{2\nu} = V(I I')^{2\nu}$ aus. Daraus findet man durch entsprechende Anwendung von (9) und (44) die Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha V (J I')^{2\nu+1} &= \alpha (V (J I')^{2\nu}) J I' = \alpha (V (I I')^{2\nu}) J I' = (\alpha V (I I')^{2\nu}) (V (I I')^{2\nu}) J I' \\ &= (\alpha V (I I')^{2\nu}) (V (I I')^{2\nu}) I I' = \alpha (V (I I')^{2\nu}) I I' = \alpha V (I I')^{2\nu+1}. \end{aligned}$$

Damit hat sich ergeben:

(51) $\quad \alpha V (J I')^{\nu} = \alpha V (I I')^{\nu}$ für $\nu \geq 2$ und alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Von (51) aus erhält man auf ähnliche Weise wie seinerzeit (33) von (32, 2) aus:

(52) $\quad \alpha V J I'^2 = \alpha V I I'^2$ für alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Diese Gleichung kann man übrigens auch direkt aus (49) mittels (8) gewinnen. Da nach (52) $J I'^2 = I I'^2$, so findet man induktiv

(53) $\quad \alpha V J I'^{\nu} = \alpha V I I'^{\nu}$ für $\nu \geq 2$ und alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Aus (53) endlich erhält man analog wie (52) aus (51):

(54) $\quad \alpha V J I' I'' = \alpha V I I' I''$ für alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Auf Grund eines leicht zu beweisenden Analogons zu Satz 6 kann man aus (54) schließen, daß im Bereich $[\alpha^{00}, P)$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', I'', \ldots$, in welcher I vorkommt, und zwar stets als erstes Zeichen einer Kette $I(\ldots(I'(\ldots(I''$, ihren Zahlenwert behält, wenn man in ihr I durch J ersetzt. — Man kommt also mit dem „schwachen" I_0 oder I_0^+ $(\alpha V I_0^+ = \alpha V^{\alpha+1})$ genau so weit wie mit I, und zwar, wie (49) zeigt, schon „am Anfang" des Algorithmus der $I', I'', \ldots$.

Die Betrachtungen dieser Ziffer lassen sich in ähnlicher Weise für solche Operatoren höherer als zweiter Stufe durchführen, die analog wie I_0 erklärt sind.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Oktober 1953.)

SCHÖNEBORN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 17—30 (1954)

Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. II.

Von
HEINZ SCHÖNEBORN.

Im Anschluß an die im ersten Teil dieser Arbeit[1]) durchgeführten Untersuchungen soll hier die Charakterentheorie der Abelschen torsionstopologischen Gruppen entwickelt werden, welche den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen als „natürlichen Operatorenbereich" besitzen (vgl. S. Nr. 3), d.h. also primär und zyklovollständig im Sinne von S. Nr. 4 sind. Soweit nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, sollen im folgenden unter „Gruppen" stets Gruppen der obengenannten Art, unter „Untergruppen" stets abgeschlossene $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppen verstanden sein. Im übrigen wird die Terminologie und Bezeichnungsweise des ersten Teiles der Arbeit übernommen.

1. Wir betrachten zunächst die kompakten Untermengen der Gruppe A und beweisen

Satz 1. a) Besitzt die Gruppe A ein kompaktes (topologisches) Erzeugendensystem $\{a_\alpha\}$, dann ist die Restklassengruppe A/A_α für jede charakteristische Untergruppe $A_\alpha \subseteqq A$ endlich. Ist A außerdem vollständig, so kompakt.

b) Eine Gruppe A mit kompaktem Erzeugendensystem enthält nur Elemente $(\neq 0)$ von endlicher Höhe.

c) Eine höhenendliche K-topologische Gruppe A ist kompakt.

d) Eine höhenendliche S-topologische Gruppe A ist genau dann kompakt, wenn A endlichrangig ist[2])

Beweis. a) $\hat{A}$ sei die vollständige Hülle von A, dann ist $\{a_\alpha\}$ ein topologisches Erzeugendensystem von $\hat{A}$. Ist $\hat{A}_\alpha$ die aus der charakteristischen Untergruppe $A_\alpha \subseteqq A$ durch Abschließung hervorgehende charakteristische Untergruppe von $\hat{A}$, dann ist $\bar{\bar{A}} = \hat{A}/\hat{A}_\alpha$ diskret und eine Torsionsgruppe, denn jede Restklasse von $\hat{A}_\alpha$ in $\hat{A}$ enthält ein Element aus A und dieses ist von endlicher Ordnung mod A_α, erst recht also mod $\hat{A}_\alpha$. Die den $a_\alpha \in \hat{A}$ entsprechenden Elemente $\bar{a}_\alpha \in \bar{\bar{A}}$ bilden andererseits ein kompaktes, wegen der Diskretheit von $\bar{\bar{A}}$ also endliches Erzeugendensystem von $\bar{\bar{A}}$ und da $\bar{\bar{A}}$ eine

[1]) SCHÖNEBORN, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I. Math. Z. **59**, 455—483 (1954). Im folgenden kurz mit „S." zitiert.

[2]) Jede S-topologische Gruppe A mit kompaktem Erzeugendensystem und mit dem natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ ist sogar kompakt, denn anderenfalls wäre sie von unendlichem Rang und die im Beweis von Satz 1 b) ausgeführte Konstruktion liefert die Existenz einer charakteristischen Untergruppe von A von unendlichem Index — im Widerspruch zu Satz 1 a). — Darüberhinaus sieht man übrigens leicht, daß A sogar vollständig ist.

Torsionsgruppe ist, ist $\bar{\hat{A}}$ endlich. Aus der gruppentheoretischen Beziehung $A/A_\alpha = A/(\hat{A}_\alpha \cap A) = (A + \hat{A}_\alpha)/\hat{A}_\alpha \subseteq \hat{A}/\hat{A}_\alpha = \bar{\hat{A}}$ folgt dann die Endlichkeit von A/A_α. Die letzte Behauptung von a) ist jetzt trivial. b) $\hat{A}$ sei wieder die vollständige Hülle von A, $a \neq 0$ ein Element von unendlicher Höhe aus $\hat{A}$. Ferner sei $\hat{A}_\alpha$ eine charakteristische Untergruppe von $\hat{A}$ mit $a \notin \hat{A}_\alpha$. Dann ist in $\hat{A}/\hat{A}_\alpha$ die a enthaltende Restklasse $\bar{a} \neq \bar{0}$ von unendlicher Höhe, also $\hat{A}/\hat{A}_\alpha$ sicher nicht endlich und $\hat{A}$ nicht kompakt — im Widerspruch zu a). c) Sei A_α eine charakteristische Untergruppe von A. Dann ist A/A_α höhenendlich[3]) und endlichrangig, also endlich und somit A kompakt. d) Ist A endlichrangig, so fallen K- und S-Topologie zusammen und die eine Hälfte von d) folgt aus dem schon Bewiesenen. Ist A von unendlichem Rang, so gibt es eine einrangig direkt zerlegbare Untergruppe $A_0 = \sum \oplus Y_\alpha \subseteq A$ mit unendlich vielen einrangigen Summanden Y_α[4]). Ist Y'_α eine echte charakteristische Untergruppe von Y_α, so ist $A'_0 = \sum \oplus Y'_\alpha \subset A_0$ eine echte charakteristische Untergruppe von A_0 (vgl. S. Nr. 1) und A_0/A'_0 ist unendlich, also A_0 und damit A nicht kompakt. —

Mit Z werde im folgenden stets die (diskrete) Restklassengruppe $\mathfrak{R}_p^+/\mathfrak{R}_p^+$ bezeichnet, wo $\mathfrak{R}_p^+$ bzw. $\mathfrak{R}_p^+$ die Additionsgruppe der p-adischen Zahlen bzw. der ganzen p-adischen Zahlen bedeutet. Wir notieren einige für das folgende wichtige Eigenschaften von Z:

A. *Sind zwei Untergruppen Z_1, Z_2 von Z isomorph, so sind sie identisch, d.h. sie bestehen aus den gleichen Elementen von Z.*

Denn Z_1 und Z_2 sind von gleicher Ordnung. Ist diese ∞, so ist $Z_1 = Z_2 = Z$. Ist sie endlich, etwa p^n, so folgt $Z_1 = Z_2$ aus der Tatsache, daß Z zu jeder Ordnung p^n nur *eine* Untergruppe dieser Ordnung enthält.

B. *Ist Z' eine Untergruppe von Z, φ ein Endomorphismus von Z' auf eine Untergruppe $Z'' \subseteq Z'$, so gibt es eine (nicht notwendig eindeutig bestimmte) ganz p-adische Zahl $\varrho \in \mathfrak{R}_p$, so daß $\varrho \cdot Z' = \varphi(Z')$, wo $\varrho \cdot Z'$ natürlich als Abbildung von Z' aufzufassen ist. Ist φ ein Automorphismus, so ϱ eine Einheit in $\mathfrak{R}_p$.*

Denn ist Z' und damit Z'' eine echte Untergruppe von Z, also von endlicher Ordnung, $z' \in Z'$ ein erzeugendes Element von Z', $z'' = \varphi(z')$ also ein erzeugendes

[3]) Derselbe Beweis wie bei KRULL, W.: Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. J. f. Math. **184**, 35 (1942) unten: A sei linear kompakt. Enthält A/A_α ein Element $\neq 0$ von unendlicher Höhe, so können wir zunächst o.B.d.A. voraussetzen, daß A/A_α einrangig vom Typus $\mathfrak{R}_p^+/\mathfrak{R}_p^+$ ist und also ein Erzeugendensystem $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots$ mit den Relationen $p \cdot \bar{a}'_{i+} = \bar{a}'_i$ besitzt. Sei a'_i ein A-Element aus $\bar{a}'_i$, $a_i = p^{i-1} \cdot a'_i$, $B_i = (p^{i-1} \cdot A) \cap A_\alpha$, $\bar{a}_i$ die a_i enthaltende Nebenschar mod B_i. $p^{i-1} \cdot A$ und damit B_i ist — wie leicht zu sehen — eine abgeschlossene Untergruppe von A und die Nebenscharen $\bar{a}_i$ bilden eine Filterbasis, wie sofort aus $a_i - a_{i+1} = p^{i-1} \cdot a'_i - p^i a'_{i+1} = p^{i-1} \cdot (a'_i - p\, a'_{i+1}) \in (p^{i-1} \cdot A) \cap A_\alpha$ folgt. Wegen der linearen Kompaktheit gibt es dann mindestens ein $a \in A$, welches in allen $\bar{a}_i$ liegt und aus $a_i = p^{i-1} a'_i \equiv a\,(p^{i-1} \cdot A)$ folgt, daß $a \neq 0$ von unendlicher Höhe in A ist.

[4]) Folgt sofort durch Übertragung der für gewöhnliche Abelsche Gruppen zu dem gleichen Resultat führenden Betrachtungen auf den Fall p-adischer Operatorgruppen. Vgl. SZELE, T.: Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen. J. f. Math. **188**, 184 (1950).

Element von Z'', dann gibt es sicher ein $\varrho \in \mathfrak{R}_p$ mit $z'' = \varrho \cdot z'$ und es muß $\varphi(Z') = \varrho \cdot Z'$ sein. Ist aber Z' von unendlicher Ordnung, so ist $Z' = Z$ und damit auch $Z'' = Z$ und φ ist ein Endomorphismus von Z auf sich. $Z' = Z$ besitzt ein abzählbares Erzeugendensystem $z_1', z_2', \ldots$ mit den Relationen $p \cdot z_{i+1}' = z_i'$ wo z_i' von der Ordnung p^i ist. Ist $z_i'' = \varphi(z_i')$, dann gibt es ein $\varrho_i \in \mathfrak{R}_p$ mit $\varrho_i \cdot z_i' = z_i''$ und es gilt $p \cdot \varrho_{i+1} \cdot z_{i+1}' = p \cdot \varphi(z_{i+1}') = \varphi(z_i') = \varrho_i \cdot z_i'$, also $\varrho_{i+1} \equiv \varrho_i (p^i)$, d.h. die Folge der ϱ_i konvergiert gegen einen p-adischen Limes ϱ und es ist $\varrho \equiv \varrho_i (p^i)$, $z_i'' = \varrho_i \cdot z_i' = \varrho \cdot z_i'$, $Z'' = \varphi(Z') = \varrho \cdot Z'$. Der letzte Teil der Behauptung ist fast trivial.

Aus B. folgt nun sofort:

C. *Jeder Endomorphismus φ einer Untergruppe $Z' \subseteq Z$ läßt sich zu einem Endomorphismus von Z fortsetzen.*

Denn ist $\varphi'(Z') = \varrho \cdot Z'$, so hat die durch $\varphi(Z) = \varrho \cdot Z$ definierte Abbildung φ offenbar die gewünschte Eigenschaft.

2. Unter einem „*Charakter*" c der Gruppe A verstehen wir einen topologischen (d.h. stetigen und offenen) Homomorphismus von A in Z.

Jeder Charakter c von A besitzt als „*Kern*" eine charakteristische Untergruppe $A_\alpha = A^{(c)}$ mit einrangiger Restklassengruppe $A/A^{(c)}$ und umgekehrt gehören zu jeder derartigen Untergruppe von A gewisse Charaktere mit dieser Untergruppe als Kern. —

Zwischen den Charakteren von A wird in üblicher Weise eine Addition und eine Operatormultiplikation definiert[5]) und es ist klar, daß die Menge aller Charaktere von A damit zu einer gewöhnlichen Operatorgruppe $\mathring{C}[A]$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ wird. Wir betrachten $\mathring{C}[A]$ zunächst ohne Rücksicht auf die üblicherweise in der „Charakterengruppe" definierte Topologie und deuten dies durch das Symbol ° über dem C an.

Wir stellen einige später benötigte Sätze über $\mathring{C}[A]$ zusammen:

a) *Zu jedem Element $a \neq 0$ aus A gibt es einen Charakter $c \in \mathring{C}[A]$ mit $c(a) \neq 0$.*

Denn es gibt eine charakteristische Untergruppe $A_\alpha \subseteq A$ mit $a \notin A_\alpha$. Also gibt es nach bekannten Schlüssen auch eine große[6]) charakteristische Untergruppe $A_{\alpha'} \supseteq A_\alpha$ mit $a \notin A_{\alpha'}$. Wegen der einrangig direkten Zerlegbarkeit von A/A_α gibt es dann aber sogar eine große charakteristische Untergruppe $A^{(c)} \supseteq A_{\alpha'}$, mit $a \notin A^{(c)}$ und einrangiger Restklassengruppe $A/A^{(c)}$. Jeder zu $A^{(c)}$ gehörige Charakter c besitzt dann die gewünschte Eigenschaft.

b) *Ist B eine Untergruppe von A, c_B ein Charakter von B, so gibt es einen c_B induzierenden Charakter $c \in \mathring{C}[A]$. Umgekehrt induziert jeder Charakter c von A einen Charakter c_B von $B \subseteq A$.*

$B_\alpha = B^{(c_B)}$ sei die zu c_B gehörende charakteristische Untergruppe von B. Dann gibt es eine charakteristische Untergruppe $A_\alpha \subseteq A$ mit $A_\alpha \cap B = B_\alpha$.

[5]) $(c_1 + c_2)(a) = c_1(a) + c_2(a)$; $(\varrho \cdot c)(a) = \varrho \cdot c(a) = c(\varrho \cdot a)$ $(c_1, c_2, c \in \mathring{C}[A]$; $a \in A$; $\varrho \in \mathfrak{R}_p)$.

[6]) Eine „große" Untergruppe B der Gruppe A ist charakterisiert durch die Eigenschaft, daß A/B eine endlichrangige Torsionsgruppe ist — vgl. S. Nr. 8.

Die diskrete Gruppe A/A_α enthält eine die Restklassen von $(B+A_\alpha)/A_\alpha$ enthaltende einrangige Gruppe und man sieht wieder leicht die Existenz einer charakteristischen Untergruppe $A^{(c)} \geqq A_\alpha$ mit einrangiger Restklassengruppe $A/A^{(c)}$ und $A^{(c)} \cap B = B_\alpha$ [7]). Ist c' ein Charakter mit dem Kern $A^{(c)}$, so bildet c' die Gruppe $B \leqq A$ auf dieselbe Untergruppe $Z' \leqq Z$ ab wie c_B, d.h. der von c' in B induzierte Charakter c'_B und c_B unterscheiden sich um einen Automorphismus φ' von Z': $c_B(B) = \varphi'(c'_B(B))$. Ist φ ein gemäß Nr. 1 C. φ' induzierender Automorphismus von Z und setzen wir $c(A) = \varphi(c'(A))$, so ist c ein Charakter von A mit $c(B) = c_B(B)$. Die Umkehrung ist klar.

c) *Ist B eine Untergruppe von A, $\bar{A} = A/B$ und $\bar{c}$ ein Charakter von $\bar{A}$, so gibt es einen $\bar{c}$ induzierenden Charakter c von A mit $c(B) = 0$. Umgekehrt induziert jeder Charakter c von A mit $c(B) = 0$ einen Charakter $\bar{c}$ von $\bar{A}$.*

Den $\bar{c}$ induzierenden Charakter c von A erhält man einfach durch Zusammensetzen der Abbildung $\bar{c}$ mit dem natürlichen Homomorphismus von A auf $\bar{A}$. — Die Umkehrung ist ebenso einfach.

d) *Sei B eine Untergruppe von A, $\mathring{C}_B[A]$ die Menge aller Charaktere c aus $\mathring{C}[A]$ mit $c(B) = 0$. Dann ist $\mathring{C}[B]$ (Operator-) isomorph zu $\mathring{C}[A]/\mathring{C}_B[A]$ und $\mathring{C}_B[A]$ ist (Operator-) isomorph zu $\mathring{C}[A/B]$.*

Denn jeder Charakter $c \in \mathring{C}[A]$ induziert einen Charakter $c_B \in \mathring{C}[B]$ und nach b) erhält man so auch alle Charaktere c_B. Zwei Charaktere c und c' aus $\mathring{C}[A]$ induzieren genau dann den gleichen Charakter c_B von B, wenn sie kongruent mod $\mathring{C}_B[A]$ sind. Die Isomorphie von $\mathring{C}[B]$ und $\mathring{C}[A]/\mathring{C}_B[A]$ ist jetzt trivial. — Jeder Charakter $c \in \mathring{C}_B[A]$ induziert einen Charakter $\bar{c} \in C[A/B]$ und umgekehrt. Zu verschiedenen Charakteren $\bar{c}$ gehören verschiedene Charaktere c. Seien umgekehrt c, c' verschiedene A-Charaktere mit $c(B) = c'(B) = 0$. Dann sind ersichtlich auch die zugeordneten Charaktere $\bar{c}$, $\bar{c}'$ verschieden und die Zuordnung der Charaktere $c \in \mathring{C}_B[A]$ zu den von ihnen induzierten Charakteren $\bar{c} \in \mathring{C}[A/B]$ ist ein Isomorphismus. — Wir werden die Gruppe $\mathring{C}_B[A]$ aller die Untergruppe B von A „annullierenden" Charaktere in Zukunft als den „*Annullator*" von B (in $\mathring{C}[A]$) bezeichnen.

e) *Sei $\mathring{C}'$ eine Untergruppe von $\mathring{C}[A]$, $c'_1, \ldots, c'_n$ seien endlich viele Elemente aus $\mathring{C}'$, $A^{(c'_i)}$ die zu c'_i als Kern gehörige charakteristische Untergruppe von A. Ist dann c'' ein weiterer Charakter von A mit dem Kern $A^{(c'')}$ und ist $\bigcap A^{(c'_i)} \leqq A^{(c'')}$, so folgt $c'' \in \mathring{C}'$.*

---

[7]) Es ist die Existenz einer Untergruppe $\bar{A}^{(c)}$ der diskreten Gruppe $\bar{A} = A/A_\alpha$ mit einrangiger Restklassengruppe $\bar{A}/\bar{A}^{(c)}$ und $\bar{A}^{(c)} \cap \bar{B} = \bar{0}$, wo $\bar{B} = (B + A_\alpha)/A_\alpha$ nachzuweisen. Da $\bar{B}$ eine einrangige Torsionsgruppe ist, enthält $\bar{B}$ genau eine (zyklische) Untergruppe $\bar{B}_0$ der Ordnung p. Ist $\bar{a}_0$ irgendein erzeugendes Element von $\bar{B}_0$, dann gibt es sicher eine Untergruppe $\bar{A}^{(c)} \leqq \bar{A}$ mit einrangiger Restklassengruppe $\bar{A}/\bar{A}^{(c)}$ und $\bar{a}_0 \notin \bar{A}^{(c)}$. Dann ist $\bar{B}_0 \cap \bar{A}^{(c)} = \bar{0}$ und erst recht $\bar{B} \cap \bar{A}^{(c)} = \bar{0}$.

Sei nämlich $\bar{A} = A/\bigcap A^{(c_i')}$. Den Charakteren $c_1', \ldots, c_n', c''$ von A entsprechen dann eineindeutig gewisse Charaktere $\bar{c}_1', \ldots, \bar{c}_n', \bar{c}''$ von $\bar{A}$ [siehe c) und d)]. Ist $(\bar{c}_1', \ldots, \bar{c}_n')$ die von den $\bar{c}_i'$ erzeugte Untergruppe von $\mathring{C}[\bar{A}]$, dann ist die von $(\bar{c}_1', \ldots, c_n')$ annullierte Untergruppe von $\bar{A}$ die Nullgruppe und da $\bar{A}$ diskret ist, folgt aus der Dualitätstheorie der diskreten Gruppen, daß $(\bar{c}_1', \ldots, \bar{c}_n')$ die volle Charakterengruppe von $\bar{A}$ ist. Mithin ist $\bar{c}'' \in (\bar{c}_1', \ldots, c_n')$ und hieraus folgt sofort $c'' \in (c_1', \ldots, c_n') \subseteq \mathring{C}'$.

Aus e) ergibt sich sofort eine wichtige Folgerung:

f) *Ist $\mathring{C}'$ eine Untergruppe von $\mathring{C}[A]$ und durchläuft $A^{(c')}$ alle zu den $c' \in \mathring{C}'$ gehörigen charakteristischen Untergruppen von A, ist schließlich $\mathfrak{S}'$ der von den $A^{(c')}$ erzeugte Filter, so ist eine Gruppe $A_{\alpha'}$ aus $\mathfrak{S}'$ dann und nur dann ein $A^{(c')}$, wenn $A/A_{\alpha'}$ einrangig ist und die $A^{(c')}$ bilden ein durch $\mathfrak{S}'$ bereits eindeutig bestimmtes Erzeugendensystem von $\mathfrak{S}'$. Ist $\mathring{C}''$ eine echte Untergruppe von $\mathring{C}'$, so ist der zu $\mathring{C}''$ gehörige Filter $\mathfrak{S}''$ ein echter Teilfilter von $\mathfrak{S}'$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{S}'$ bildet eine abgeschlossene Untergruppe A' von A, die genau aus den Elementen a' mit $c'(A') = 0$ für alle $c' \in \mathring{C}'$ besteht.*

Sei $A_{\alpha'} \in \mathfrak{S}'$. Soll $A_{\alpha'}$ ein $A^{(c')}$ sein, so muß natürlich $A/A_{\alpha'}$ einrangig sein. Sei umgekehrt $A/A_{\alpha'}$ einrangig ($A_{\alpha'} \in \mathfrak{S}'$). Dann gibt es einen Charakter c'' von A mit $A^{(c'')} = A_{\alpha'}$. Da $A^{(c'')} \in \mathfrak{S}'$, gibt es endlich viele $A^{(c')}$, etwa $A^{(c_1')}, \ldots, A^{(c_n')} (c_i' \in \mathring{C}')$ mit $\bigcap A^{(c_i')} \subseteq A^{(c'')}$ und hieraus folgt nach e) $c'' \in \mathring{C}'$. Der Rest der Behauptung ergibt sich jetzt fast unmittelbar.

Aus der letzten Bemerkung unter f) folgt sofort:

Ist $\mathring{C}'$ eine Untergruppe von $\mathring{C}[A]$ und $A^{(\mathring{C}')}$ die Menge aller $a' \in A$ mit $c'(a') = 0$ für alle $c' \in \mathring{C}'$, dann ist $A^{(\mathring{C}')}$ eine abgeschlossene Untergruppe von A. Wir bezeichnen $A^{(\mathring{C}')}$ als *„die von $\mathring{C}'$ annullierte Untergruppe von A"*.

g) *Ist $\mathring{C}[A]$ eine Torsionsgruppe, so A höhenendlich. Besitzt A ein kompaktes Erzeugendensystem, so ist $\mathring{C}[A]$ eine Torsionsgruppe.*

Sei nämlich $\mathring{C}[A]$ eine Torsionsgruppe, $c \in \mathring{C}[A]$. Dann ist für geeignetes p^n: $p^n \cdot c = 0$, d.h. $(p^n \cdot c)(a) = p^n(c(a)) = 0$ für jedes $a \in A$, wo n nicht von a abhängt. Sei a von unendlicher Höhe in A, a' Lösung der Gleichung $p^n \cdot x = a$ in A. Dann ist $c(a) = c(p^n \cdot a') = 0$ und wegen a) folgt hieraus $a = 0$. — Besitze nun A ein kompaktes Erzeugendensystem und $\mathring{C}[A]$ enthalte ein Element c von unendlicher Ordnung. Dann gibt es zu jedem p^n ein $a_n \in A$ mit $p^n \cdot c(a_n) = c(p^n \cdot a_n) \neq 0$. Hieraus folgt, daß die Bildgruppe $c(A)$ von A die ganze Gruppe Z sein muß und wenn $A^{(c)}$ die zu c gehörige charakteristische Untergruppe aus A ist, gilt $A/A^{(c)} = Z$ — im Widerspruch zu Satz 1 a).

3. Wir gehen nun von der gewöhnlichen p-adischen Operatorgruppe $\mathring{C}[A]$ zur *„Charakterengruppe"* $C[A]$ im üblichen Sinne über, indem wir $\mathring{C}[A]$ in der folgenden Weise durch Auszeichnung einer charakteristischen Basis $\mathfrak{B}$ (siehe S. Nr. 1) topologisieren:

Die Untergruppe $\mathring{C}_B \subseteqq \mathring{C}[A]$ gehöre genau dann zu $\mathfrak{B}$, wenn $\mathring{C}_B$ Annullator einer Untergruppe $B \subseteqq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem ist[8]).

Fast unmittelbar aus der Definition von $C[A]$ folgt jetzt:

Ist B eine Untergruppe von A, $C_B \subseteqq C[A]$ der Annullator von B, dann ist C_B eine abgeschlossene Untergruppe von $C[A]$.

Denn $c \in C[A]$ gehört dann und nur dann zu C_B, wenn c alle zyklischen Hüllen (b) $(b \in B)$ aus B annulliert, d.h. C_B ist Durchschnitt aller $C_\beta \subseteqq C[A]$ wo C_β der Annullator von (b) $(b \in B)$ ist. Aber (b) ist offenbar kompakt, C_β also eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$ und also $C_B = \bigcap C_\beta$ abgeschlossen.

Satz 2. Ist A eine primäre (zur Primzahl p gehörige) Gruppe, so auch $C[A]$. Ist A K-topologisch bzw. S-topologisch, so $C[A]$ S-topologisch bzw. K-topologisch.

Beweis. C_α sei eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$, so daß es eine Untergruppe B mit kompaktem Erzeugendensystem gibt, deren Annullator $C_\alpha = C_B$ ist. Nach Satz 1 b) ist B höhenendlich. Nach Nr. 2 d) ist die (diskrete) Gruppe C/C_B $(C = C[A])$ gruppentheoretisch isomorph zu der Charakterengruppe $C[B]$, also nach Nr. 2 g) eine Torsionsgruppe. $C[A]$ ist also eine torsionstopologische Gruppe. Da sie auch eine p-adische Operatorgruppe ist und alle betrachteten Untergruppen und Restklassengruppen desgleichen, muß C/C_B eine primäre Torsionsgruppe sein und S. Satz 13 liefert den ersten Teil der Behauptung. — Sei nun A K-topologisch, $C^{(B)} \subseteqq C[A]$ irgendeine operatorzulässige Untergruppe von $C[A]$ mit der Eigenschaft, daß $C/C^{(B)}$ eine Torsionsgruppe ist (Abgeschlossenheit von $C^{(B)}$ wird nicht vorausgesetzt). B sei die in A [nach der im Anschluß an Nr. 2 f) gemachten Bemerkung sicher abgeschlossene] durch $C^{(B)}$ annulierte Untergruppe von A, C_B der Annullator von B. Dann ist $C^{(B)} \subseteqq C_B$ und C_B, wie oben festgestellt, abgeschlossen in $C[A]$. Ist $\mathfrak{S}^{(B)}$ bzw. $\mathfrak{S}_B$ der gemäß Nr. 2 f) zu $C^{(B)}$ bzw. C_B gehörige Filter in A, dann ist B sowohl der Durchschnitt von $\mathfrak{S}^{(B)}$ als auch der von $\mathfrak{S}_B$. Wäre aber C_B eine echte Obergruppe von $C^{(B)}$, dann wäre $\mathfrak{S}^{(B)}$ nach Nr. 2 f) ein echter Teilfilter von $\mathfrak{S}_B$ und da die Topologie von A nach S. Satz 15 eine totalgröbste ist, müßten $\mathfrak{S}^{(B)}$ und $\mathfrak{S}_B$ nach einer in S. Nr. 9 gemachten Bemerkung verschiedene Durchschnitte haben, was nicht sein kann. Also ist $C^{(B)} = C_B$ der Annullator von B. Aus Nr. 2 d) folgt dann die gruppentheoretische Isomorphie von $C[B]$ und C/C_B, d.h. $C[B]$ ist eine Torsionsgruppe, also nach Nr. 2 g) B höhenendlich und da B abgeschlossen in A, nach Satz 1 c) kom-

[8]) Es wird nicht verlangt und braucht auch nicht der Fall zu sein, daß die Annullatoren C_B der Untergruppen $B \subseteqq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem einen Filter bilden, denn mit C_B braucht keineswegs jede abgeschlossene Obergruppe von C_B Annullator einer Untergruppe von A zu sein. Wohl aber bilden die C_B eine Filterbasis. Sind nämlich $C_{B_1}, \ldots, C_{B_n}$ endlich viele Annullatoren der Untergruppen mit kompaktem Erzeugendensystem $B_1, \ldots, B_n$, dann ist $C_B = \bigcap C_{B_i}$ Annullator der (topologischen) Vereinigungsgruppe $B = B_1 + \cdots + B_n$ [beachte die Bemerkung im Anschluß an Nr. 2 e)] und B besitzt ersichtlich gleichfalls ein kompaktes Erzeugendensystem. Da $\bigcap C_B$ alle zyklischen Hüllen in A und damit die ganze Gruppe A annulliert, folgt auch $\bigcap C_B = 0$.

pakt. C_B ist als Annullator der kompakten Gruppe $B \subseteq A$ also charakteristische Untergruppe von $C[A]$, d.h. jede Untergruppe C_B von $C[A]$, deren Restklassengruppe C/C_B eine Torsionsgruppe ist, ist charakteristische Untergruppe von $C[A]$. Aus S. Satz 8 folgt jetzt, daß $C[A]$ S-topologisch ist. — Sei nun schließlich A S-topologisch. Das System der die charakteristischen Untergruppen von $C[A]$ definierenden Untergruppen mit kompaktem Erzeugendensystem von A ist identisch mit dem System der endlichrangigen höhenendlichen Untergruppen von A [2]) und dieses hat offenbar die Eigenschaft, daß es mit je endlich vielen Untergruppen auch ihre (gewöhnliche) Vereinigungsgruppe so wie zu jeder Untergruppe auch deren Untergruppen enthält. Ist ferner φ eine Abbildung von A in Z, die in jeder endlichrangigen Untergruppe $B \subseteq A$ einen topologischen Homomorphismus φ_B von B in Z induziert, so ist φ ein topologischer Homomorphismus von A in Z. Die abstrakte (Operator-) Homomorphieeigenschaft von φ folgt daraus, daß sich zu je zwei Elementen $a_1, a_2 \in A$ eine a_1, a_2 enthaltende endlichrangige höhenendliche Untergruppe — nämlich $(a_1)+(a_2)$ — angeben läßt, während die Offenheit des Homomorphismus φ sofort aus S. Satz 8 folgt. — Da die Gruppe Z diskret ist, ergibt sich aus dem oben Bemerkten leicht nach einem allgemeinen Satz von W. KRULL [9]) die Vollständigkeit von $C[A]$. Sei nun C_B eine Umgebungsuntergruppe von $C[A]$, welche Annullator der kompakten Untergruppe B von A ist. Dann ist nach Nr. 2 d) $C[A]/C_B$ gruppentheoretisch isomorph zu $C[B]$ d.h. $C[A]/C_B$ ist eine endlichrangige Torsionsgruppe, C_B eine große Untergruppe von $C[A]$. Da $C[A]$ vollständig ist, folgt hieraus nach S. Satz 15 die Behauptung.

4. In der vorigen Nummer wurden die eine charakteristische Basis von $C[A]$ bildenden Untergruppen $C_B \subseteq C[A]$ definiert als Annullatoren der (in A abgeschlossenen) Untergruppen B mit kompaktem Erzeugendensystem. Dabei ist zu beachten, daß das System $\mathfrak{B}$ der C_B nicht notwendig einen Filter bildet [8]), d.h. mit C_B braucht nicht auch jede Obergruppe von C_B Annullator einer Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem von A zu sein. Wir behaupten nun

[9]) KRULL, W.: Bewertungstopologie, Bonn 1952, als Manuskript veröffentlicht, Satz 2. Das dort nur für einen Sonderfall benutzte, aber sehr allgemein verwendbare Beweisverfahren verläuft in unserem Falle so: Sei A eine den zu Beginn von Nr. 1 gemachten Voraussetzungen genügende Gruppe, $C[A]$ die Charakterengruppe von A. Ferner gelte: Ist φ eine Abbildung von A in Z derart, daß für jede abgeschlossene Untergruppe B von A mit kompaktem Erzeugendensystem die von φ in B induzierte Abbildung ein topologischer Homomorphismus ist, dann sei φ ein topologischer Homomorphismus von A. Schließlich sei $\mathfrak{B}$ eine aus Nebenscharen nach den Annullatoren der Untergruppen mit kompaktem Erzeugendensystem von A bestehende CAUCHY-Filterbasis in $C[A]$. Die Schar $U_\alpha \in \mathfrak{B}$ sei Nebenschar des Annullators der Untergruppe $B_\alpha \subseteq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem. U_α besteht genau aus einer Menge von Charakteren von A, die in B_α einen und denselben Charakter c_α induzieren. Sei nun $a \in A$, $\mathfrak{B}_a = \{U_{c_a}\}$ die Menge aller U_α mit $a \in B_\alpha = B_{c_a}$. Dann ist $c_{c_a}(a) = z_a \in Z$ für alle α_a konstant und wir setzen $c^*(a) = c_{\alpha_a}(a) = z_a \in Z$. Läßt man a alle Elemente von A durchlaufen, dann fällt die in B_α von c^* induzierte Abbildung mit c_α zusammen und nach unseren Voraussetzungen ist c^* ein Charakter von A mit $c^* \in \bigcap U_\alpha$.

Satz 3. Die Annullatoren C_B der Untergruppen $B \subseteqq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem bilden dann und nur dann den ganzen charakteristischen Filter von $C[A]$, wenn A der folgenden Bedingung genügt:

(K_1) *Alle abgeschlossenen Untergruppen von A mit kompaktem Erzeugendensystem sind kompakt*[10]).

Beweis. „Dann": Sei C_α irgendeine charakteristische Untergruppe von $C[A]$. Dann gibt es eine charakteristische Untergruppe $C_B \subseteqq C_\alpha$ von $C[A]$, welche Annullator einer kompakten Untergruppe B von A ist. Nach Nr. 2 d) lassen sich dann die Elemente der Restklassengruppe $C[A]/C_B$ mit den Elementen der Charakterengruppe $C[B]$ identifizieren und da sowohl $C[A]/C_B$ als auch $C[B]$ (als Charakterengruppe einer kompakten Gruppe) diskret sind, können wir $C[A]/C_B = C[B]$ setzen. Nun ist bekanntlich jede Untergruppe von $C[B] = C[A]/C_B$ Annullator einer (abgeschlossenen und daher kompakten) Untergruppe von B. Gehen wir aber von den Untergruppen $\bar{C}_\alpha$ von $C[A]/C_B$ in üblicher Weise zu ihren vollständigen Urbildern in $C[A]$, also den Obergruppen C_α von C_B zurück, so sieht man sofort, daß C_α (in $C[A]$) Annullator der gleichen Untergruppe von B ist, die die C_α entsprechende Bildgruppe $\bar{C}_\alpha \subseteqq C[A]/C_B = C[B]$ als Annullator (in $C[B]$) besitzt. Mit C_B ist also auch $C_\alpha \supseteqq C_B$ Annullator einer kompakten Untergruppe von A und hieraus folgt die behauptete Filtereigenschaft. — „Nur dann": Sei B eine abgeschlossene, nicht kompakte Untergruppe von A mit kompaktem Erzeugendensystem, C_B der Annullator von B in $C[A]$. Dann ist C_B eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$, also $C[A]/C_B$ diskret. Da auch die Charakterengruppe $C[B]$ von B diskret sein muß, können wir, wie oben, auf Grund von Nr. 2 d) $C[A]/C_B$ und $C[B]$ in der üblichen Weise identifizieren. Beachten wir noch, daß die Obergruppen der charakteristischen Untergruppe C_B von $C[A]$ und die Untergruppen von $C[B] = C[A]/C_B$ sich genau entsprechen und daß eine Obergruppe von C_B nur dann Annullator einer Untergruppe von B ist, wenn das gleiche für die entsprechende Gruppe aus $C[B] = C[A]/C_B$ gilt, so ist nur noch zu beweisen, daß die Untergruppen von $C[B]$, die Annullatoren von Untergruppen aus B sind, keinen Filter bilden. Sei nun $\hat{B}$ die vollständige Hülle von B. Nach Satz 1 a) ist $\hat{B}$ kompakt. Jeder Charakter $\hat{c}$ von $\hat{B}$ induziert einen Charakter c von B und da B dicht in $\hat{B}$ liegt, läßt sich jede stetige Abbildung von B in Z bzw. jeder Charakter von B eindeutig zu einer stetigen Abbildung von $\hat{B}$ in Z bzw. zu einem Charakter von $\hat{B}$ fortsetzen[11]). Hieraus folgt, daß die (diskrete) Charakterengruppe $C[B]$ mit der (gleichfalls diskreten!) Charakterengruppe $C[\hat{B}]$ identifiziert werden kann. Nun gibt es sicher ein $\hat{b} \in \hat{B}$, welches nicht in B liegt und die von $\hat{b}$ erzeugte zyklische Hülle $(\hat{b})$ ist keine Untergruppe von B. $C_{(\hat{b})} \subseteqq C[\hat{B}] =$

[10]) Nach Satz 1 a) ist (K_1) z. B. für alle vollständigen und nach [2]) auch für alle S-topologischen Gruppen erfüllt.

[11]) Siehe BOURBAKI: Topologie générale, Kap. III, § 3, Prop. 6 und die daran anschließende Bemerkung.

$C[B]$ sei der Annullator von $(\hat{b})$. Aus für die Charakterentheorie kompakter Gruppen gültigen bekannten Sätzen folgt, daß $(\hat{b})$ genau die von $C_{(\hat{b})}$ annullierte Untergruppe ist. Soll nun $C_{(\hat{b})} \subseteq C[B]$ Annullator einer Untergruppe von B sein, so muß diese eine echte Untergruppe von $(\hat{b})$, also eine zyklische Hülle $(b) \subseteq B$ sein. (b) aber ist eine kompakte Untergruppe von $\hat{B}$ und der Annullator von $(b) \neq (\hat{b})$ aus $C[\hat{B}] = C[B]$ muß — wie wieder aus der Charakterentheorie der kompakten Gruppen folgt — von dem Annullator $C_{(\hat{b})}$ von $(\hat{b})$ verschieden sein — Widerspruch. Mithin ist die charakteristische Untergruppe $C_{(\hat{b})}$ von $C[B]$ nicht Annullator einer Untergruppe von B, woraus die Behauptung folgt.

Satz 4. a) A sei eine primäre zyklovollständige Gruppe, B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $\mathring{C}[A]$ die (nicht topologisierte) Operatorgruppe, die von den Charakteren von A gebildet wird, $\mathring{C}_B \subseteq \mathring{C}[A]$ der Annullator von B, B' die von $\mathring{C}_B$ annullierte Untergruppe von A. Dann ist $B = B'$.

b) Die primäre Gruppe A genüge der Voraussetzung (K_1) aus Satz 3. Sei $C^{(B)} \subseteq C[A]$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppe von $C[A]$, $B \subseteq A$ die von $C^{(B)}$ annullierte Untergruppe von A, $C_B \subseteq C[A]$ der Annullator von B. Dann ist C_B die (in $C[A]$) abgeschlossene Hülle von $C^{(B)}$.

Beweis. a) Jedenfalls ist $B' \supseteq B$. Nach Nr. 2 c) und d) können wir $\mathring{C}_B$ mit der Gruppe $\mathring{C}[A/B]$ der Charaktere von A/B identifizieren. Wäre nun $a \in B'$, $a \notin B$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ das entsprechende Element von $\bar{A} = A/B$, so würde a und damit $\bar{a}$ von allen zu $\mathring{C}_B = \mathring{C}[A/B]$ gehörenden Charakteren in die 0 abgebildet — im Widerspruch zu Nr. 2 a). b) Zunächst ist sicher $C_B \supseteq C^{(B)}$. Sei nun $C_{B'}$ eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$ mit $C_{B'} \supseteq C^{(B)}$. Dann gibt es eine Untergruppe $B' \subseteq A$ mit kompaktem Erzeugendensystem, deren Annullator $C_{B'}$ ist und wegen $C^{(B)} \subseteq C_{B'}$ wird B' auch von $C^{(B)}$ annulliert. Hieraus folgt $B' \subseteq B$ und B' wird auch von C_B annulliert, woraus $C_B \subseteq C_{B'}$ folgt. Jede $C^{(B)}$ enthaltende charakteristische Untergruppe von $C[A]$ enthält also auch C_B und hieraus folgt die Behauptung nach S. Nr. 2 a).

Korollar. Genügt die primäre Gruppe A der Bedingung (K_1) von Satz 3, dann ist die zwischen den (abgeschlossenen) Untergruppen von A und ihren Annullatoren aus $C[A]$ bestehende Korrespondenz umkehrbar eindeutig.

Sei nun B eine Untergruppe von A, $\bar{A} = A/B$, $C_B \subseteq C[A]$ der Annullator von B, $\bar{C}$ die Charakterengruppe von $\bar{A}$. Nach Nr. 2 c) induziert jeder Charakter $c \in C_B$ einen Charakter $\bar{c} \in \bar{C}$ und nach Nr. 2 d) ist die so definierte Abbildung φ von C_B auf $\bar{C}$ ein gruppentheoretischer Isomorphismus. Wir behaupten:

φ ist offen, d.h. führt charakteristische Untergruppen von C_B in charakteristische Untergruppen von $\bar{C}$ über.

(Gleichbedeutend damit ist offenbar die Stetigkeit der inversen Abbildung φ^{-1}.) Sei nämlich $C_{B'}$ eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$, B' die

Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem, deren Annullator $C_{B'}$ ist[12]). $\bar{B}' \subseteqq \bar{A}$ sei die B' auf Grund des natürlichen Homomorphismus Φ von A auf $\bar{A}$ entsprechende Gruppe. Das kompakte Erzeugendensystem von B' geht bei Φ in ein kompaktes Erzeugendensystem von $\bar{B}'$ über und der Annullator $\bar{C}_{\bar{B}'} \subseteqq \bar{C}$ von $\bar{B}'$ in $\bar{C}$ ist eine charakteristische Untergruppe von $\bar{C}$. Sei nun $\bar{c}' \in \bar{C}_{\bar{B}'}$, $c' \in C_B$ der dem Charakter $\bar{c}'$ von $\bar{A}$ auf Grund von φ zugeordnete Charakter von C_B. Dann ist c' der den Charakter $\bar{c}'$ gemäß Nr. 2 c) induzierende Charakter aus C_B und es gilt $c'(B') = \bar{c}'(\Phi(B')) = \bar{c}'(\bar{B}') = 0$, also $c' \in C_{B'}$, d.h. die $\bar{C}_{\bar{B}'}$ auf Grund von φ entsprechende Untergruppe von C_B liegt in $C_{B'}$: $\varphi^{-1}(\bar{C}_{\bar{B}'}) \subseteqq C_{B'} \cap C_B$, $\varphi(C_{B'} \cap C_B) \supseteqq \bar{C}_{\bar{B}'}$. Da die Untergruppen der Form $C_{B'} \cap C_B$ gerade die charakteristischen Untergruppen von C_B sind, folgt hieraus die Behauptung. Aus der vorangegangenen Bemerkung folgt:

Ist B eine charakteristische Untergruppe von A, also $\bar{A} = A/B$ diskret und $\bar{C} = C[\bar{A}]$ kompakt, so ist der Annullator C_B von B kompakt.

5. Sei wieder A eine beliebige zyklovollständige primäre Gruppe, $a \in A$. Dann definiert a einen topologischen Homomorphismus von $C[A]$ in Z vermöge der Festsetzung $a(c) = c(a)$, wo c alle Elemente von $C[A]$ durchläuft. In der Tat: Daß $a(c)$ ein gewöhnlicher (Operator-)Homomorphismus ist, folgt sofort aus $a(c_1 + c_2) = (c_1 + c_2)(a) = c_1(a) + c_2(a) = a(c_1) + a(c_2)$ bzw. entsprechend für die Operatormultiplikation. Andererseits ist der Kern des Homomorphismus $a(c)$ offenbar gerade der Annullator $C_{(a)}$ der von a erzeugten zyklischen Hülle (a) und $C_{(a)}$ ist, da (a) kompakt, eine charakteristische Untergruppe von $C[A]$. Mithin ist $a(c)$ sogar ein topologischer Homomorphismus.

Wir bezeichnen $a(c)$ als „den von $a \in A$ induzierten Charakter von $C[A]$" und beweisen:

Satz 5. *A sei eine mit ihrer Charakterengruppe $C[A]$ der Bedingung (K_1) aus Satz 3 genügende Gruppe, $A^* = C[C[A]]$ die Charakterengruppe von $C[A]$. Ordnen wir jedem $a \in A$ den durch a induzierten Charakter $a^* \in A^*$ von $C[A]$ zu, so ist die so definierte Abbildung φ von A in A^* ein offener Isomorphismus von A auf A^*. φ und φ^{-1} führen kompakte bzw. abgeschlossene Untergruppen von A und A^* in kompakte bzw. abgeschlossene Untergruppen von A^* und A über.*

Beweis. a) φ ist eine Abbildung von A *auf* A^*. Sei nämlich $a^* \in A^*$ irgendein Charakter von $C[A]$, $C^{(a^*)} = C_B \subseteqq C[A]$ der Kern der Abbildung a^* von $C[A]$ in Z. Dann ist $C^{(a^*)}$ eine große charakteristische Untergruppe von $C[A]$ mit einrangiger Restklassengruppe $C[A]/C^{(a^*)}$ und es gibt nach Satz 3 eine kompakte Untergruppe $B \subseteqq A$ deren Annullator $C^{(a^*)} = C_B$ ist. Aus Nr. 2 d) folgt in bekannter Weise, daß $B = (a')$ eine zyklische Hülle ist. Der von einem (beliebig gewählten) erzeugenden Element a' von $B = (a')$ induzierte Charakter $a'^* \in A^*$ von $C[A]$ hat denselben Kern $C^{(a'^*)} = C^{(a^*)}$ wie a^*, denn ein Charakter $c \in C[A]$ von A annulliert a'^* dann und nur dann, wenn

[12]) Wir setzen dabei voraus, daß $C_{B'}$ zu der die Topologie der Charakterengruppe definierenden charakteristischen Basis gehört und also Annullator einer Untergruppe von A ist.

er a^* annulliert. Die durch a^* bzw. a'^* gelieferten Abbildungen von $C[A]$ in Z sind also gleichwertig zu den durch a^* bzw. a'^* bestimmten Isomorphismen $\bar{a}^*$ und $\bar{a}'^*$ derselben Restklassengruppe $C[A]/C^{(a'^*)} = C[A]/C^{(a^*)}$ in Z und lassen sich durch einen Automorphismus ψ_0 der Bildgruppe $Z_0 \subseteq Z$ ineinander überführen: $\bar{a}^* = \psi_0 \cdot \bar{a}'^*$. Nach Nr. 1 B. gibt es also eine ganze p-adische Zahl ϱ (in diesem Falle ist ϱ sogar eine Einheit in $\mathfrak{R}_p$), so daß $\bar{a}^* = \varrho \cdot \bar{a}'^*$. Wir setzen $a = \varrho \cdot a' \in A$. Dann induziert a genau den gegebenen Charakter a^* von $C[A]$, denn es ist $a'^*(c) = c(a')$, also $a^*(c) = c(\varrho \cdot a') = c(a)$. — b) φ ist ein gruppentheoretischer Isomorphismus. Die (Operator-)Homomorphieeigenschaft von φ folgt aus einer trivialen Rechnung. Ist weiter $a \in A$, $a^* = \varphi(a) = 0$, so gilt für jedes $c \in C[A]$: $a^*(c) = 0$ also $c(a) = 0$ und aus Nr. 2 a) folgt $a = 0$. φ ist also sogar ein Isomorphismus. — c) Zum Nachweis der behaupteten topologischen Eigenschaften von φ bemerken wir: Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $C_B \in C[A]$ der Annullator von B, $B'^* \subseteq A^* = C[C[A]]$ der Annullator von C_B dann ist $B'^* = B^* = \varphi(B)$ genau die B auf Grund der Abbildung φ zugeordnete Gruppe aus A^*. — In der Tat: B'^* besteht genau aus allen $b'^* \in A^*$ mit $b'^*(C_B) = 0$ und die den b'^* vermöge φ^{-1} zugeordneten Elemente b' aus A genügen der Bedingung $c_B(b') = 0$ für alle $c_B \in C_B$, d.h. werden durch C_B annulliert. Wird umgekehrt das Element $b' \in A$ von C_B annulliert, also $c_B(b') = 0$ ($c_B \in C_B$), so folgt für $b'^* = \varphi(b') \in A^*$: $b'^*(C_B) = 0$, also $b'^* \in B'^*$. $B' = \varphi^{-1}(B'^*)$ ist also genau die durch C_B annullierte Untergruppe von A und nach Satz 4 b) ist C_B der Annullator von B', also nach Satz 4 a) $B = B'$. Daraus folgt $\varphi(B) = B^* = B'^*$. — Ist nun $A_{\alpha'}$ eine charakteristische Untergruppe von A, dann ist der Annullator $C_{A_{\alpha'}} \subseteq C[A]$ von $A_{\alpha'}$ nach der Schlußbemerkung von Nr. 4 kompakt, der Annullator $A^*_{\alpha'} = \varphi(A_{\alpha'}) \subseteq A^*$ von $C_{A_{\alpha'}}$ also eine charakteristische Untergruppe. — Ist $B \subseteq A$ kompakt, also der Annullator $C_B \subseteq C[A]$ eine charakteristische Untergruppe, dann ist $B^* = \varphi(B) \subseteq A^*$ wieder nach der Schlußbemerkung von Nr. 4 kompakt. Ist umgekehrt die Untergruppe $B^* \subseteq A^*$ kompakt, dann auch $B = \varphi^{-1}(B^*) \subseteq A$ wegen der Stetigkeit von φ^{-1}. — Aus der Stetigkeit von φ^{-1} folgt auch, daß φ abgeschlossene Untergruppen in abgeschlossene Untergruppen überführt. Da jede abgeschlossene Untergruppe als Durchschnitt von charakteristischen Untergruppen darstellbar ist [S. Nr. 2 a)] und φ^{-1} natürlich Durchschnitte in Durchschnitte überführt, bleibt nur noch zu beweisen, daß jede *charakteristische* Untergruppe von A^* durch φ^{-1} in eine abgeschlossene Untergruppe von A überführt wird. Ist aber A^*_α eine charakteristische Untergruppe von A^* dann ist A^*_α Annullator einer kompakten Untergruppe $C^{(\alpha')}$ von $C[A]$ und in üblicher Weise erschließt man sofort, daß $A_{\alpha'} = \varphi^{-1}(A^*_{\alpha'})$ die von $C^{(\alpha')}$ annullierte Untergruppe von A, also sicher abgeschlossen ist. Damit ist Satz 5 in allen Teilen bewiesen.

Korollar. Ist die primäre Gruppe A K-topologisch oder S-topologisch, dann ist $A^* = C[C[A]]$ mit der Zuordnung φ von Satz 5 topologisch isomorph zu A, d.h. es gilt der Dualitätssatz[13]).

[13]) Der Inhalt von Satz 2 und des obigen Korollars wurde vom Verf. auf der Tagung der DMV 1952 in München vorgetragen. Während der Fertigstellung der vorliegenden

Denn A genügt unter den angegebenen Voraussetzungen sicher der Bedingung (K_1) von Satz 3. Ist A K-topologisch oder S-topologisch, dann wegen Satz 2 auch A^* und die Behauptung folgt wegen der Offenheit des Isomorphismus φ von A auf A^* aus der Gröbst- bzw. Feinsteigenschaft der K-Topologie bzw. der S-Topologie. Wir wollen das im Korollar zu Satz 5 sowie in den auf K-topologische und S-topologische Gruppen bezüglichen Aussagen von Satz 2 enthaltene Resultat noch in gewissem Umfange auf nichtprimäre Gruppen ausdehnen und verwenden hierzu einen (in unserem Spezialfall auch leicht unmittelbar zu verifizierenden) Satz von S. KAPLAN[14]): Seien A_α irgendwelche (Untergruppen-)topologischen Gruppen, welche dem Dualitätssatz genügen, $A'_\alpha = C[A_\alpha]$. Ferner sei $A = \sum^T \oplus A_\alpha$. $A' = \sum \oplus A'_\alpha$[15]). Dann ist A' topologisch isomorph zur Charakterengruppe von A und A und A' genügen dem Dualitätssatz.

Wir definieren nun:

Eine (nicht notwendig primäre) S-topologische Gruppe A heiße *„im engeren Sinne S-topologisch"*, wenn jede abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem von A endlichrangig, d. h. also Summe endlich vieler einrangiger (also primärer) Gruppen ist. Nach Satz 1 ist jede primäre S-topologische Gruppe auch im engeren Sinne S-topologisch und aus S. Satz 9 folgt dann leicht: Eine (nicht primäre) S-topologische Gruppe A ist genau dann im engeren Sinne S-topologisch, wenn $A = \sum \oplus A^{(p)}$ direkte Summe ihrer primären Komponenten $A^{(p)}$ ist. Beachtet man noch, daß nach ST. PIETRKOWSKI[16]) jede K-topologische Gruppe A direkte TYCHONOFF-Summe ihrer primären Komponenten ist, so folgt aus Satz 2, dem Korollar von Satz 5, sowie dem oben zitierten Satz von KAPLAN und den angeschlossenen Bemerkungen fast unmittelbar:

Satz 6. Ist A eine (nicht notwendig primäre) K-topologische bzw. im engeren Sinne S-topologische Gruppe, so ist $C[A]$ im engeren Sinne S-topologisch bzw. K-topologisch und A genügt in jedem Falle dem Dualitätssatz.

6. Zum Schluß wenden wir uns wieder den zyklovollständigen *primären* Gruppen zu und stellen die naheliegende Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen für die weder K-topologischen noch S-topologischen Gruppen der Dualitätssatz gilt oder schärfer, wann die Abbildung φ des Satzes 5 von A auf $A^* = C[C[A]]$ ein *topologischer* Isomorphismus ist. Da gleich gezeigt werden wird, daß in diesem Falle die Bedingung (K_1) des Satzes 3 für A und $C[A]$ erfüllt sein muß, können wir uns auf die Betrachtung der mit ihren

Arbeit erhielt ich Einblick in ein derzeit noch unveröffentlichtes Manuskript einer Arbeit von Herrn I. KAPLANSKY, in welcher in anderem Zusammenhang und auf anderem Wege die erste Hälfte des obigen Korollars, d. h. also die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die primären, linear kompakten Gruppen nachgewiesen wird.

[14]) KAPLAN, S.: Extension of the Pontrjagin Duality. I. Duke Math. J. **15**, 649—658 (1948).

[15]) $\sum^T \oplus A_\alpha$ bedeutet die „direkte TYCHONOFF-Summe" der A_α, im Gegensatz zur gewöhnlichen direkten Summe $\sum \oplus A_\alpha$ — vgl. S. Nr. 1.

[16]) PIETRKOWSKI, ST.: Theorie der Abelschen Gruppen. Math. Ann. **104** (1931).

Charakterengruppen der Bedingung (K_1) genügenden Gruppen beschränken. Für diese haben wir in Satz 5 eine bereits hart an das erstrebte Resultat heranreichende Aussage: Die gruppentheoretisch isomorphen Gruppen A und $A^* = C[C[A]]$ haben dieselben kompakten und abgeschlossenen Untergruppen und die Topologie von A^* ist höchstens feiner als die von A. Die naheliegende Vermutung, daß aus (K_1) schon die topologische Isomorphie von A und A^* folgt, kann ich weder beweisen noch widerlegen und beschränke mich darauf, eine zusätzliche Bedingung anzugeben, aus welcher die Gültigkeit des Dualitätssatzes folgt und mit deren Hilfe jedenfalls die Gültigkeit des Dualitätssatzes für eine weitere besonders wichtige Klasse von primären Gruppen nachgewiesen werden kann. Die fragliche Bedingung ist rein topologisch und soll daher ganz allgemein für einen beliebigen topologischen Raum R formuliert werden:

(K_2): *Ist M eine Untermenge des topologischen Raumes R, q ein Häufungspunkt von M, dann gibt es eine Untermenge $M_1 \subseteq M$, deren (in R) abgeschlossene Hülle $\tilde{M}_1$ kompakt ist mit $q \in \tilde{M}_1$.*

Die Bedingung (K_2) ist offenbar eine gemeinsame Abschwächung der Lokalkompaktheit (erst recht also der Kompaktheit) sowie des ersten (erst recht also des zweiten) Abzählbarkeitsaxioms.

Wir zeigen zunächst:

Genügt A der Bedingung (K_2), dann ist $C[A]$ vollständig.

In der Tat. f sei eine eindeutige Abbildung von A in Z derart, daß für jede Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem $B \subseteq A$ die von f in B induzierte Abbildung f_B ein topologischer (Operator-)Homomorphismus ist. Dann ist f natürlich ein gruppentheoretischer (Operator-)Homomorphismus von A in Z. Sein Kern A_f ist eine große Untergruppe von A. Wir zeigen, daß A_f abgeschlossen in A ist: Sei $q \in A$ ein Häufungspunkt von A_f. Dann folgt aus (K_2) sofort die Existenz einer Untergruppe $A'_f \subseteq A_f$, derart daß die (in A) abgeschlossene Hülle $\tilde{A}'_f$ ein kompaktes Erzeugendensystem besitzt und $q \in \tilde{A}'_f$ ist. Da A'_f dicht in $\tilde{A}'_f$ liegt und $f(A'_f) = 0$ ist, folgt $f(\tilde{A}') = 0$, also $f(q) = 0$, $q \in A_f$. — Die große Untergruppe $A_f \subset A$ ist also abgeschlossen und daher nach bekannten Schlüssen sogar offen, also f ein topologischer Homomorphismus. Nach einem Satz von W. KRULL[9]) folgt nun sofort die Vollständigkeit von $C[A]$.

Jetzt gilt

Satz 7. A sei eine primäre zyklovollständige Gruppe, φ wie in Satz 5 die Abbildung von A in $A^* = C[C[A]]$, welche jedem $a \in A$ den durch a induzierten Charakter $a^* \in A^*$ von $C[A]$ zuordnet. Dafür, daß φ ein topologischer Isomorphismus von A auf A^* sei, ist notwendig das Erfülltsein der Bedingung (K_1) für A sowie $C[A]$ und hinreichend die Gültigkeit der Bedingungen (K_1) und (K_2) für A.

Beweis. Ist φ ein topologischer Isomorphismus, C' eine abgeschlossene Untergruppe von $C[A]$, $A^{*\prime} \subseteq A^*$ der Annullator von C', dann ist C' offenbar

[beachte Satz 4 a)] Annullator von $A' = \varphi^{-1}(A^{*'}) \subseteqq A$. Ist ferner $A^{*'}$ irgendeine abgeschlossene Untergruppe von A^*, $A' = \varphi^{-1}(A^{*'})$, C' der Annullator von A', dann ist $A^{*'}$ der Annullator von C'. Mithin ist jede abgeschlossene Untergruppe von $C[A]$ bzw. $A^* = C[C[A]]$ Annullator einer gewissen Untergruppe von A bzw. $C[A]$ und hieraus folgt nach Satz 3 fast unmittelbar die Gültigkeit von (K_1) für A und $C[A]$. — Sei nun (K_1) und (K_2) für A erfüllt. Wie oben bewiesen, ist dann $C[A]$ vollständig, genügt also (K_1) und die Voraussetzungen von Satz 5 sind erfüllt. Wir haben nur noch zu zeigen, daß φ stetig ist und bemerken zunächst, daß φ beliebige kompakte Mengen M aus A in kompakte Mengen aus A^* überführt. Denn ist $M \subseteqq A$ kompakt, dann ist die von M erzeugte abgeschlossene Untergruppe $B \subseteqq A$ wegen (K_1) auch kompakt, also nach Satz 5 auch $B^* = \varphi(B) \subseteqq A^*$. Wegen der Offenheit von φ (Stetigkeit von φ^{-1}) ist aber $M^* = \varphi(M) \subseteqq B^*$ abgeschlossen, also auch kompakt. — Ist nun $M \subseteqq A$ beliebig, $q \in A$ ein Häufungspunkt von M, dann gibt es wegen (K_2) eine Menge $M_1 \subseteqq M$, so daß die abgeschlossene Hülle $\tilde{M}_1$ kompakt ist und q enthält. $\varphi(\tilde{M}_1)$ ist daher kompakt, $\widetilde{\varphi(M_1)} \subseteqq \varphi(\tilde{M}_1)$ gleichfalls und daher $\varphi(\tilde{M}_1) = \widetilde{\varphi(M_1)}$. Aber $\varphi(\tilde{M}_1)$ enthält $\varphi(q)$ und $\varphi(q)$ ist Häufungspunkt von $\varphi(M_1)$, also erst recht von $\varphi(M) \supseteqq \varphi(M_1)$. Daraus folgt die Stetigkeit von φ und damit die Behauptung.

Korollar. Für jede vollständige, primäre, dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügende Gruppe gilt der Dualitätssatz.

Zusatz bei der Korrektur. Die in [13]) erwähnte Arbeit von Herrn I. KAPLANSKY ist mittlerweile im Druck erschienen: KAPLANSKY, I.: Dual modules over a valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 213—219 (1953).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 15. August 1953.)

SÖHNGEN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 31—51 (1954)

Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation.

Von
HEINZ SÖHNGEN.

1. Einleitung.

Ist $F(x)$ in dem Intervall $(-1, +1)$ eine Funktion der Klasse L^p $(p > 1)$, so verstehen wir unter der endlichen Hilbert-Transformation die Integraltransformation

$$\mathfrak{H}\{F(x)\} = \frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x - \xi} d\xi, \qquad (-1 < x < 1), \tag{1}$$

wobei das Integral an der singulären Stelle $x = \xi$ im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu nehmen ist. $\mathfrak{H}\{F(x)\}$ existiert dann fast überall und gehört ebenfalls zur Klasse L^p [1]).

Da diese Transformation sowohl in der Aerodynamik, als auch in der Elastizitätstheorie sowie sonstigen Anwendungen des öfteren auftritt, so erscheint es zweckmäßig, nach einer weiteren Integraltransformation

$$\mathfrak{T}\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} K(x, s) F(x) dx \tag{2}$$

zu suchen, die die Anwendung der H-Transformation in eine Multiplikation übersetzt, ähnlich, wie die einseitige Laplace-Transformation die Operation der Differentiation in eine Multiplikation verwandelt. Die Transformation $\mathfrak{T}$ soll also so bestimmt werden, daß

$$\mathfrak{T}\{\mathfrak{H}\{F(x)\}\} = g_1(s) \cdot \mathfrak{T}\{F(x)\} + C \cdot g_2(s) \tag{3}$$

ist, wobei $g_1(s)$ und $g_2(s)$ zwei von $F(x)$ unabhängige Funktionen sind, die Konstante C dagegen eventuell von $F(x)$ abhängt.

Nimmt man an, daß $K(x, s)$ als Funktion von x in $(-1, +1)$ einer Klasse L^q $(q > 1)$ mit $1/p + 1/q \leq 1$ angehört, so hat TRICOMI [2]) gezeigt, daß

$$\int_{-1}^{1} K(x, s) \oint_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x - \xi} d\xi\, dx = \int_{-1}^{1} F(\xi) \oint_{-1}^{1} \frac{K(x, s)}{x - \xi} dx\, d\xi. \tag{4}$$

[1]) TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2. Aufl., S. 132. Oxford 1948.

[2]) TRICOMI, F. G.: On the finite Hilbert-Transformation. Quart. J. Math. (2) 2, 199—211, 202 (1951).

Damit nimmt dann die Bedingung (3) die Form

$$(5)\qquad \int_{-1}^{1} F(x)\,\frac{1}{\pi}\,\Xint-_{-1}^{1}\frac{K(\xi,s)}{\xi-x}\,d\xi\,dx = g_1(s)\int_{-1}^{1} K(x,s)\,F(x)\,dx + C\,g_2(s)$$

an. Diese Beziehung ist offenbar dann erfüllt, wenn $K(x, s)$ so bestimmt wird, daß

$$(6)\qquad \mathfrak{H}\{K(x,s)\} = -K(x,s)\,g_1(s) - g_2(s)$$

ist. Nun ist aber für reelles α mit $0<|\alpha|<1$ [3])

$$(7)\qquad \mathfrak{H}\left\{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\right\} = -\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\operatorname{ctg}\pi\alpha + \frac{1}{\sin\pi\alpha}$$

und mithin

$$K(x,s) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s}$$

ein Kern mit der gesuchten Eigenschaft. Dementsprechend betrachten wir die Integraltransformation

$$(8)\qquad \mathfrak{T}\{F(x)\} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s} F(x)\,dx$$

und wollen für diese einige Aussagen beweisen. Dabei setzen wir noch zur Abkürzung

$$\mathfrak{T}\{F(x)\} = \mathfrak{f}(s).$$

2. Eigenschaften von $\mathfrak{T}\{F(x)\}$.

Die durch (8) definierte Transformation hat die angenehme Eigenschaft, daß sie in einem engen Zusammenhang mit der zweiseitigen Laplace-Transformation steht. Setzt man nämlich

$$(9)\qquad x = \frac{e^z-1}{e^z+1} \quad \text{d.h.} \quad e^z = \frac{1+x}{1-x}$$

und schreibt [4])

$$F\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right) = f(z),$$

so wird

$$(10)\qquad \mathfrak{f}(s) = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s} F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^z f(z)}{(1+e^z)^2}\,e^{-sz}\,dz = \mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\left\{\frac{2e^z f(z)}{(1+e^z)^2}\right\}$$

[3]) TRICOMI, F. G.: On the finite Hilbert-Transformation. Quart. J. Math. (2) 2, 209 (1951).

[4]) Funktionen aus dem Intervall $-1<x<1$ kennzeichnen wir stets durch große lateinische Buchstaben, ihre Bilder bei der Substitution (9) durch den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben und die Transformierten gemäß (8) durch kleine gotische Buchstaben.

oder mit $s=\sigma+i\tau$

$$\mathfrak{f}(s)=\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{(1-\sigma)z}f(z)}{(1+e^z)^2}\cdot\frac{e^{-i\tau z}-1}{-iz}\,dz. \tag{11}$$

Aus diesen Darstellungen ergeben sich nun nahezu unmittelbar eine Reihe von Eigenschaften der Funktion $\mathfrak{f}(s)$, die in den folgenden Sätzen zusammengestellt sein mögen.

Satz 1. *Gehört die Funktion $F(x)$ in $(-1,+1)$ zur Klasse L^p $(p>1)$, so konvergiert die $\mathfrak{T}$-Transformierte von $F(x)$ in dem Streifen $|\Re s|<1-1/p$ absolut, d.h., es existiert dort*

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\Re s}|F(x)|\,dx$$

und $\mathfrak{f}(s)$ stellt eine im Inneren des Streifens regulär analytische Funktion dar, die im Unendlichen verschwindet. Weiter gilt in diesem Streifen die Darstellung (11) und es besteht für fast alle z die Umkehrformel

$$\frac{2f(z)\,e^{z(1-\sigma)}}{(1+e^z)^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau. \tag{12}$$

Die erste Behauptung folgt mit $p'=p/(p-1)$ aus der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\Re s}|F(x)|\,dx\le\left[\int_{-1}^{1}|F(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{p'\Re s}dx\right]^{1/p'}.$$

Mithin ist

$$h(z,\sigma)=\frac{2e^{(1-\sigma)z}f(z)}{(1+e^z)^2}$$

für $|\sigma|<1-1/p$ in $(-\infty<z<\infty)$ absolut integrabel und der Bereich $|\Re s|<1-1/p$ ist ein Streifen absoluter Konvergenz für $\mathfrak{f}(s)$. Beachtet man nun, daß $\mathfrak{f}(s)$ eine zweiseitige Laplace-Transformierte ist, so ergeben sich daraus die angeführten Regularitätseigenschaften[5]).

Auf der rechten Seite von (11) darf die Differentiation unter dem Integralzeichen vollzogen werden, denn die Ableitung des Integranden kann durch die Funktion $|h(z,\sigma)|$ der Klasse L abgeschätzt werden. Ein Vergleich mit (10) liefert dann die Behauptung.

Die Umkehrformel (12) schließlich folgt daraus, daß wegen (11) die Funktion $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)$ als Funktion von τ die Fourier-Transformierte der absolut integrablen Funktion $h(z,\sigma)$ ist[6]).

[5]) Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, S. 144 ff. Basel 1950.

[6]) Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, S. 204. Basel 1950.

Satz 2. *Gehört die Funktion $F(x)$ in $(-1, +1)$ zur Klasse L^p mit $1<p\leq 2$, so ist $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)$ für jedes feste σ mit $|\sigma|<1-1/p$ in $(-\infty<\tau<\infty)$ eine Funktion der Klasse $L^{p'}$ mit $p'=p/(p-1)$. Setzt man $\sigma_1=1-1/p$, so wird durch*

$$\mathfrak{f}_1(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f(z)}{(1+e^z)^2}\,\frac{-i\tau z-1}{-iz}\,dz \tag{13}$$

eine Funktion der Klasse $L^{p'}$ dargestellt, für die für fast alle z

$$\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f(z)}{(1+e^z)^2}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}_1(\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau \tag{14}$$

und

$$\lim_{\sigma\to\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^{p'}\,d\tau=0 \tag{15}$$

ist. Die entsprechende Aussage gilt auch für $\sigma\to\sigma_{-1}=-1+1/p$, die zugehörige Funktion werde mit $\mathfrak{f}_{-1}(\sigma)$ bezeichnet.

Beweis. Die Funktion $h(z,\sigma)$ gehört für $|\sigma|\leq 1-1/p$ als Funktion von z in $(-\infty,+\infty)$ zur Klasse L^p und daher werden durch (11) für $|\sigma|<1-1/p$ und durch (13) für $\sigma=1-1/p$ Funktionen von τ dargestellt, die zur Klasse $L^{p'}$ gehören[7]). Daraus folgt dann die Umkehrformel (14) für fast alle z. Weiter ist für $|\sigma|<1-1/p$

$$\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2e^zf(z)}{(1+e^z)^2}\,[e^{-\sigma z}-e^{-\sigma_1 z}]\,\frac{e^{-i\tau z}-1}{-iz}\,dz,$$

d.h., die der Klasse $L^{p'}$ angehörende Funktion $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)$ ist die Fourier-Transformierte der Funktion

$$\psi(z,\sigma)=h(z,\sigma)-h(z,\sigma_1)$$

aus L^p. Mithin gilt die Abschätzung[7])

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^{p'}\,d\tau\leq 2\pi\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(z,\sigma)|^p\,dz\Big)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Beachtet man schließlich noch, daß

$$|\psi(z,\sigma)|^p\leq 2^p\,\frac{|f(z)|^p e^z}{(1+e^z)^2},$$

wobei die rechte Seite zur Klasse L gehört, so darf in

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(z,\sigma)|^p\,dz$$

[7]) TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2. Aufl., S. 96. Oxford 1948.

der Grenzübergang $\sigma \to \sigma_1$ unter dem Integralzeichen vollzogen werden. Damit ist (15) bewiesen. Ganz entsprechend verläuft der Beweis, wenn $\sigma \to -1 + 1/p$ strebt.

Von dem vorhergehenden Satz gilt noch die folgende schwache Umkehrung.

Satz 3. *Ist $F(x)$ in $(-1, 1)$ eine Funktion der Klasse L und ist längs der imaginären Achse*

$$\mathfrak{T}\{F(x)\} = \mathfrak{f}(s),$$

wobei $\mathfrak{f}(s)$ in $|\Re s| < 1 - 1/p$ mit $1 < p \leq 2$ regulär ist und dort bei festem $|\sigma| < 1 - 1/p$ als Funktion von τ in $(-\infty, +\infty)$ zur Klasse L^2 gehört, so ist $F(x)$ Funktion jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$.

Sind die vorstehenden Voraussetzungen für $p = 2$ erfüllt und existieren überdies zwei Funktionen $\mathfrak{f}_1(\tau)$ und $\mathfrak{f}_{-1}(\tau)$ der Klasse L^2, für die

$$\lim_{\sigma \to \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{f}(\sigma + i\tau) - \mathfrak{f}_1(\tau)|^2 = 0$$

und

$$\lim_{\sigma \to -\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{f}(\sigma + i\tau) - \mathfrak{f}_{-1}(\tau)|^2 = 0,$$

so ist auch $F(x)$ eine Funktion der Klasse L^2.

Beweis. Da $F(x)$ zu L gehört, so ist $h(z, 0)$ in $(-\infty, +\infty)$ eine Funktion derselben Klasse. Ihre Fourier-Transformierte ist $\mathfrak{f}(i\tau)$, eine Funktion der Klasse L^2. Mithin gilt im Lebesgueschen Sinn

$$h(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(i\tau) \frac{e^{i\tau z} - 1}{i\tau} d\tau.$$

Darin ist der Integrand eine in $|\Re s| < 1 - 1/p$ reguläre und im Unendlichen verschwindende Funktion, so daß also auch für $|\sigma| < 1 - 1/p$

$$h(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma + i\tau) \frac{e^{(\sigma + i\tau)z} - 1}{\sigma + i\tau} d\tau$$

ist. Beachtet man weiter, daß in der Identität

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma + i\tau) \left[\frac{e^{(\sigma + i\tau)z} - 1}{\sigma + i\tau} - e^{\sigma z} \frac{e^{i\tau z} - 1}{i\tau} \right] d\tau$$

$$= \frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma + i\tau) \frac{\sigma e^{\sigma z}(1 - e^{i\tau z})}{(\sigma + i\tau) i\tau} d\tau + (e^{\sigma z} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathfrak{f}(\sigma + i\tau)}{\sigma + i\tau} d\tau \right\}$$

die Differentiation auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen durchgeführt werden darf, da die Ableitung des Integranden eine Abschätzung

durch eine Funktion der Klasse L zuläßt, so erhält man

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{(\sigma+i\tau)z}-1}{\sigma+i\tau}\,d\tau = e^{\sigma z}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau$$

und damit für $|\sigma|<1-1/p$

$$h(z,\sigma) = h(z,0)\,e^{-z\sigma} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}(\sigma+i\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau.$$

Nun gehört aber nach Voraussetzung $\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)$ zur Klasse L^2. Dasselbe gilt dann auch für ihre Fourier-Transformierte $h(z,\sigma)$.

Ist nun p_1 eine reelle Zahl mit $1<p_1<p$, so ist

$$\frac{|f(z)|^{p_1}e^{z}}{(1+e^{z})^2} = |h(z,\sigma)|^{p_1}\cdot(1+e^{z})^{2(p_1-1)}\,e^{z[1-p_1(1-\sigma)]}\cdot 2^{-p_1}. \tag{16}$$

Darin ist der erste Faktor für jedes σ mit $|\sigma|<1-1/p$ eine Funktion der Klasse L^{2/p_1}. Wählt man σ noch so, daß

$$\text{für}\quad z\gtrless 0,\qquad -1+1/p<\sigma<-1+1/p_1$$

und

$$\text{für}\quad z<0,\qquad 1-1/p_1<\sigma<1-1/p$$

ist, so gehört der zweite Faktor in (16) zu jeder Klasse L^q $(q>1)$. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt dann, daß die linke Seite von (16) zu L gehört, d.h., $F(x)$ ist eine Funktion der Klasse L^{p_1}. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Um den zweiten Teil zu beweisen, gehen wir von der für fast alle z durch

$$\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f_1(z)}{(1+e^{z})^2} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{f}_1(\tau)\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau, \qquad (\sigma_1=\tfrac{1}{2}) \tag{17}$$

definierten Funktion[7]) aus. Die rechte Seite von (17) gehört dabei zu L^2 und aus

$$\frac{2e^{z}\,f_1(z)|^2}{(1+e^{z})^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2e^{(1-\sigma_1)z}f_1(z)}{(1+e^{z})^2}\right)^2(1+e^{z})^2$$

folgt, daß die $f_1(z)$ entsprechende Funktion $F_1(x)$ in $(-1,0)$ eine Funktion der Klasse L^2 ist. Wir behaupten weiter, daß $f(z)$ und $f_1(z)$ fast überall übereinstimmen und betrachten dazu das Integral

$$J(z,\sigma) = \int_0^z \frac{2e^{z}}{(1+e^{z})^2}\,[e^{-\sigma z}f(z) - e^{-\sigma_1 z}f_1(z)]\,dz. \tag{18}$$

Dafür kann

$$J(z,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)]\,\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\,d\tau$$

geschrieben werden und die Schwarzsche Ungleichung liefert die Abschätzung

$$|J(z,\sigma)| \leq \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^2\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{i\tau z}-1}{i\tau}\right|^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}},$$

aus der

$$\lim_{\sigma\to\frac{1}{2}} J(z,\sigma)=0$$

folgt. Nun darf aber in der Definitionsgleichung (18) für $J(z,\sigma)$ der Grenzübergang $\sigma\to\sigma_1$ unter dem Integralzeichen durchgeführt werden und es folgt

$$\int_0^z \frac{e^{\frac{1}{2}z}}{(1+e^z)^2}\,[f(z)-f_1(z)]\,dz=0.$$

Die Funktionen $f(z)$ und $f_1(z)$ stimmen also fast überall überein und mithin gehört auch $F(x)$ in $(-1,0)$ zur Klasse L^2. Die Betrachtung an der Stelle $\sigma=\sigma_{-1}=-1/2$ liefert ganz entsprechend die quadratische Integrabilität von $F(x)$ in $(0,1)$.

Damit ist der Satz 3 vollständig bewiesen. Aus ihm und dem Satz 2 folgt, daß eine Funktion $F(x)$, die in $(-1,1)$ zur Klasse L gehört, dann und nur dann dort auch eine Funktion der Klasse L^2 ist, wenn ihre Transformierte $\mathfrak{f}(s)$ in dem Streifen $\Re|s|<1/2$ regulär ist, dort längs jeder Parallelen zur imaginären Achse zu L^2 gehört, und zwei derselben Klasse angehörende Randfunktionen $\mathfrak{f}_1(\tau)$ und $\mathfrak{f}_{-1}(\tau)$ existieren, gegen die $\mathfrak{f}(s)$ im Mittel über τ mit dem Exponenten 2 konvergiert, wenn man aus dem Inneren des Streifens gegen den Rand geht. Wie man leicht überlegt, sind diese beiden Funktionen, falls sie existieren, im Lebesgueschen Sinne eindeutig bestimmt.

Bevor wir weitere allgemeine Eigenschaften der $\mathfrak{T}$-Transformation zeigen, mögen noch einige spezielle Formeln abgeleitet werden.

Hilfssatz. *1. Ist n eine positive ganze Zahl, so ist für $0<\Re s<n$*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sz}}{(1+e^z)^n}\,dz=(-1)^{n-1}\binom{s-1}{n-1}\frac{1}{\sin\pi s}. \tag{19}$$

2. Für $0<\Re s<1$ ist

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-s)z}}{e^z-e^{\xi}}\,dz=e^{-s\zeta}\operatorname{cotg}\pi s. \tag{20}$$

3. Für $|\Re s|<1$ ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s\frac{dx}{x-\xi}=\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^s\operatorname{cotg}\pi s-\frac{1}{\sin\pi s}. \tag{21}$$

Beweis. Wir setzen

$$J_1(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sz}}{1+e^z}\,dz.$$

Dieses Integral stellt eine in dem Streifen $0<\Re s<1$ reguläre analytische Funktion von s dar. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, daß auch noch $\Im s>0$ ist, so kann man die Residuenmethode auf die obere Halbebene anwenden und erhält

$$J_1(s) = -2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{s i \pi (2n+1)} = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Wegen der Regularität gilt die Formel dann in dem ganzen Streifen.

Weiter setzen wir

$$J_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{zs}}{(1+e^z)^n}\, dz.$$

$J_n(z)$ ist in dem Streifen $0<\Re s<n$ regulär. Durch partielle Integration erhält man die Rekursionsformel

$$J_n(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{zs}}{(1+e^z)^n}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{n}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{z(s+1)}}{(1+e^z)^{n+1}}\, dz = \frac{n}{s} J_{n+1}(s+1).$$

Beschränkt man sich also zunächst auf den Streifen $n-1<\Re s<n$, so folgt

$$J_n(s) = \frac{s-1}{n-1} J_{n-1}(s-1) = \frac{s-1}{n-1} \frac{s-2}{n-2} \cdots \frac{s-n+1}{1} J_1(s-n+1)$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{\pi}{\sin \pi s} \binom{s-1}{n-1}.$$

Wegen der Regularität gilt dies dann auch in $0<\Re s<n$. Damit ist die Formel (19) bewiesen.

Beachtet man, daß

$$K(s) = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-s)z}}{e^z - e^\zeta}\, dz$$

eine in $0<\Re s<1$ reguläre analytische Funktion ist und schreibt

$$K(s) = \int_{\zeta\to} \frac{e^{(1-s)z}}{e^z - e^\zeta}\, dz + \int_{\to\zeta} \frac{e^{(1-s)z}}{e^z - e^\zeta}\, dz,$$

so ergibt sich für das zweite Integral $i\pi e^{-s\zeta}$. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, daß $\Im s<0$, so kann man das erste Integral mittels Anwendung der Residuenmethode auf die obere z-Halbebene auswerten und erhält

$$2\pi i e^{-s\zeta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s 2\pi i n} = \frac{2\pi i e^{-s\zeta}}{e^{2\pi i s} - 1}$$

also

$$K(s) = i\pi e^{-s\zeta} + \frac{2\pi i e^{-s\zeta}}{e^{2\pi i s} - 1} = \pi e^{-s\zeta} \operatorname{cotg} \pi s.$$

Wegen der Regularität gilt dies dann wieder in dem ganzen Streifen, d.h. es gilt (20).

Die Beziehung (21) stellt nur eine Verallgemeinerung der von TRICOMI für reelle s angegebenen Relation (7) dar. Wie man sich leicht überzeugt, wird aber durch die linke Seite von (21) eine in $|\Re s|<1$ regulär analytische Funktion beschrieben, woraus sich die Behauptung unmittelbar ergibt. Im übrigen kann man diese Formel nach Durchführung der Substitution (9) unter Beachtung von (19) und (20) auch leicht direkt beweisen.

Damit folgt dann, wie in der Einleitung schon angedeutet, unter Beachtung der Vertauschungsregel (4):

Satz 4. *Ist $F(x)$ in $(-1, 1)$ eine Funktion der Klasse L^p $(p>1)$, so gilt für $|\Re s|<1-1/p$ die Beziehung*

$$\mathfrak{T}\{\mathfrak{H}\{F(x)\}\} = \mathfrak{f}(s)\cdot\operatorname{cotg}\pi s - \mathfrak{f}(0)\frac{1}{\sin\pi s}. \tag{22}$$

In diesem Zusammenhang interessiert natürlich auch die dem Faltungssatz der Laplace-Transformation entsprechende Aussage. Diese nimmt hier die folgende Form an:

Satz 5. *Sind $F(x)$ und $G(x)$ in $(-1, 1)$ Funktionen der Klasse L^p $(p>1)$ und wird*

$$H(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2}{(1-x\xi)^2}\, G\left(\frac{x-\xi}{1-x\xi}\right)\cdot F(\xi)\, d\xi \tag{23}$$

gesetzt, so gehört $H(x)$ jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1<p$ an, und für $\Re s<1-1/p$ ist

$$\mathfrak{T}\{H(x)\} = \mathfrak{T}\{F(x)\}\cdot\mathfrak{T}\{G(x)\}. \tag{24}$$

Ist $G(x)$ eine Funktion der Klasse L^q mit $q>p$, so gehört auch $H(x)$ zu L^p.

Beweis. Wie man sich leicht überzeugt, entspricht der Funktion $H(x)$ bei der Substitution (9) der Ausdruck

$$h(z) = \frac{(1+e^z)^2}{2e^z}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z-\zeta)\,2e^{z-\zeta}}{(1+e^{z-\zeta})^2}\cdot\frac{f(\zeta)\,2e^{\zeta}}{(1+e^{\zeta})^2}\, d\zeta. \tag{25}$$

Setzt man

$$h_1(z,\sigma) = \frac{h(z)\,2e^{z(1-\sigma)}}{(1+e^z)^2}$$

und führt entsprechend die Funktionen $g_1(z,\sigma)$ und $f_1(z,\sigma)$ ein, so geht (25) in

$$h_1(z,\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(z-\zeta,\sigma)\cdot f_1(\zeta,\sigma)\, d\zeta \tag{26}$$

über. Nun ist aber $g_1(z,\sigma)$ für $|\sigma|<1-1/p$ in z eine Funktion der Klasse L und es gilt für ihre Fourier-Transformierte

$$\mathfrak{F}\{g_1(z,\sigma)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi z} g_1(z,\sigma)\, dz = \mathfrak{T}\{G(x)\}.$$

Die entsprechende Aussage gilt auch für $f_1(z,\sigma)$. Beachtet man schließlich noch, daß $f_1(z,\sigma)$ für jedes σ mit $|\sigma| \leq 1 - 1/p$ zur Klasse L^p gehört, so folgt[8]:

1. $h_1(z,\sigma)$ gehört für $|\sigma| < 1 - 1/p$ in z zur Klasse L^p,
2. $h_1(z,\sigma)$ hat die Fourier-Transformierte $\mathfrak{f}(s)\,\mathfrak{g}(s)$.

Damit ist insbesondere die Beziehung (24) bewiesen. Aus der ersten Eigenschaft ergibt sich weiter genau wie oben [Formel (16)], daß dann $H(x)$ zu jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ gehört.

Ist $q > p$, so kann die Betrachtung auch an den Stellen $\sigma = \pm\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ durchgeführt werden und man folgert daraus, daß $H(x)$ eine Funktion der Klasse L^p ist.

Abschließend sollen nun noch einige spezielle Transformierte in einer Tabelle zusammengestellt werden.

Tabelle 1.

	$F(x)$	$\mathfrak{f}(s)$
1	1	$\frac{2\pi s}{\sin \pi s}$, $\quad \lvert\Re s\rvert < 1$
2	x	$-\frac{2\pi s^2}{\sin \pi s}$, $\quad \lvert\Re s\rvert < 1$
3	x^n	$-\frac{2\pi}{\sin \pi s} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \binom{\nu - s}{n+1}$, $\quad \lvert\Re s\rvert < 1$
4	$\left[\ln \frac{1+x}{1-x}\right]^n$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{2\pi s}{\sin \pi s}$, $\quad \lvert\Re s\rvert < 1$
5	$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha$, $\quad \lvert\Re \alpha\rvert < 1$	$\frac{2\pi(s-\alpha)}{\sin \pi(s-\alpha)}$, $\quad -1 + \Re\alpha < \Re s < 1 + \Re\alpha$
6	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha$, $\quad \lvert\Re \alpha\rvert < \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{\cos \pi(s-\alpha)}$, $\quad -\frac{1}{2} + \Re\alpha < \Re s < \frac{1}{2} + \Re\alpha$
7	$\frac{[\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}]^2}{x\sqrt{1-x^2}}$	$-4\pi \frac{1 - \cos \pi s}{\sin 2\pi s}$, $\quad \lvert\Re s\rvert < \frac{1}{2}$

Desgleichen werden in der folgenden Tabelle die Transformierten einiger Integraloperationen angegeben. Dabei setzen wir voraus, daß die Funktion $F(x)$, auf die die Operation angewendet wird, einer Klasse L^p mit $1 < p \leq 2$ angehört. In der dritten Spalte der Tabelle ist der Klassenexponent angeführt, zu dem die durch die Integraloperation erzeugte Funktion $H(x)$ sicher angehört.

[8] TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2. Aufl., S. 106, Theorem 77. Oxford 1948.

Tabelle 2.

	$H(x)$		$\mathfrak{h}(x)$
1	$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{F(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$	p	$\mathfrak{f}(s)\operatorname{cotg}\pi s-\frac{\mathfrak{f}(0)}{\sin\pi s}$
2	$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi}{1-x\xi}F(\xi)\,d\xi$	$p-\varepsilon$ $\varepsilon>0$ ε bel.	$-\frac{1}{\sin\pi s}[\mathfrak{f}(s)-\mathfrak{f}(0)]$
3	$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{F(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$	$p-\varepsilon$	$-\operatorname{tg}\pi s\cdot\mathfrak{f}(s)$
4	$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{F(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$ $-1<\Re\alpha<0$	$q-\varepsilon$ *)	$\operatorname{cotg}\pi(s-\alpha)\cdot\mathfrak{f}(s)$
5	$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{i\beta}\frac{F(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$	p	$\operatorname{cotg}\pi(s-i\beta)\cdot\mathfrak{f}(s)-\frac{\mathfrak{f}(i\beta)}{\sin\pi(s-i\beta)}$

Die erste dieser Relationen ist mit (22) identisch. $H(x)$ gehört dabei als Hilbert-Transformierte[1]) mit $F(x)$ zu L^p. Um die zweite Relation zu beweisen, beachte man, daß der Funktion $H(x)$ die Funktion

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+e^z)(e^\zeta-1)e^\zeta}{(e^z+e^\zeta)(1+e^\zeta)^2}f(\zeta)\,d\zeta$$

entspricht. Weiter erhält man für $0<\Re s<1$ unter Benutzung der Formel (19)

$$\left\{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-s)z}}{(1+e^z)(e^z+e^\zeta)}\,dz&=\frac{1}{e^\zeta-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-s)z}}{1+e^z}\,dz-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-s)z}}{e^z+e^\zeta}\,dz\right\}\\&=\frac{1}{e^\zeta-1}\cdot\frac{\pi}{\sin\pi s}[1-e^{-s\zeta}].\end{aligned}\right.\tag{27}$$

Nun sind aber beide Seiten von (27) in dem Gebiet $|\Re s|<1$ regulär, und mithin gilt diese Beziehung auch in diesem Streifen.

Bildet man zunächst einmal rein formal die Transformierte der Funktion $H(x)$, so wird

$$\mathfrak{h}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{(1-s)z}}{(1+e^z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^\zeta-1)e^\zeta f(\zeta)}{(e^z+e^\zeta)(1+e^\zeta)^2}\,d\zeta.\tag{28}$$

*) $\operatorname{Min}\left[-\Re\alpha,\ 1+\Re\alpha,\ 1-\frac{1}{p}\right]=1-\frac{1}{q}$.

Nach dem Satz von Fubini darf darin die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, wenn $|\Re s| < 1 - 1/p$, denn es ist wegen (27)

$$(29)\quad \begin{cases} 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{\zeta}-1|\,e^{\zeta}}{(1+e^{\zeta})^2}\,|f(\zeta)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-\sigma)z}}{(e^z+1)(e^z+e^{\zeta})}\,dz\,d\zeta \\ \qquad = \frac{2\pi}{\sin \pi\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\zeta}(1-e^{-\sigma\zeta})}{(1+e^{\zeta})^2}\,|f(\zeta)|\,\frac{|e^{\zeta}-1|}{e^{\zeta}-1}\,d\zeta \end{cases}$$

und dieses Integral existiert, falls $|\sigma| < 1 - 1/p$ ist. Setzt man nämlich

$$F_2(x) = \begin{cases} |F(x)| & \text{für } x \geq 0 \\ -|F(x)| & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

so gehört auch $F_2(x)$ zur Klasse L^p und mithin kann für (29) auch

$$\frac{\pi}{\sin \pi\sigma}\,[\mathfrak{f}_2(0) - \mathfrak{f}_2(\sigma)]$$

geschrieben werden. Dieser Ausdruck existiert nach Satz 1, wenn $|\sigma| < 1 - 1/p$ ist, und mithin ist dann auch die Vertauschung der Integrationsreihenfolge erlaubt.

Führt man die letzte Betrachtung speziell für $s = 0$ durch, so sieht man, daß $h(z)\,e^z/(1+e^z)^2$ zur Klasse L gehört, d.h., $H(x)$ gehört zu L.

Führt man die Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (28) durch, so folgt wegen (27)

$$(30)\qquad \mathfrak{h}(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\,[\mathfrak{f}(0) - \mathfrak{f}(s)].$$

Nun gehört aber die rechte Seite für jedes $|\sigma| < 1 - 1/p$ als Funktion von τ zur Klasse L^2, da wir weiter $H(x)$ schon als absolut integrabel erkannt haben, so ergibt sich damit nach Satz 3, daß $H(x)$ Funktion jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ ist.

Die restlichen Beziehungen der Tabelle 2 werden im Laufe der folgenden Untersuchungen bewiesen.

3. Die Integralgleichung $\mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x)$.

Diese Integralgleichung ist bereits mehrfach untersucht worden[9]). Trotzdem soll hier noch einmal darauf eingegangen werden, da sich die Voraussetzungen noch etwas allgemeiner fassen lassen, als es in den genannten Arbeiten der Fall ist.

[9]) SCHRÖDER, K.: Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Preuß. Akad. phys.-math. Kl. **1938**, 345—362. — SÖHNGEN, H.: Die Lösung der Integralgleichung ... und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Math. Z. **45**, 245—264 (1939). — WEISSINGER, J.: Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie. Math. Z. **47**, 16—33 (1941). — TRICOMI, F. G.[2]). — NICKEL, K.: Lösung eines Integralgleichungssystems aus der Tragflügeltheorie. Math. Z. **54**, 81—96 (1951).

Satz 6. *Gehört die Funktion $G(x)$ in $(-1, 1)$ einer Klasse L^p $(p>1)$ an, so wird die allgemeinste einer Klasse L^q $(q>1)$ angehörende Lösung der Integralgleichung*

$$\mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x), \quad |x|<1$$

für fast alle x aus diesem Intervall durch

$$F(x) = -\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{G(\xi)}{x-\xi}\, d\xi + \frac{C}{\pi\sqrt{1-x^2}} \tag{31}$$

geliefert, wobei $C = \int_{-1}^{1} F(x)\, dx$ beliebig vorgegeben werden kann.

Ist $p \leq 2$, so gehört $F(x)$ zu jeder Klasse L^q mit $q<p$.

Beweis. Da wir uns nur für solche Lösungen interessieren, die einer Klasse L^q $(q>1)$ angehören und dann damit auch $\mathfrak{H}\{F(x)\}$ wieder aus dieser Klasse ist, so darf auf die Integralgleichung die $\mathfrak{T}$-Transformation angewendet werden, und man erhält als notwendige Bedingung der $F(x)$ genügen muß,

$$\operatorname{cotg}\pi s \cdot \mathfrak{f}(s) - \frac{\mathfrak{f}(0)}{\sin \pi s} = \mathfrak{g}(s) \tag{32}$$

d.h.,

$$\mathfrak{f}(s) = \operatorname{tg}\pi s \cdot \mathfrak{g}(s) + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\cos \pi s}. \tag{33}$$

Darauf könnte man die Umkehrformel (12) anwenden und daraus $F(x)$ berechnen. Wir schlagen hier aber einen anderen Weg ein, der uns schneller zum Ziel führt.

Es ist

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\pi s \cdot \mathfrak{g}(s) + \dfrac{\mathfrak{f}(0)}{\cos \pi s} = \left(\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi s - \dfrac{1}{\sin \pi s}\right)\mathfrak{g}(s) - \\ \qquad - \left(\operatorname{cotg}\pi s \cdot \mathfrak{g}(s) - \dfrac{\mathfrak{g}(0)}{\sin \pi s}\right) + \dfrac{1}{\sin \pi s}\left(\mathfrak{g}(s) - \mathfrak{g}(0)\right) + \dfrac{\mathfrak{f}(0)}{\cos \pi s} \end{cases} \tag{34}$$

und

$$\left(\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi s - \frac{1}{\sin \pi s}\right)\mathfrak{g}(s) = 2\,\frac{1-\cos \pi s}{\sin 2\pi s}\,\mathfrak{g}(s).$$

Darin ist der erste Faktor [s. Tabelle 1, Formel (7)] die Transformierte der Funktion

$$H(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\left[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right]^2}{x\sqrt{1-x^2}}$$

und mithin ist nach dem Faltungssatz sowie den Formeln (1) und (2) der Tabelle 2

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\pi s \cdot \mathfrak{g}(s) + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\cos \pi s} &= \mathfrak{T}\left\{ \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2}{(1-x\xi)^2} H\left(\frac{x-\xi}{1-x\xi}\right) G(\xi)\, d\xi - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1} \frac{G(\xi)}{x-\xi}\, d\xi - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi\, G(\xi)}{1-x\xi}\, d\xi + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\pi\sqrt{1-x^2}} \right\} \\ &= \mathfrak{T}\left\{ -\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{G(\xi)}{x-\xi}\, d\xi + \frac{\mathfrak{f}(0)}{\pi\sqrt{1-x^2}} \right\} \end{aligned}$$

d.h., die Transformierte der rechten Seite von (31) genügt in der Tat der Gl. (33). Weiter folgt aus der Zerlegung (34) sowie dem Faltungssatz und den in der Tabelle 2 in den Formeln (1) und (2) gemachten Aussagen, daß die rechte Seite von (31) für $p \leq 2$ jeder Klasse L^{p_1} mit $p_1 < p$ angehört. Schließlich ist damit auch die Formel 3 der Tabelle 2 bewiesen.

Zu zeigen bleibt noch, daß die rechte Seite von (31), wir wollen sie mit $F_1(x)$ bezeichnen, der Integralgleichung genügt. Die Transformierte von $F_1(x)$ ist mit $C = \mathfrak{f}(0)$ gleich der rechten Seite von (33), insbesondere also $\mathfrak{f}_1(0) = \mathfrak{f}(0)$. Weiter kann die Hilbert-Transformierte von $F_1(x)$ gebildet werden, wir wollen sie $G_1(x)$ nennen. Dann ist

$$\mathfrak{T}\{G_1(x)\} = \operatorname{cotg} \pi s \cdot \mathfrak{T}\{F_1(x)\} - \frac{\mathfrak{f}(0)}{\sin \pi s} = \mathfrak{g}(s)$$

d.h., $G(x)$ und $G_1(x)$ haben dieselbe Transformierte und stimmen daher, da sie zur Klasse L gehören, fast überall überein. Dies folgt aus dem entsprechenden Satz über die Fourier-Transformation. Damit ist der Satz 6 vollständig bewiesen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Integralgleichung im allgemeinen auch dann keine Lösung der Klasse L^2 zuläßt, wenn $G(x)$ in dieser Klasse liegt. Zur quadratischen Integrabilität von $F(x)$ ist ja nach Satz 2 notwendig, daß $\mathfrak{f}(s)$ im Mittel für $\sigma \to \pm 1/2$ gegen Randwerte konvergiert, die der Klasse L^2 angehören. Dies ist aber wegen des Aufbaus (33) der Funktion $\mathfrak{f}(s)$ im allgemeinen nicht der Fall und kann auch durch geeignete Wahl von $\mathfrak{f}(0)$ nicht erreicht werden.

4. Die Integralgleichung $F(x) + \lambda \mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x)$.

Wir wollen dabei zulassen, daß der Parameter $\lambda \neq 0$ auch komplex sein kann. Die Funktion $G(x)$ gehöre einer Klasse L^p $(p > 1)$ an. Wir suchen auch hier wieder diejenigen Lösungen $F(x)$, die in einer Klasse L^q $(q > 1)$ liegen.

Im homogenen Fall ergibt sich für die $\mathfrak{T}$-Transformierte von $F(x)$

$$\mathfrak{f}(s) = \frac{\lambda \mathfrak{f}(0)}{\sin \pi s + \lambda \cos \pi s}. \tag{35}$$

Soll $F(x)$ einer Klasse L^q $(q > 1)$ angehören, so muß notwendig $\mathfrak{f}(s)$ in einem Streifen um die imaginäre Achse regulär sein, d.h., der Nenner der rechten Seite von (35) darf keine Nullstellen auf der imaginären Achse haben. Diese liegen aber an den Stellen $s = \alpha$, für die

$$\operatorname{tg} \pi \alpha = -\lambda, \quad \text{d.h.} \quad e^{i 2\pi \alpha} = \frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda} \tag{36}$$

ist. Damit α nicht rein imaginär ist, ist notwendig und hinreichend, daß λ nicht in dem Intervall $[-i, i]$ der imaginären Achse liegt. Dabei sind auch die Endpunkte mit auszunehmen, denn für $\lambda = -i$ z.B. nimmt ja die rechte Seite von (35) die Form

$$\frac{\mathfrak{f}(0)}{e^{i\pi s}}$$

an. Das ist aber bestimmt keine $\mathfrak{T}$-Transformierte, denn dieser Ausdruck verschwindet für $s = i\tau \to i\infty$ nicht.

Damit ist gezeigt, daß die homogene Gleichung nur die triviale Lösung zuläßt, wenn λ in dem Intervall $[-i, i]$ liegt.

Wir setzen nun voraus, daß λ nicht dem genannten Intervall angehört und verstehen unter α diejenige Lösung der Gl. (36), für die

$$-1 < \Re\,\alpha \leq 0 \tag{37}$$

ist. Damit ist α eindeutig bestimmt und (35) kann in der Form

$$\mathfrak{f}(s) = -\frac{\sin \pi\alpha\, \mathfrak{f}(0)}{\sin \pi(s-\alpha)} \tag{38}$$

geschrieben werden. Aus der Tabelle 1 Formel (6) entnimmt man, daß

$$F_0(x) = -\frac{\mathfrak{f}(0)\sin\pi\alpha}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} = -\frac{\mathfrak{f}(0)\sin\pi\alpha}{\pi(1-x)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} \tag{39}$$

eine Funktion ist, die einer Klasse L^q $(q>1)$ angehört und deren $\mathfrak{T}$-Transformierte gleich der rechten Seite von (38) ist. Daraus folgert man genau wie früher, daß $F_0(x)$ auch der homogenen Gleichung genügt und mithin die allgemeine Lösung dieser Gleichung darstellt.

Besonders interessant sind natürlich die Funktionen, die bei der endlichen Hilbert-Transformation in sich übergehen. Für sie ist $\lambda = -1$ und mithin $\alpha = -3/4$. Die Gesamtheit dieser Funktionen wird also durch

$$\frac{C}{(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{3}{4}}}$$

beschrieben.

Wir kommen nun zu dem inhomogenen Fall und wollen auch dabei zunächst voraussetzen, daß λ nicht in dem Intervall $[-i, i]$ liegt. Für die Transformierte der gesuchten Lösung erhält man

$$\mathfrak{f}(s) = \frac{\mathfrak{g}(s)\sin\pi s + \lambda\,\mathfrak{f}(0)}{\sin\pi s + \lambda\cos\pi s} \tag{40}$$

eine Funktion, die in einem Streifen um die imaginäre Achse regulär ist. Statt auf (40) die Umkehrformel anzuwenden — ursprünglich wurde das Ergebnis so gewonnen — gehen wir der Kürze wegen, von der Funktion

$$H(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} - \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-x^2}}\right]\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$

aus, der bei der Substitution (9)

$$h(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(1+e^z)^2}{2e^z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{\zeta-z}}\,\frac{2e^{\zeta}g(\zeta)}{(1+e^{\zeta})^2}\,d\zeta \tag{41}$$

entspricht. Die Transformierte von $H(x)$ wird mithin

$$(42)\quad \begin{cases} \mathfrak{h}(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{(\zeta-z)}}\,\frac{2e^{\zeta}g(\zeta)}{(1+e^{\zeta})^2}\,d\zeta\,dz \\ \quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{\zeta}g(\zeta)}{(1+e^{\zeta})^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz}\,\frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{(\zeta-z)}}\,dz\,d\zeta. \end{cases}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist dabei für Werte von s aus einem geeignet zu bestimmenden Streifen um die imaginäre Achse erlaubt, denn es existiert das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{\zeta}|g(\zeta)|}{(1+e^{\zeta})^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\Re s}\left|\frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{(\zeta-z)}}\right| dz\,d\zeta,$$

da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\Re s}\left|\frac{e^{-(\zeta-z)\alpha} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{\zeta-z}}\right| dz = e^{-\zeta\Re s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u\Re s}\left|\frac{e^{\alpha u} - e^{-\frac{1}{2}u}}{1-e^{-u}}\right| du$$

und mit geeigneten Konstanten C und $\delta > 0$

$$\left|\frac{e^{\alpha u} - e^{-\frac{1}{2}u}}{1-e^{-u}}\right| < C\,e^{-\delta|u|}$$

ist. Die Vertauschung darf also nach dem Satz von Fubini sicher dann vorgenommen werden, wenn $|\Re s| < \operatorname{Min}(1 - 1/p, \delta)$ ist. Insbesondere sieht man so für $s = 0$ ein, daß $h(z)\,e^{z}/(1+e^{z})^2$ und damit auch $H(x)$ zur Klasse L gehört. Weiter liefert die Formel (19)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sz}\,\frac{e^{-\alpha(\zeta-z)} - e^{\frac{1}{2}(\zeta-z)}}{1-e^{\zeta-z}}\,dz = \pi\,e^{-\zeta s}[\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi(s-\alpha)].$$

und damit folgt dann schließlich aus (42)

$$\mathfrak{h}(s) = [\operatorname{tg}\pi s + \operatorname{cotg}\pi(s-\alpha)]\,\mathfrak{g}(s) = \frac{\cos\pi\alpha}{\cos\pi s\sin\pi(s-\alpha)}\,\mathfrak{g}(s)$$

Darin ist der erste Faktor in dem Streifen $|\Re s| < \operatorname{Min}(-\Re\alpha, 1+\Re\alpha, \frac{1}{2})$ regulär und verschwindet im Unendlichen exponentiell. Setzt man

$$\operatorname{Min}\left[-\Re\alpha,\ 1+\Re\alpha,\ \frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{p}\right] = 1 - \frac{1}{p_1}, \qquad (p_1 > 1)$$

so ist $\mathfrak{h}(s)$ in $|\Re s| < 1 - 1/p_1$ regulär und gehört dort als Funktion von τ sicher zu L^2 in $(-\infty, +\infty)$. Aus Satz 2 folgt dann, daß $H(x)$ sicher in jeder Klasse L^q mit $q < p_1$ liegt. Weiter zeigten wir bereits, daß

$$\mathfrak{T}\left\{-\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right\} = \operatorname{tg}\pi s\cdot\mathfrak{g}(s)$$

ist, und die Originalfunktion jeder Klasse L^q mit der genannten Eigenschaft angehört. Damit folgt für $-1<\Re\,\alpha<0$ die Beziehung

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right\}=\operatorname{cotg}\pi(s-\alpha)\cdot\mathfrak{g}(s)\,. \tag{43}$$

Gleichzeitig ist bewiesen, daß die Originalfunktion in (43) sicher in jeder Klasse L^q mit $q<p_1$ liegt, d.h., es gilt die Formel (4) in Tabelle 2. Damit zeigt man nun leicht, daß die Funktion

$$F_1(x)=\frac{1}{1+\lambda^2}\,G(x)-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\,\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1+x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\,, \tag{44}$$

die ja ebenfalls zu L^q gehört, die Transformierte

$$\mathfrak{T}\{F_1(x)\}=\frac{\mathfrak{g}(s)}{1+\lambda\operatorname{cotg}\pi s} \tag{45}$$

hat, woraus dann genau wie in III. folgt, daß $F_1(x)$ auch der Integralgleichung genügt, und zwar stellt $F_1(x)$ diejenige Lösung dar, für die

$$\int_{-1}^{1}F(x)\,dx=0$$

ist. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Integralgleichung ergibt sich dann durch Superposition von (39) und (44) zu

$$F(x)=F_1(x)+F_0(x)\,, \tag{46}$$

wobei die in $F_0(x)$ steckende Konstante $\mathfrak{f}(0)$ beliebig gewählt werden kann. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß λ nicht in dem Intervall $[-i,\,i]$ liegt.

Zu untersuchen bleiben noch die Verhältnisse, wenn λ dem Ausnahmeintervall angehört.

Setzt man speziell $G(x)=1$ und $\lambda=-i$, so geht (40) in

$$\mathfrak{f}(s)=i\,[2\pi s-i\,\mathfrak{f}(0)]\,e^{-i\pi s}$$

über. Da dieser Ausdruck für $s\to i\,\infty$ nicht verschwindet, so ist er nicht die Transformierte einer Funktion der Klasse L, d.h., die inhomogene Integralgleichung läßt für $\lambda=-i$ im allgemeinen keine Lösung zu. Entsprechendes gilt auch für $\lambda=+i$.

Ist $\lambda=i\,\lambda_1$ mit $|\lambda_1|<1$ aber $\lambda_1\neq 0$, so verstehen wir unter α die rein imaginäre Größe, die der Gl. (36) genügt. Da α in dem Regularitätsbereich der Funktion $\mathfrak{g}(s)$ liegt, so kann eine Lösung der von uns betrachteten Art nur dann erwartet werden [s. (40)], wenn $\mathfrak{g}(\alpha)\sin\pi\alpha+\lambda\,\mathfrak{f}(0)=0$, d.h.

$$\mathfrak{f}(0)=\cos\pi\alpha\,\mathfrak{g}(\alpha) \tag{47}$$

ist, denn anderenfalls würde ja $\mathfrak{f}(s)$ eine Singularität auf der imaginären Achse besitzen. Geht man nun mit diesem Wert von $\mathfrak{f}(0)$ zunächst einmal rein

formal in den Ausdruck (46) ein, so erhält man die Funktion

$$F_3(x) = \frac{G(x)}{1+\lambda^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\left[\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right]^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi, \tag{48}$$

die mit $G(x)$ auch wieder zur Klasse L^p gehört. Wir wollen zeigen, daß sie der Integralgleichung genügt und bilden dazu ihre Transformierte und zeigen von dieser, daß sie der Gl. (40) genügt. Daraus folgt dann auch umgekehrt, daß die Integralgleichung befriedigt wird.

Es ist

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s-\alpha}\oint_{-1}^{1}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi.$$

Ist $|\Re s| < 1 - 1/p$, so darf darin die Integrationsreihenfolge vertauscht werden[10]) und man erhält mit (21)

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha}\cdot\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right\} = \mathfrak{g}(s)\operatorname{cotg}\pi s - \frac{\mathfrak{g}(\alpha)}{\sin\pi(s-\alpha)},$$

d.h., es gilt die Bez. (5) der Tabelle 2. Damit wird dann in der Tat

$$\mathfrak{T}\{F_3(x)\} = \frac{\mathfrak{g}(s)\sin\pi s - \mathfrak{g}(\alpha)\sin\pi\alpha}{\sin\pi s + \lambda\cos\pi s}.$$

Die Funktion $F_3(x)$ genügt also auch der inhomogenen Integralgleichung und stellt damit die einzige Lösung dar, die diese besitzt, wenn $\lambda = i\lambda_1$ mit $-1 < \lambda_1 < 1$ ist.

Abschließend wollen wir noch untersuchen, wann die Integralgleichung Lösungen besitzt, die zu L^2 gehören. Wir wollen dabei voraussetzen, daß $G(x)$ selbst in dieser Klasse liegt. Wie aus dem Satz 2 hervorgeht, ist für die quadratische Integrabilität von $F(x)$ notwendig, daß $\mathfrak{f}(s)$ in dem Streifen $|\Re s| < 1/2$ regulär und als Funktion von τ in $(-\infty, \infty)$ zu L^2 gehört. Weiter müssen zwei Randfunktionen $\mathfrak{f}_1(\tau)$ und $\mathfrak{f}_{-1}(\tau)$ in der Klasse L^2 existieren, für die

$$\lim_{\substack{\sigma\to\frac{1}{2}\\ |\sigma|<\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^2\,d\tau = \lim_{\substack{\sigma\to-\frac{1}{2}\\ |\sigma|<\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{f}(\sigma+i\tau)-\mathfrak{f}_1(\tau)|^2\,d\tau = 0$$

ist. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt und weiß man, daß $F(x)$ zur Klasse L gehört, so folgt auch daraus nach Satz 3, daß $F(x)$ eine Funktion der Klasse L^2 ist.

Die Fälle $\lambda = \pm i$ können wir sofort ausschließen, da dann, wie wir schon sahen, die Integralgleichung im allgemeinen keine Lösung besitzt. Weiter wollen wir annehmen, daß α nicht von der Form $\alpha = -\frac{1}{2} + i\beta$ ist (β reell). Setzt man dies voraus, so hat die durch (40) gegebene Funktion $\mathfrak{f}(s)$ im all-

[10]) TRICOMI, F. G.: On the finite Hilbert-Transformation. Quart. J. Math. (2) **2**, 202 (1951).

gemeinen genau einen Pol im Inneren des Streifens $|\Re s| < 1/2$, und sie ist dort dann und nur dann regulär wenn $\mathfrak{f}(0)$ der Bedingung (47) genügt. Diese muß notwendig erfüllt sein, wenn $F(x)$ zur Klasse L^2 gehören soll. Diese Bedingung reicht aber auch aus, denn ist sie erfüllt, so ist $\mathfrak{f}(s)$ in $|\Re s| < 1/2$ regulär, und es existieren zwei Randfunktionen mit den verlangten Eigenschaften, da $\mathfrak{g}(s)$ derartige Randfunktionen besitzt, und der Nenner in der Umgebung der Ränder regulär ist und auf diesen mit τ über alle Grenzen wächst. Weiter gehört $F(x)$, wie wir früher schon zeigten, zur Klasse L. Die Integralgleichung hat also in diesem Fall genau eine Lösung der Klasse L^2, und zwar wird diese Lösung durch den Ausdruck (48) geliefert, denn dieser entspricht ja der Bedingung (47).

Ist α von der Form $-\frac{1}{2} + i\beta$, d.h., $\lambda = i\lambda_1$ mit reellem λ_1 und $|\lambda_1| > 1$, so ist zwar $\mathfrak{f}(s)$ für jede Wahl von $\mathfrak{f}(0)$ in $|\Re s| < 1/2$ regulär, der Nenner von (40) hat dann aber auf beiden Rändern einfache Nullstellen, und man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{f}(s)$, wie man die Konstante $\mathfrak{f}(0)$ auch wählt, im allgemeinen Fall keine Randfunktionen besitzt, die in $(-\infty, \infty)$ zu L^2 gehören, denn die Randfunktionen von $\mathfrak{f}(s)$ werden ja durch (40) geliefert, wenn man darin $\mathfrak{g}(s)$ durch die zugehörigen Randfunktionen ersetzt. Die Zugehörigkeit dieser Randfunktionen von $\mathfrak{f}(s)$ zur Klasse L^2, läßt sich im allgemeinen nicht dadurch erreichen, daß man $\mathfrak{f}(0)$ geeignet wählt, sie erfordert vielmehr ein geeignetes Verhalten der Funktion $\mathfrak{g}(s)$ bei Annäherung an die beiden Nullstellen des Nenners. Die Integralgleichung läßt also für derartige λ-Werte im allgemeinen keine Lösung aus der Klasse L^2 zu.

Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 7. *Ist $G(x)$ in $(-1, 1)$ eine Funktion der Klasse L^p $(p > 1)$ und werden solche Lösungen der Integralgleichung*

$$F(x) + \lambda \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x - \xi}\, d\xi = G(x)$$

gesucht, die in $(-1; 1)$ einer Klasse L^q $(q > 1)$ angehören, so gilt, wenn für $\lambda \neq \pm i$

$$\frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda} = e^{i 2\pi\alpha} \quad \text{mit} \quad -1 < \Re\alpha \leq 0$$

ist:

1. Ist $\lambda = i\lambda_1$ mit $-1 \leq \lambda_1 \leq 1$, so hat die homogene Gleichung nur die triviale Lösung. Liegt λ nicht in diesem Bereich, so wird die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch

$$\text{(I)} \qquad F_0(x) = -C \frac{\sin \pi\alpha}{\pi(1 - x)} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\alpha}$$

gegeben, wobei

$$C = \int_{-1}^{1} F_0(x)\, dx$$

ist.

2. Liegt λ nicht in dem in 1. genannten Intervall, so liefert der Ausdruck

$$(II)\quad F(x)=\frac{G(x)}{1+\lambda^2}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\cdot\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi+F_0(x),$$

wobei die Konstante $C=\int_{-1}^{1}F(x)\,dx$ beliebig vorgegeben werden kann, die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Ist $\lambda=i\lambda_1$ mit $-1<\lambda_1<1$, so besitzt die inhomogene Gleichung genau eine Lösung. Man erhält sie aus (II), *wenn man dort*

$$(III)\qquad C=\cos\pi\alpha\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}G(x)\,dx$$

setzt.

Ist $\lambda=\pm i$, so ist die inhomogene Gleichung im allgemeinen nicht lösbar.

3. Gehört $G(x)$ zur Klasse L^2 und werden Lösungen gesucht, die ebenfalls dieser Klasse angehören, so gilt:

Für $\lambda=i\lambda_1$ mit $|\lambda_1|\geq 1$ ist die Integralgleichung im allgemeinen nicht lösbar. Liegt dagegen λ nicht in diesem Bereich, so existiert genau eine Lösung. Man erhält sie aus (II), *wenn man dort die Konstante C gemäß der Bedingung* (III) *wählt.*

Ganz analog wie die obenstehende Integralgleichung lassen sich auch solche der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\,\mathfrak{H}^\nu\{F(x)\}=G(x)$$

behandeln. Die Bestimmung der Lösungen ist dann im wesentlichen gleichbedeutend mit der Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms.

5. Ein Beispiel aus der Festigkeitslehre.

Für die Bodenpressung einer Staumauer gibt TÖLKE[11]) das folgende Integralgleichungssystem an:

$$(49)\qquad V(x)=-\varepsilon\,\mathfrak{H}\{H(x)\},\qquad H(x)=\varepsilon k+\varepsilon\,\mathfrak{H}\{V(x)\}.$$

Dabei sind $V(x)$ und $H(x)$ die Vertikal- bzw. Horizontalkomponente der gesuchten Pressung, ε ist eine Konstante >1, die durch das Mauerwerk gegeben ist, k ist eine noch freie Konstante. Durch die Staumauer und die Füllung des Beckens sind weiter die folgenden drei Integrale

$$(50)\qquad \int_{-1}^{1}V(x)\,dx,\qquad \int_{-1}^{1}H(x)\,dx,\qquad \int_{-1}^{1}x\,V(x)\,dx$$

gegeben.

Sowohl von TÖLKE als auch von SCHMEIDLER wurden Näherungslösungen angegeben. Es soll hier die exakte Lösung bestimmt werden.

[11]) TÖLKE, F.: Talsperren. In Handbibliothek für Bauingenieure, III. Teil, Bd. 9, zweite Hälfte, erster Teil, S. 408. — SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, S. 427. Leipzig 1950.

Setzt man

$$F(x) = V(x) + i\,H(x),$$

so ist das System (49) gleichbedeutend mit der Integralgleichung

$$F(x) - i\,\varepsilon\,\mathfrak{H}\{F(x)\} = i\,\varepsilon\,k$$

deren allgemeine Lösung nach Satz 7 mit

$$\lambda = -i\,\varepsilon, \qquad \alpha = -\frac{1}{2} + i\,\beta, \qquad e^{2\pi\beta} = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$$

durch den Ausdruck (II) gegeben ist, wobei $G(x) = i\,\varepsilon\,k$ und die in $F_0(x)$ steckende Konstante

$$C = \mathfrak{f}(0) = \mathfrak{v}(0) + i\,\mathfrak{h}(0) = \int_{-1}^{1} [V(x) + i\,H(x)]\,dx$$

ist, sie ist wegen (50) als bekannt anzusehen.

Beachtet man die Formeln (19) und (20), so liefert eine einfache Rechnung die Beziehung

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{x-\xi}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\alpha} d\xi = \left\{-(1-x)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha} \operatorname{cotg}\pi\alpha + \frac{2\alpha}{\sin\pi\alpha} + \frac{1-x}{\sin\pi\alpha}\right\}$$

aus der dann

$$V(x) + i\,H(x) = \frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{\varepsilon^2-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{i\beta}\{[\mathfrak{v}(0) + i\,\mathfrak{h}(0)] + \pi\,k\,[x - 2i\,\beta]\}$$

folgt. Darin ist die Konstante k noch so zu bestimmen, daß $\int_{-1}^{1} x\,V(x)\,dx$ einen gegebenen Wert M annimmt. Wegen der aus (19) folgenden Gleichungen

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{i\beta} dx = \frac{2i\,\beta\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{i\beta} dx = \frac{(1-4\beta^2)\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2\varepsilon}$$

erhält man

$$\int_{-1}^{1} x\,F(x)\,dx = \{[\mathfrak{v}(0) + i\,\mathfrak{h}(0)]\,2i\,\beta + \pi\,k\,\tfrac{1}{2}\,[1 + 4\beta^2]\}$$

und damit

$$k = \frac{2M + 4\beta\,\mathfrak{h}(0)}{\pi(1+4\beta^2)},$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Darmstadt, Institut für Mathematik der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 13. September 1953.)

THOSAR, YESHWANT V.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 52—60 (1954)

Generalisations of Neumann's formula for $Q_n(y)$.

By
YESHWANT V. THOSAR.

Sometime back GORMLEY [3, p. 149, (5)] gave a generalisation of Neumann's formula

$$Q_n(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)}\,dx \tag{1}$$

in the form

$$Q_n^m(y) = \frac{(-1)^m}{2}(y^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)\,\frac{dx}{(y-x)}, \tag{2}$$

where n, m are positive integers and $n \geq m \geq 0$.

In this paper we first obtain two other generalisations (one of which is new) by a different method. These are further used to get some expansions involving $Q_n(y)$ and $Q_n^m(y)$. Some other results involving associated Legendre Functions are also derived.

We obtain a remarkable result (5) which is more general than all the three foregoing generalisations. It is then used for getting certain expansions involving the Q-functions.

Note. Throughout the paper n, m are positive integers and x, y are real such that $-1 \leq x \leq 1$, $y > 1$.

§ 1.

Take [4, p. 58]

$$\frac{1}{(y-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(x)\,Q_n(y), \tag{1.1}$$

where the expansion on the right is uniformly convergent for $-1 \leq x \leq 1$ and $y > 1$.

Differentiate (1.1) m times[1]) with respect to x, multiply by $(1-x^2)^{m/2}$ and use FERRER's definition of $P_n^m(x)$.

Then we get

$$\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} = \frac{1}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,P_n^m(x)\,Q_n(y) \tag{1.2}$$

valid for $n \geq m \geq 0$.

[1]) This and similar processes employed in this paper are easily justifiable.

If we differentiate (1.1) m times with respect to y, we get similarly

$$(1.3) \qquad \frac{(y^2-1)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(x)\, Q_n^m(y),$$

where m is any nonnegative integer.

Using the orthogonal properties of $P_n^m(x)$ and $P_n(x)$ with (1.2) and (1.3) respectively, we have the following integral representations for $Q_n(y)$ and $Q_n^m(y)$:

$$(3) \qquad Q_n(y) = \frac{m!}{2} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} P_n^m(x)\, dx,$$

where $n \geq m \geq 0$.

$$(4) \qquad Q_n^m(y) = \frac{(-1)^m}{2} \cdot m!\,(y^2-1)^{m/2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)^{m+1}}\, dx,$$

where n, m are any non negative integers.

When $m=0$ both the formulae (3) and (4) reduce to Neumann's equation (1).

(3) seems to be new while (4) was recorded by HOBSON [4, p. 116] and obtained by him by a different procedure.

Comparing (4) and (2) we get

$$(1.4) \qquad \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m/2} P_n^m(x) \frac{dx}{(y-x)} = m!\,(y^2-1)^m \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)^{m+1}}\, dx$$

while from (3) and (1), we similarly have

$$(1.5) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}} P_n^m(x)\, dx = \frac{(n+m)!}{m!\,(n-m)!} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{(y-x)}\, dx.$$

Differentiate (1.5) m times with respect to y under the sign of integration and then compare it with (1.4). Then we get

$$(1.6) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2} P_n^m(x)\, dx}{(y-x)} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\, (2m)!\, (y^2-1)^m \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2} P_n^m(x)\, dx}{(y-x)^{2m+1}}.$$

(1.4), (1.5) and (1.6) are all valid for $n \geq m \geq 0$.

§ 2.

We shall now evaluate some infinite series involving squares or products of the Q-functions.

Multiply both sides of (1.2) by $\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)^{m+1}}$ and integrate with respect to x between -1 and $+1$.

Then, using (3), we have

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\,Q_n^2(y) = \frac{(m!)^2}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{2m+2}}\,dx.$$

The integral on the right, on making the substitution $x = 2t-1$, becomes expressible in terms of the Beta function and therefore

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\,Q_n^2(y) = \frac{2^{2m}(m!)^4}{(2m+1)!}(y^2-1)^{-m-1}, \tag{2.1}$$

where $n \geq m \geq 0$.

Now multiply both sides of (1.2) by $\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)}$ and integrate with respect to x between -1 and 1. Then, by (2), we get

$$\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y) = \frac{(-1)^m m!}{2}(y^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{m+2}}\,dx.$$

By successive integration by parts m times, we find that

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{m+2}}\,dx = \frac{1}{(m+1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m}{(y-x)^2}$$

$$= \frac{2^m}{(m+1)}\int_{-1}^{1}\frac{P_m(x)}{(y-x)^2}\,dx$$

[by using the Rodrigues formula for $P_m(x)$]

$$= -\frac{2^{m+1}}{(m+1)}\,Q_m'(y) \text{ from (1).}$$

We get, finally,

$$\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y) = \frac{(-1)^{m+1}2^m m!}{(m+1)}(y^2-1)^{-\frac{m}{2}}\,Q_m'(y), \tag{2.2}$$

where $n \geq m \geq 0$.

Using, similarly, (4) with (1.3) and (1.1) respectively yields the following expansions:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\{Q_n^m(y)\}^2 = \frac{(m!)^2(y^2-1)^m}{2(2m+1)}\{(y-1)^{-2m-1} - (y+1)^{-2m-1}\}, \tag{2.3}$$

where m is any non negative integer.

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y)\\ &\quad = \frac{(-1)^m}{2}\cdot\frac{m!}{(m+1)}(y^2-1)^{m/2}\{(y-1)^{-m-1} - (y+1)^{-m-1}\},\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

where m is any non negative integer.

It is interesting to note that putting $m=0$ in either (2.1) or (2.2) or (2.3) or (2.4) yields the same result viz.

$$(2.5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n^2(y)=\frac{1}{(y^2-1)}\,.$$

§ 3.

We know that [4, p. 44]

$$(3.1)\qquad x^n=\sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}n]}(2n-4r+1)\,\frac{n(n-1)\dots(2r+2)}{(2n-2r+1)(2n-2r-1)\dots(2r+3)}\,P_{n-2r}(x)\,.$$

Differentiate both sides of (1) m times with respect to x (where m is an integer $\leq n$), multiply by $(1-x^2)^{m/2}$ and use FERRER's definition of $P_n^m(x)$. Then, we get

$$(3.2)\qquad \begin{cases} x^{n-m}(1-x^2)^{m/2} \\ \qquad =(n-m)!\displaystyle\sum_{r=0}^{[\frac{n-m}{2}]}(2n-4r+1)\cdot\frac{2^{n-2r}(n-r)!}{r!\,(2n-2r+1)!}\,P_{n-2r}^m(x)\,. \end{cases}$$

A result equivalent to (3.2) was obtained by GORMLEY [3, p. 150, (11)] by a different method.

Putting $n=p+q$, $m=q$, $x=\cos\vartheta$ in (3.2),

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \cos^p\vartheta\sin^q\vartheta \\ \qquad =\dfrac{p!}{(p+q)!}\displaystyle\sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}p]}\frac{2^{p+q-2r}(2p+2q-4r+1)\,(p+q)!\,(p+q-r)!}{r!\,(2p+2q-2r+1)!}\,P_{p+q-2r}^q(\cos\vartheta)\,. \end{cases}$$

From (3.2) and the orthogonal property of $P_n^m(x)$,

$$(3.4)\qquad \int_{-1}^{1}x^{n-m}(1-x^2)^{m/2}P_{n-2r}^m(x)\,dx=\frac{2^{n-2r+1}(n-m)!\,(n-r)!\,(n-2r+m)!}{r!\,(2n-2r+1)!\,(n-2r-m)!}\,,$$

where r is an integer such that $0\leq r\leq\frac{1}{2}(n-m)$.

(3.4) can be expressed in the form

$$(3.5)\qquad \int_{-1}^{1}x^l(1-x^2)^{m/2}P_s^m(x)\,dx=\frac{2^{s+1}\,l!\left(\frac{l+s+m}{2}\right)!\,(s+m)!}{\left(\frac{l+m-s}{2}\right)!\,(l+m+s+1)!\,(s-m)!}\,,$$

where l, s, m are positive integers such that $l+s+m$ is even and $m\leq s\leq l+m$. In other cases the integral vanishes.

§ 4.

We now evaluate some definite integrals as single finite sums of Legendre functions of the second kind,

Multiply both sides of (3.2) by $\frac{(1-x^2)^{m/2}}{(y-x)}$ and integrate with respect to x between -1 and 1. Then, by means of (2), we get

$$(4.1)\quad \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-m}(1-x^2)^m}{(y-x)}\,dx = 2(-1)^m (n-m)!\,(y^2-1)^{m/2} \times \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(2n-4r+1)\,2^{n-2r}(n-r)!}{r!\,(2n-2r+1)!}\, Q^m_{n-2r}(y),$$

where $n \geq m \geq 0$.

Similarly using (3) with (3.2),

$$(4.2)\quad \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-m}(1-x^2)^m}{(y-x)^{m+1}}\,dx = \frac{2(n-m)!}{m!} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(2n-4r+1)\,2^{n-2r}(n-r)!}{r!\,(2n-2r+1)!} \times \frac{(n-2r+m)!}{(n-2r-m)!}\, Q_{n-2r}(y),$$

where $n \geq m \geq 0$.

Differentiating (4.2) s times with respect to y, we have

$$(4.3)\quad \int_{-1}^{1} \frac{x^{n-m}(1-x^2)^m}{(y-x)^{s+m+1}}\,dx = \frac{2(-1)^s (n-m)!}{(s+m)!} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(2n-4r+1)\,2^{n-2r}}{r!} \times \frac{(n-r)!\,(n-2r+m)!}{(2n-2r+1)!\,(n-2r-m)!}\,(y^2-1)^{-\frac{s}{2}}\, Q^s_{n-2r}(y),$$

where $n \geq m \geq 0$ and s is a non negative integer.

$s = m$ is an interesting special case of (4.3).

§ 5.

Differentiate (1.2) r times with respect to y and then multiply both sides by $(y^2-1)^{r/2}$. Then

$$(5.1)\quad \frac{(1-x^2)^{m/2}(y^2-1)^{r/2}}{(y-x)^{r+m+1}} = \frac{(-1)^r}{(m+r)!} \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\, P^m_n(x)\, Q^r_n(y)$$

valid for $n \geq m \geq 0$ and any integer $r \geq -m$.

We get an equivalent result if we differentiate (1.3) s times with respect to x and then multiply both sides by $(1-x^2)^{s/2}$.

Using the orthogonal property of $P^m_n(x)$ with (5.1) we have

$$(5)\quad Q^r_n(y) = \frac{(-1)^r}{2} \cdot (m+r)!\, \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(y^2-1)^{r/2} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{m/2} P^m_n(x)}{(y-x)^{r+m+1}}\,dx$$

valid for $n \geq m \geq 0$ and any integer $r \geq -m$.

When $r=0$, (5) reduces to (3); while when $m=0$ it reduces to (4).

Gormley's result (2) can be deduced by putting $r=-m$ in (5) and making use of [4, p. 109]

$$Q_n^{-m}(y)=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,Q_n^m(y). \tag{5.2}$$

This shows that the results (5) and (5.1) are valid for any integer $r\geq -m$.

Conversely, (5) can be obtained by differentiating our formula (3) r times with respect to y. But it is not possible to derive (5) from either (2) or (4).

A particular case of (5) that is worthnoting is when $r=m$. Then

$$Q_n^m(y)=\frac{(-1)^m}{2}\cdot(2m)!\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(y^2-1)^{m/2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)}{(y-x)^{2m+1}}\,dx \tag{6}$$

where $n\geq m\geq 0$.

Replacing m by s and r by m in (5) and then comparing it with (4) and (2) respectively,

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{s/2}P_n^s(x)}{(y-x)^{s+m+1}}\,dx=\frac{m!\,(n+s)!}{(s+m)!\,(n-s)!}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{(y-x)^{m+1}}\,dx \tag{5.3}$$

$$=\frac{(n+s)!\,(y^2-1)^{-m}}{(s+m)!\,(n-s)!}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}P_n^m(x)}{(y-x)}\,dx\,, \tag{5.4}$$

where $n\geq s\geq 0$, $n\geq m\geq 0$.

§ 6.

Lemma 1.

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^s}\,dx=\frac{2^{2m+1}\,m!\,m!}{(2m+1)!}\,(y+1)^{-s}F\left\{s,\,m+1;\;2m+2;\;\frac{2}{(y+1)}\right\}. \tag{6.1}$$

This can be easily proved by making the substitution $x=2t-1$ in the left hand side integral and then using [1, p. 4]

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt=\frac{\Gamma b\,\Gamma(c-b)}{\Gamma c}\,F(a,\,b;\,c;\,z)$$

which is convergent when $R(c)>R(b)>0$, $|z|<1$.

Lemma 2.

$$\left\{Q_n^m(y)=\frac{(-1)^m}{2}\cdot\frac{n!\,(n+m)!}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{y+1}\right)^{n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{m/2}\times\right.$$
$$\left.\times F\left(n+m+1,\;n+1;\;2n+2;\;\frac{2}{1+y}\right)\right. \tag{6.2}$$

This can be deduced from a known result [4, p. 203, (29)].

§ 7.

Using (5) with (5.1),

$$\frac{2}{\{(r+m)!\}^2}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)(y^2-1)^{-r}\{Q_n^r(y)\}^2=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^m}{(y-x)^{2r+2m+2}}\,dx,$$

where $n\geq m\geq 0$, $r\geq -m$.

Now, for the right hand side integral, using first, Lemma 1 and then Lemma 2, we get

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\{Q_n^r(y)\}^2\\&\quad=\frac{2^{2m}}{(2m+1)!}(m!)^2\{(r+m)!\}^2\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^r\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times\\&\qquad\times F\left\{2r+2m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\}\end{aligned}\right.\tag{7.1a}$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}2^m\{(r+m)!\}^2 m!}{(2r+2m+1)!}(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}Q_m^{2r+m+1}(y)\tag{7.1b}$$

both valid for $n\geq m\geq 0$, $r\geq -m$.

Using, similarly, (6) with (5.1) we have

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(2n+1)\,Q_n^m(y)\,Q_n^r(y)\\&\quad=(-1)^{r+m}\frac{2^{2m}}{(2m+1)}(m!)^2(r+m)!\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{r+m}{2}}\cdot\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times\\&\qquad\times F\left\{r+3m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\}\end{aligned}\right.\tag{7.2a}$$

$$=(-1)^{m+1}2^m\frac{m!(2m)!(r+m)!}{(r+3m+1)!}(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}Q_m^{r+2m+1}(y)\tag{7.2b}$$

both valid for $n\geq m\geq 0$, $r\geq -m$.

Using, similarly, (5.1) with each of (2) and (3) respectively we have

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=m}^{\infty}(2n+1)\,Q_n^m(y)\,Q_n^r(y)\\&\quad=(-1)^{r+m}2^{2m}\frac{(r+m)!\,(m!)^2}{(2m+1)!}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{r-m}{2}}\cdot\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times\\&\qquad\times F\left\{r+m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\}\end{aligned}\right.\tag{7.3a}$$

$$=(-1)^{m+1}2^m\frac{m!}{(r+m+1)}(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}Q_m^{r+1}(y),\tag{7.3b}$$

where $n\geq m\geq 0$, $r\geq -m$.

$$(7.4\,a)\quad \begin{cases} \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,Q_n(y)\,Q_n^r(y) \\ \quad = (-1)^r\,2^{2m}\,\frac{(m!)^3\,(r+m)!}{(2m+1)!}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{r/2}\frac{1}{(y+1)^{2m+2}}\times \\ \qquad \times F\left\{r+2m+2,\ m+1;\ 2m+2;\ \frac{2}{y+1}\right\} \end{cases}$$

$$(7.4\,b)\quad = (-1)^{m+1}\,2^m\,\frac{(m!)^2\,(r+m)!}{(r+2m+1)!}\,(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}\,Q_m^{r+m+1}(y),$$

where $n \geq m \geq 0$, $r \geq -m$.

§ 8. Particular Cases.

Putting $r = m$ in (7.1 b) or (7.2 b) we can evaluate

$$(8.1)\qquad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,(2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2$$

and putting $r = -m$ in (7.1 b) or (7.3 b) and using (5.2) we can find the value of

$$(8.2)\qquad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2.$$

The substitution $r = m$ in (7.4 b) gives

$$(8.3)\qquad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,(2n+1)\,Q_n(y)\,Q_n^m(y).$$

Again, $r = 0$ in (7.1 b) or (7.4 b) yields (2.1) and hence we get

$$(8.4)\qquad Q_m^{m+1}(y) = (-1)^{m+1}\,2^m\,m!\,(y^2-1)^{\frac{-m-1}{2}}$$

which can also be verified directly by using the expansion for $Q_m(y)$.

Now, putting $r = -m$ in (7.2 b) or $r = m$ in (7.3 b) and using (8.4) we can get

$$(8.5)\qquad \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2.$$

Finally, (8.5) subtracted from (2.3) yields the finite sum

$$(8.6)\quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{m-1} (2n+1)\,\{Q_n^m(y)\}^2 \\ \quad = \frac{(m!)^2}{2(2m+1)}\,(y^2-1)^{-m-1}\left[(y+1)^{2m+1} - (y-1)^{2m+1} - 2^{2m+1}\right], \end{cases}$$

where $m \geq 1$.

§ 9.

The results of this paper hold not only for real values of y greater than unity, but also for all values of y which are not real and not between $+1$ and -1. So, formulae for the associated Legendre function of the first kind viz. P_n^m can be obtained by using in the results of this paper WHIPPLE's transformation [4, p. 245]

$$e^{-m\pi i}\, Q_n^m(\cosh\alpha) = \Pi(n+m)\,(\tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{cosech}\,\alpha)^{\frac{1}{2}}\, P_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\coth\alpha),$$

where $R(\cosh\alpha)>0$, or BATEMAN's form [2, p. 379] of WHIPPLE's relation

$$e^{-m\pi i}\, Q_n^m(i\cot\vartheta) = i^{-n-1}\Pi(n+m)\,(\tfrac{1}{2}\pi\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}}\, P_{-m-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta).$$

Thus, from (5), we get

$$(9.1)\quad \left\{ P_{-r-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\coth\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(r+m)!}{(r+n)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,(\sinh\alpha)^{r+\frac{1}{2}}\times \right.$$
$$\left. \times\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}\,P_n^m(x)}{(\cosh\alpha-x)^{r+m+1}}\,dx, \right.$$

where $R(\cosh\alpha)>0$ and n, m, r are integers such that $n\geq m\geq 0$, $r\geq -m$. And

$$(9.2)\quad \left\{ P_{-r-\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta) = \frac{i^{n+r+1}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(r+m)!}{(r+n)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\mathrm{cosec}^{r+\frac{1}{2}}\vartheta\times \right.$$
$$\left. \times\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^{m/2}\,P_n^m(x)}{(i\cot\vartheta-x)^{r+m+1}}\,dx, \right.$$

where n, m, r are integers such that $n\geq m\geq 0$, $r\geq -m$.

References.

[1] BAILEY, W. N.: Generalised Hypergeometric Series. 1935. — [2] BATEMAN: Partial Differential Equations. 1932. — [3] GORMLEY, P. G.: J. London Math. Soc. 9, 149—152 (1934). — [4] HOBSON, E. W.: Spherical and Ellipsoidal Harmonics. 1931.

Dept. of Math. College of Science, Nagpur (India).

(Eingegangen am 9. Oktober 1953.)

LORENZEN, P.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 61—65 (1954)

Über die Korrespondenzen einer Struktur.

Von
PAUL LORENZEN.

Um einen kurzen Ausdruck zur Verfügung zu haben, werde eine Menge M mit einem System F von (endlichstelligen) Operationen $f_1, f_2, \ldots$ in M ein „Gebilde" genannt. Durch das System F ist der Menge M eine „Struktur" aufgeprägt; mit anderen Worten: Das Gebilde (M, F) stellt eine Struktur dar. Genau dann, wenn zwei Gebilde isomorph sind, stellen sie dieselbe Struktur dar.

Eine zweistellige Relation ϱ in M heiße eine „Korrespondenz" des Gebildes (M, F), wenn ϱ isoton ist bezüglich aller Operationen f von F, d.h. wenn für alle Elemente $x, y, \ldots$ von M gilt [1])

$$x_1 \varrho\, y_1 \mathbin{\&} x_2 \varrho\, y_2 \mathbin{\&} \ldots \to f(x_1, x_2, \ldots)\, \varrho\, f(y_1, y_2, \ldots).$$

Nach dieser Definition gehören zu den Korrespondenzen z.B. die Kongruenzrelationen eines Gebildes, aber auch die Automorphismen und die Endomorphismen. Der Menge der Korrespondenzen $\varrho, \sigma, \ldots$ eines Gebildes werde eine Struktur aufgeprägt, indem die folgenden Operationen definiert werden:

$$x\, \varrho \wedge \sigma\, y \leftrightarrow x\, \varrho\, y \mathbin{\&} x\, \sigma\, y \qquad \text{(Konjunktion)}$$

$$x\, \varrho\, \sigma\, y \leftrightarrow \bigvee_z x\, \varrho\, z \mathbin{\&} z\, \sigma\, y \qquad \text{(Multiplikation)}$$

$$x\, \tilde{\varrho}\, y \leftrightarrow y\, \varrho\, x \qquad \text{(Konversion)}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Operationen von Korrespondenzen stets wieder zu Korrespondenzen führen. Die Struktur des so definierten Korrespondenzengebildes hängt nur von der Struktur des vorgegebenen Gebildes ab. Für jede Struktur ist also eine Korrespondenzenstruktur definiert.

Die Betrachtung der Korrespondenzenstruktur ergibt einen einfachen Zugang zu den allgemeinen Strukturtheoremen der Algebra (z.B. dem Verfeinerungstheorem). Es ist hierbei zu beachten, daß die Korrespondenzenstruktur nicht zum „Typ" der Verbände gehört. Es ist zwar ein Konjunktion $\wedge$ vorhanden (es liegt ein Halbverband vor), aber an Stelle einer Disjunktion ist nur die im allgemeinen nichtkommutative Multiplikation vorhanden. Erst bei Beschränkung auf Strukturen mit vertauschbaren Kongruenzrelationen ist die Kongruenzenstruktur ein (modularer) Verband. Diese Beschränkung ist aber nicht erforderlich, da kein sachlicher Grund vorliegt, die allgemeinen Strukturtheoreme als Spezialisierungen verbandstheoretischer Sätze zu gewinnen.

[1]) Zur Bildung von Aussagen werden die folgenden logischen Partikel: $\mathbin{\&}$ (und), $\vee$ (oder), $\bigwedge_x$ (für alle x), $\bigvee_x$ (für manche x) gebraucht. Die logische Implikation bzw. Äquivalenz wird durch $\to$ bzw. $\leftrightarrow$ ausgedrückt.

Fragt man nach den einfachsten Sätzen, die für jede Korrespondenzenstruktur gelten, so liegt es nahe, zur bequemen Formulierung zunächst eine Relation $\prec$ einzuführen durch

$$\varrho \prec \sigma \leftrightarrow \varrho \wedge \sigma = \varrho.$$

Dann bietet sich unmittelbar das folgende Satzsystem an:

(I.1) $\varrho \prec \varrho$

(I.2) $\varrho \prec \sigma \,\&\, \sigma \prec \tau \rightarrow \varrho \prec \tau$

(I.3) $\varrho \prec \sigma \,\&\, \sigma \prec \varrho \rightarrow \varrho = \sigma$

(II) $\varrho \prec \sigma \,\&\, \varrho \prec \tau \leftrightarrow \varrho \prec \sigma \wedge \tau$

(III.1) $\varrho(\sigma\tau) = (\varrho\sigma)\tau$

(III.2) $\varrho_1 \prec \sigma_1 \,\&\, \varrho_2 \prec \sigma_2 \rightarrow \varrho_1\varrho_2 \prec \sigma_1\sigma_2$

(IV.1) $\breve{\breve{\varrho}} = \varrho$

(IV.2) $\widetilde{\varrho\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{\varrho}$

(IV.3) $\widetilde{\varrho \wedge \sigma} = \tilde{\varrho} \wedge \tilde{\sigma}$

(V) $\varrho\sigma \wedge \tau \prec (\varrho \wedge \tau\tilde{\sigma})(\sigma \wedge \tilde{\varrho}\tau).$

Die Gültigkeit dieser Sätze für zweistellige Relationen darf als bekannt vorausgesetzt werden. (V) findet sich meines Wissens zuerst als „relation de Dedekind" bei RIGUET[2]) und ist unmittelbar nachzuprüfen:

$$\begin{aligned} x\,\varrho\sigma \wedge \tau\,y &\rightarrow \mathbf{V}_z\, x\,\varrho\,z \,\&\, z\sigma\,y \,\&\, x\,\tau\,y \\ &\rightarrow \mathbf{V}_z\, x\,\varrho\,z \,\&\, x\,\tau\,y \,\&\, y\tilde{\sigma}\,z \,\&\, z\sigma\,y \,\&\, z\tilde{\varrho}\,x \,\&\, x\,\tau\,y \\ &\rightarrow \mathbf{V}_z\, x\,\varrho \wedge \tau\tilde{\sigma}\,z \,\&\, z\sigma \wedge \tilde{\varrho}\,\tau\,y \\ &\rightarrow\ x(\varrho \wedge \tau\tilde{\sigma})(\sigma \wedge \tilde{\varrho}\,\tau)\,y. \end{aligned}$$

Da die Gleichheitsrelation ε (d.h. $x\,\varepsilon\,y \leftrightarrow x = y$) stets eine Korrespondenz ist, kann das obige „Axiomensystem" noch mit ε als nullstelliger Operation erweitert werden durch

(III.3) $\varepsilon\varrho = \varrho.$

Aus $\varepsilon\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}$ folgt $\varrho\tilde{\varepsilon} = \varrho$, also gilt $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Der durch (I) bis (V) definierte Strukturtyp möge kurz „Bund" heißen. Ich vermute, daß jeder Bund [d.h. jedes Gebilde, das ein Modell von (I) bis (V) ist] isomorph zu einem (im allgemeinen nicht dem vollen) Korrespondenzenbund eines geeigneten Gebildes ist. Diese Vermutung stützt sich darauf, daß die Bundaxiome ausreichen, um die bekannten Sätze über beliebige Korrespondenzenbünde zu beweisen.

Als Beispiel werde das Verfeinerungstheorem behandelt. Im folgenden seien also $\varrho, \sigma, \ldots$ nicht mehr als Korrespondenzen eines Gebildes vorausgesetzt, sondern nur als Elemente eines Bundes.

[2]) RIGUET, J.: Relations binaires, fermetures et correspondances de Galois. Bull. Soc. Math. France **76**, 114—154 (1948).

Definition 1. *ϱ heißt eine Kongruenz, wenn*

(1) $$\varepsilon < \varrho,$$

(2) $$\varrho\,\tilde{\varrho} < \varrho.$$

Im folgenden seien α, β und γ stets Kongruenzen, ϱ, σ und τ beliebige Elemente.

Satz 1.

(3) $$\tilde{\alpha} = \alpha$$

(4) $$\alpha \wedge \beta \qquad \textit{ist eine Kongruenz}$$

(5) $$\alpha\beta = \beta\alpha \leftrightarrow \alpha\beta \qquad \textit{ist eine Kongruenz}$$

(6.1) $$\varrho < \alpha \rightarrow \alpha \wedge \varrho\,\sigma = \varrho(\alpha \wedge \sigma)$$

(6.2) $$\varrho < \alpha \rightarrow \alpha \wedge \sigma\,\varrho = (\alpha \wedge \sigma)\,\varrho$$

(7.1) $$\varrho\,\alpha \wedge \sigma\,\alpha = (\varrho\,\alpha \wedge \sigma)\,\alpha$$

(7.2) $$\alpha\,\varrho \wedge \alpha\,\sigma = \alpha(\alpha\,\varrho \wedge \sigma).$$

Beweis. (3) bis (5) sind trivial, (6) bis (7) ergeben sich aus (V) z. B.

$$\varrho < \alpha \rightarrow \tilde{\varrho} < \tilde{\alpha} \rightarrow \tilde{\varrho}\,\alpha < \tilde{\alpha}\,\alpha = \alpha$$

also (6.1) $$\alpha \wedge \varrho\,\sigma < (\alpha\,\tilde{\sigma} \wedge \varrho)\,(\tilde{\sigma}\,\alpha \wedge \sigma) < \varrho(\alpha \wedge \sigma)$$

oder (7.1) $$\varrho\,\alpha \wedge \sigma\,\alpha < (\varrho\,\alpha\,\tilde{\alpha} \wedge \sigma)\,(\tilde{\sigma}\,\varrho\,\alpha \wedge \alpha) < (\varrho\,\alpha \wedge \sigma)\,\alpha.$$

Definition 2. *β heißt normal bezüglich α, wenn*

(8) $$\bigwedge_{\varrho}\varrho < \alpha \rightarrow \varrho\beta = \beta\varrho.$$

Satz 2. *Ist γ normal bezüglich α, dann ist γ normal bezüglich $\alpha\,\gamma$.*

Beweis. Es gilt $\alpha\,\gamma = \gamma\,\alpha$. Für $\varrho < \alpha\,\gamma$ gilt zunächst $\varrho\,\gamma < \alpha\,\gamma$, mit (7) also

$$\varrho\,\gamma = \varrho\,\gamma \wedge \alpha\,\gamma = (\varrho\,\gamma \wedge \alpha)\,\gamma = (\varrho\,\gamma \wedge \alpha)\,\gamma\,\gamma = \gamma(\varrho\,\gamma \wedge \alpha)\,\gamma = \gamma\,\varrho\,\gamma.$$

Ebenso folgt aber $\gamma\,\varrho = \gamma\,\varrho\,\gamma$, also $\varrho\,\gamma = \gamma\,\varrho$.

Satz 3. *Gilt $\beta < \alpha$ und sind β und γ normal bezüglich α, dann ist $\beta\,\gamma$ normal bezüglich $\alpha\,\gamma$.*

Beweis. Es gilt außer $\alpha\,\gamma = \gamma\,\alpha$ auch $\beta\,\gamma = \gamma\,\beta$. Für $\varrho < \alpha\,\gamma$ gilt nach Satz 2:

$$\begin{aligned}\varrho\,\beta\,\gamma &= \varrho\,\gamma\,\beta = \gamma\,\varrho\,\beta = (\gamma\,\varrho \wedge \gamma\,\alpha)\,\beta = \gamma(\gamma\,\varrho \wedge \alpha)\,\beta \\ &= \gamma\,\beta(\gamma\,\varrho \wedge \alpha) = \beta\,\gamma(\gamma\,\varrho \wedge \alpha) = \beta(\gamma\,\varrho \wedge \gamma\,\alpha) = \beta\,\gamma\,\varrho.\end{aligned}$$

Satz 4. *Gilt $\beta < \alpha$ und ist β normal bezüglich α, dann ist $\beta \wedge \gamma$ normal bezüglich $\alpha \wedge \gamma$.*

Beweis. Aus $\varrho < \alpha \wedge \gamma$ folgt $\varrho < \alpha$, also $\varrho\,\beta = \beta\,\varrho$. Ferner folgt $\varrho < \gamma$ und daher nach (6)

$$\varrho(\beta \wedge \gamma) = \varrho\,\beta \wedge \gamma = \beta\,\varrho \wedge \gamma = (\beta \wedge \gamma)\,\varrho.$$

Es ist bekannt, wie aus Satz 1, Satz 3 und Satz 4 das Verfeinerungstheorem folgt[3]). Man benutzt dazu

Definition 3. *Ein Paar β_1, β_2 heißt von unten perspektiv zu α_1, α_2, wenn gilt:*

$$\alpha_1 = \alpha_2 \beta_1 \tag{8}$$

$$\alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2. \tag{9}$$

Zwei Paare α_1, α_2 und α_1', α_2' heißen von unten projektiv, wenn es ein Paar β_1, β_2 gibt, das zu beiden von unten perspektiv ist.

Die ZASSENHAUSschen Verfeinerungen mit den Gliedern

$$\alpha_{\mu-1}(\alpha_\mu \wedge \beta_\nu) \quad \text{und} \quad (\alpha_\mu \wedge \beta_\nu)\beta_{\nu-1}$$

zu zwei normalen Ketten $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ und $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots$ (es sei also $\alpha_{\mu-1}$ normal bezüglich α_μ und $\beta_{\nu-1}$ normal bezüglich β_ν) liefern dann das

Verfeinerungstheorem. *Zwei gleichendige, normale Ketten haben normale, von unten projektive Verfeinerungen.*

Als weiteres Beispiel für die Tragweite der Bundaxiome sei noch das NOETHERsche Ersetzungstheorem angeführt. Dazu werde ein Satz über die Perspektivität vorausgeschickt:

Satz 5. *Ist β_1, β_2 von unten perspektiv zu α_1, α_2, dann gilt*

$$\alpha_2 < \alpha < \alpha_1 \to \alpha_2(\alpha \wedge \beta_1) = \alpha \tag{10}$$

$$\beta_2 < \beta < \beta_1 \to \alpha_2 \beta \wedge \beta_1 = \beta \tag{11}$$

$$\beta_2 < \beta < \beta_1 \,\&\, \beta_2 < \beta' < \beta_1 \to \alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' = \alpha_2(\beta \wedge \beta'). \tag{12}$$

Beweis. (10) und (11) folgen aus (6):

$$\alpha_2 < \alpha \to \alpha_2(\alpha \wedge \beta_1) = \alpha \wedge \alpha_2\beta_1 = \alpha \wedge \alpha_1 = \alpha$$

$$\beta < \beta_1 \to \alpha_2 \beta \wedge \beta_1 = (\alpha_2 \wedge \beta_1)\beta = \beta_2\beta = \beta.$$

(12) folgt aus (10) und (11) wegen $\alpha_2 < \alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' < \alpha_1$, also

$$\alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' = \alpha_2(\alpha_2\beta \wedge \alpha_2\beta' \wedge \beta_1) = \alpha_2(\beta \wedge \beta').$$

Definition 4. *Eine Kongruenz α heißt irreduzibel, wenn gilt:*

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \alpha = \alpha_1 \vee \alpha = \alpha_2.$$

Ersetzungstheorem. *In zwei Darstellungen von α:*

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \quad \text{und} \quad \alpha = \alpha_1' \wedge \alpha_2' \wedge \ldots \wedge \alpha_n'$$

ist jedes irreduzible α_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$, das normal bezüglich $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \alpha_{\mu+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ ist, ersetzbar durch ein geeignetes α_ν' $(\nu = 1, \ldots, n)$, d. h.

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \alpha_\nu' \wedge \alpha_{\mu+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m.$$

[3]) Vgl. die Literatur, die in G. BIRKHOFF, Lattice theory, Kap. IV, New York 1948 angegeben ist.

Beweis. Man setze

$$\beta_\mu = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{\mu-1} \wedge \alpha_{\mu+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \beta_\mu \wedge \alpha_\nu .$$

Es ist β_μ, α von unten perspektiv zu $\alpha_\mu \beta_\mu, \alpha_\mu$ und für jedes ν gilt:

$$\alpha < \gamma_{\mu\nu} < \beta_\mu .$$

Nach (12) gilt daher wegen $\alpha = \gamma_{\mu 1} \wedge \ldots \wedge \gamma_{\mu n}$:

$$\alpha_\mu = \alpha_\mu \alpha = \alpha_\mu \gamma_{\mu 1} \wedge \ldots \wedge \alpha_\mu \gamma_{\mu n} .$$

Ist α_μ irreduzibel und normal bezüglich β_μ, dann sind $\alpha_\mu \gamma_{\mu\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ Kongruenzen und es gibt also ein ν mit $\alpha_\mu = \alpha_\mu \gamma_{\mu\nu}$. Hieraus folgt aber

$$\alpha = \alpha_\mu \wedge \beta_\mu = \alpha_\mu \gamma_{\mu\nu} \wedge \beta_\mu = \gamma_{\mu\nu} .$$

Die Beispiele zeigen, daß die Multiplikation eines Bundes die verbandstheoretische Disjunktion in den üblichen Beweisen gut ersetzen kann. Die fehlende Kommutativität erfordert nur gewisse Normalitätsvoraussetzungen.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 3. November 1953.)

GRAEUB, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 66—78 (1954)

Über die schwächste Uniformisierende.

Von
W. GRAEUB.

Eine RIEMANNsche Fläche kann erklärt werden

1. als topologische Fläche mit konformen Nachbarrelationen[1]),

2. als der Raum der Funktionselemente eines analytischen Gebildes der z-Kugel[2]).

Jede RIEMANNsche Fläche (2) ist eine topologische Fläche mit konformen Nachbarrelationen; die Punkte der Fläche sind die analytischen Elemente und die Umgebung eines Punktes wird von den unmittelbaren Fortsetzungen des entsprechenden Funktionselementes gebildet.

Umgekehrt erhebt sich die Frage, ob man eine gegebene RIEMANNsche Fläche (1) als den Raum der Funktionselemente eines analytischen Gebildes darstellen kann. *In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß dies stets der Fall ist.* Dabei wird es darauf ankommen, der gegebenen Fläche R ein analytisches Gebilde zuzuordnen, so daß die Fläche R als die „schwächste Uniformisierende" derjenigen mehrdeutigen Relation $z \leftrightarrow z'$ erscheint, die durch das analytische Gebilde zwischen der z- und der z'-Kugel hergestellt wird.

1. RIEMANNsche Flächen. Im folgenden wird die Definition (1) zugrunde gelegt. Eine RIEMANNsche Fläche R ist zunächst ein HAUSDORFFscher Raum, in dem jeder Punkt P eine *Parameterumgebung* K_P besitzt, d.h. eine Umgebung, die zu einer Kreisscheibe der z-Ebene, dem *Parameterkreis* $K_{P,z}$, homöomorph ist. Die topologische Abbildung ϱ_P: $K_P \to K_{P,z}$ nennen wir die *Parameterabbildung*. Es ist keine Einschränkung, den Parameterkreis als den Einheitskreis $|z|<1$ anzunehmen. Sind K_P und $K_{P'}$ zwei benachbarte (d.h. nicht punktfremde) Parameterumgebungen zweier Punkte P bzw. P', so entspricht dem Durchschnitt $D = K_P K_{P'}$ im Parameterkreis $|z|<1$ bzw. $|z'|<1$ eine offene Menge D_z bzw. $D_{z'}$ und $\varrho_{P'} \varrho_P^{-1}$ ist eine topologische Abbildung von D_z auf $D_{z'}$, die *Nachbarrelation* der Umgebungen K_P und $K_{P'}$.

Unter einer RIEMANN*schen Fläche* versteht man eine topologische Fläche, bei der alle Nachbarrelationen direkt konforme Abbildungen sind. Eine RIEMANNsche Fläche, betrachtet als topologischer Raum, besitzt eine abzählbare Basis, oder, was damit gleichbedeutend ist, sie läßt sich durch *abzählbar viele* Parameterumgebungen überdecken[3]).

2. Überlagerungsflächen. Es seien $\tilde{R}$ und R zwei topologische Flächen und σ sei eine eindeutige und stetige Abbildung von $\tilde{R}$ auf R, so daß jeder

[1]) Vgl. NEVANLINNA, R.: Uniformisierung, Springer 1953, Definition 2.22. Dieses Buch wird im folgenden mit N. zitiert.

[2]) Vgl. WEYL, H.: Die Idee der RIEMANNschen Fläche, Teubner 1923, Kap. I, §§ 6, 7.

[3]) Vgl. N. Kap. IV, § 3.

Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ eine Umgebung besitzt, welche topologisch abgebildet wird. Dann heißt $\tilde{R}$ eine *unverzweigte Überlagerungsfläche* von R und σ die *Spurabbildung*. Jede Umgebung des Punktes $\tilde{P}$, in der die Abbildung σ topologisch ist, soll eine *ausgezeichnete Umgebung* dieses Punktes genannt werden.

Die Fläche $\tilde{R}$ heißt eine *verzweigte Überlagerungsfläche* von R, wenn die lokale Eineindeutigkeit der Abbildung σ in gewissen, isoliert liegenden, Punkten $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ verletzt und durch die folgende ersetzt ist: Der Punkt $\tilde{P}$ besitzt eine Parameterumgebung $U_{\tilde{P}}$, so daß $\tilde{P}$ als einziger Punkt von $U_{\tilde{P}}$ in den Punkt $P=\sigma\tilde{P}$ übergeführt wird, während sonst je k (k feste Zahl) Punkte von $U_{\tilde{P}}$ in denselben Punkt von R übergehen. Ein solcher Punkt $\tilde{P}$ heißt ein *Verzweigungspunkt* und $k-1$ seine *Ordnung*.

3. Mehrdeutige Beziehung zwischen zwei RIEMANNschen Flächen. Zwischen zwei RIEMANNschen Flächen R und R' sei eine (in beiden Richtungen) mehrdeutige analytische Beziehung gegeben; das soll folgendes bedeuten: Es seien gewisse Punktepaare P, P' ($P \in R$, $P' \in R'$) einander zugeordnet, so daß jeder Punkt von R bzw. R' in mindestens einem Paar auftritt, und diese Zuordnung besitze die Eigenschaften:

A. Ist P, P' ein Paar einander zugeordneter Punkte, so gibt es endlich oder abzählbar viele Paare von Parameterumgebungen U_P, $U_{P'}$ von P bzw. P', so daß die Punkte von U_P und $U_{P'}$ einander zugeordnet sind, und zwar entweder mittels einer eineindeutigen konformen lokalen Abbildung λ_P oder mittels einer verzweigten lokalen Abbildung λ_P, die sich in geeigneten lokalen Parametern z und z' in der Form

$$z = t^m, \quad z' = t^n \qquad (m, n \text{ ganz})$$

schreiben läßt. Dabei seien die Parameterkreise die Einheitskreise $|z|<1$ bzw. $|z'|<1$ und den Punkten P bzw. P' entspreche der Punkt $z=0$ bzw. $z'=0$.

B. Es sei λ_P eine zum Punkte P gehörige lokale Abbildung und Q sei ein Punkt der zugehörigen Parameterumgebung U_P. Dann gibt es unter den zum Punkte Q gehörigen lokalen Abbildungen eine Abbildung λ_Q, so daß $\lambda_Q=\lambda_P$ im Durchschnitt $U_P U_Q$.

C. Zu je zwei unverzweigten Abbildungen λ_A und λ_B gibt es auf R einen von A nach B führenden Weg $P(t)$ ($0\leq t\leq 1$) und eine Belegung des Weges mit unverzweigten lokalen Abbildungen λ_t, so daß $\lambda_0=\lambda_A$ und $\lambda_1=\lambda_B$. Die Bezeichnung „Belegung" deutet hier an, daß zwei Abbildungen λ_t und $\lambda_{t'}$ unmittelbare Fortsetzungen voneinander sind, falls t' hinreichend nahe an t liegt.

Aus der Bedingung B folgt, daß die Punkte von R, zu denen nur verzweigte Abbildungen gehören, isoliert liegen. Denn ist P ein beliebiger Punkt von R und λ_P eine zugehörige lokale Abbildung, definiert in der Umgebung U_P, so ist diese in jedem von P verschiedenen Punkt von U_P unverzweigt, gleichgültig ob sie in P unverzweigt ist oder nicht. Ist Q ein beliebiger Punkt von U_P, so ist λ_P nach Bedingung B eine der zum Punkte Q gehörigen lokalen

Abbildungen und diese ist in Q unverzweigt. Zu jedem (von P verschiedenen) Punkt der Umgebung U_P gehört also mindestens eine unverzweigte lokale Abbildung.

Ein analytisches Gebilde auf der z-Kugel bestimmt eine mehrdeutige Relation $z \leftrightarrow z'$, welche den drei obigen Bedingungen genügt. Dabei ist R das bei der Fortsetzung überdeckte Gebiet und R' das Bildgebiet.

4. Die Eigenschaft *D*. Wir werden in 10. eine mehrdeutige Relation betrachten, die zusätzlich folgender Bedingung D genügt:

D. Zu je zwei einander zugeordneten Punkten P und P' gibt es Parameterumgebungen V_P und $V_{P'}$, so daß sich je zwei einander zugeordnete Punkte von V_P und $V_{P'}$ mittels einer *zum Punkte P gehörigen* lokalen Abbildung entsprechen.

Diese Bedingung ist bei einem analytischen Gebilde im allgemeinen nicht erfüllt, wie man am Beispiel

$$z' = e^{\frac{1}{1+\sqrt{z}}}$$

für die Punkte $z=1$ und $z'=e^{\frac{1}{2}}$ sieht.

5. Uniformisierung. Es sei eine mehrdeutige Relation $R \leftrightarrow R'$ mit den Eigenschaften A, B, C gegeben. Eine RIEMANNsche Fläche $\tilde{R}$ *uniformisiert* die Beziehung $R \leftrightarrow R'$, wenn $\tilde{R}$ eine (im allgemeinen verzweigte) Überlagerungsfläche von sowohl R als auch R' ist und die Spurabbildungen $\sigma: \tilde{R} \to R$, $\sigma': \tilde{R} \to R'$ folgendermaßen mit der Relation $R \leftrightarrow R'$ zusammenhängen:

1. Für jeden Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ sind die Punkte $P = \sigma\tilde{P}$ und $P' = \sigma'\tilde{P}$ einander mittels der Beziehung $R \leftrightarrow R'$ zugeordnet und man erhält auf diese Art alle Paare einander zugeordneter Punkte.

2. Ist $U_{\tilde{P}}$ eine zu $\tilde{P}$ gehörige ausgezeichnete Umgebung (bezüglich beider Spurabbildungen), so ist $\sigma'\sigma^{-1}$ eine zum Spurpunkt P gehörige (eindeutige oder verzweigte) lokale Abbildung λ_P, definiert in der Spurumgebung U_P von $U_{\tilde{P}}$. Umgekehrt erhält man auf diese Art alle zum Punkte P gehörigen lokalen Abbildungen λ_P entsprechend den über P liegenden Punkten.

Aus dieser Definition folgt, daß mit einer uniformisierenden Fläche $\tilde{R}$ auch jede Überlagerung von $\tilde{R}$ eine solche ist.

Zu einer gegebenen mehrdeutigen Relation $R \leftrightarrow R'$ mit den Eigenschaften A, B, C gibt es stets eine uniformisierende Fläche $\tilde{R}_1$[4]). Sie wird als Raum der lokalen Abbildungen konstruiert. Dabei definieren zwei lokale Abbildungen genau dann denselben Punkt von $\tilde{R}_1$, wenn sie zu demselben Punkt P gehören und unmittelbare Fortsetzungen voneinander sind. Die Spurabbildungen σ bzw. σ' sind durch die Zuordnungen $\lambda_P \to P$ bzw. $\lambda_P \to \lambda_P(P)$ gegeben. Die so konstruierte uniformisierende Fläche $\tilde{R}_1$ ist die *schwächste* Uniformisierende der Beziehung $R \leftrightarrow R'$, d. h. jede uniformisierende Fläche ist eine Überlagerung von $\tilde{R}_1$[4]).

[4]) Vgl. X. Kap. VIII, § 4.

6. Relationen mit der Eigenschaft *D*. Erfüllt die mehrdeutige Relation $R \leftrightarrow R'$ überdies die Bedingung D, so besitzt die schwächste Uniformisierende noch folgende Eigenschaft:

3. Es sei P, P' ein Paar einander zugeordneter Punkte und $\tilde{P}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seien die gleichzeitig über P und P' liegenden Punkte von $\tilde{R}_1$. Dann gibt es Umgebungen V_P, $V_{P'}$ und $V_{\tilde{P}_\nu}$, so daß alle Punkte von $\tilde{R}_1$, deren Spurpunkte bezüglich σ bzw. σ' in V_P bzw. $V_{P'}$ liegen, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{P}_\nu}$ angehören.

7. Teilgebiete der Zahlenkugeln. Wir betrachten fortan den Fall, daß R bzw. R' ein Gebiet auf der x-Kugel bzw. x'-Kugel ist. Wie schon erwähnt, bestimmt jedes analytische Gebilde eine mehrdeutige Relation $x \leftrightarrow x'$ mit den Eigenschaften A, B, C und definiert damit eine RIEMANNsche Fläche $\tilde{R}_1$ als die schwächste Uniformisierende dieser Beziehung.

Es sei jetzt umgekehrt eine RIEMANNsche Fläche $\tilde{R}$ gegeben. Gesucht ist eine mehrdeutige Beziehung $x \leftrightarrow x'$ mit den Eigenschaften A, B, C, deren schwächste Uniformisierende zur Fläche $\tilde{R}$ konform äquivalent ist.

8. Formulierung als Abbildungsaufgabe. Wir betrachten auf einer gegebenen RIEMANNschen Fläche $\tilde{R}$ zwei nichtkonstante meromorphe Funktionen $f(\tilde{z})$ und $g(\tilde{z})$. Mittels der Funktion f bzw. g wird die Fläche $\tilde{R}$ auf ein Teilgebiet der x- bzw. x'-Kugel abgebildet. Ordnet man für jeden Punkt $\tilde{z}$ die beiden Bildpunkte $x = f(\tilde{z})$ und $x' = g(\tilde{z})$ einander zu, so ist damit eine mehrdeutige Beziehung $x \leftrightarrow x'$ definiert, welche den Bedingungen A, B, C genügt. Diese Beziehung wird durch die Fläche $\tilde{R}$ uniformisiert. Dabei wird die Fläche $\tilde{R}$ im allgemeinen nicht die *schwächste* Uniformisierende $\tilde{R}_1$ der obigen Beziehung sein, sondern diese überlagern; und zwar wird die Spurabbildung $\tilde{R} \to \tilde{R}_1$ auf folgende Art erklärt: Es sei $\tilde{a}$ ein Punkt der Fläche $\tilde{R}$ und $a = f(\tilde{a})$ bzw. $a' = g(\tilde{a})$ seien seine beiden Bildpunkte auf R bzw. R'. Ist dann U_a eine ausgezeichnete Umgebung von $\tilde{a}$, so sind die Spurumgebungen U_a und $U_{a'}$ nach Bedingung 2. von 5. mittels der lokalen Abbildung $\lambda_a = g f^{-1}$ aufeinander bezogen. Die lokale Abbildung λ_a repräsentiert einen Punkt der Fläche $\tilde{R}_1$; dieser sei der Bildpunkt von $\tilde{a}$. Die so erklärte Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist dann eine Spurabbildung von $\tilde{R}$ auf $\tilde{R}_1$[4]).

Wir betrachten jetzt andererseits die Abbildung φ der Fläche $\tilde{R}$ in das topologische Produkt der x- und der x'-Kugel, welche durch die Zuordnung $x = f(\tilde{z})$, $x' = g(\tilde{z})$ gegeben ist. Dann besteht folgender Zusammenhang:

Die oben erklärte Spurabbildung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist genau dann eineindeutig, wenn die Abbildung φ bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist, d. h., sind $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ zwei verschiedene Punkte von $\tilde{R}$, so daß $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$, so gibt es Umgebungen $U_{\tilde{a}_1}$ und $U_{\tilde{a}_2}$, deren Bilder nur den Punkt $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$ gemeinsam haben.

Zum Beweis setzen wir zunächst voraus, die Abbildung φ sei in diesem Sinn eineindeutig und schließen daraus auf die Eineindeutigkeit der Abbildung $\tilde{a} \to \lambda_a$.

[4]) Vgl. N. Kap. VIII, § 4.

Es seien $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ zwei Punkte von $\tilde{R}$. Der Spurpunkt von $\tilde{a}_1$ auf der Fläche $\tilde{R}_1$ ist eine lokale Abbildung λ_{a_1}, welche zum Punkte $a_1 = f(\tilde{a}_1)$ gehört und dadurch charakterisiert ist, daß

$$\lambda_{a_1} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}) \tag{1}$$

in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ von $\tilde{a}_1$. Ebenso ist der Bildpunkt von $\tilde{a}_2$ eine lokale Abbildung λ'_{a_2} zum Punkte $a_2 = f(\tilde{a}_2)$ und es gilt in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_2}$ von $\tilde{a}_2$

$$\lambda'_{a_2} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}). \tag{2}$$

Wir haben zu zeigen, daß aus der Gleichheit $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$ die Gleichheit $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ folgt. Zunächst besagt die Gleichheit $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$, daß diese beiden Abbildungen zu demselben Punkt von R gehören, also $a_1 = a_2 = a$; es ist also $f(\tilde{a}_1) = f(\tilde{a}_2)$, d.h. die Funktion $f(\tilde{z})$ nimmt in den Punkten $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ denselben Wert an. Es gibt daher zu jedem hinreichend nahe an $\tilde{a}_1$ liegenden Punkt $\tilde{z}_1$ von $U_{\tilde{a}_1}$ einen Punkt $\tilde{z}_2$ in $U_{\tilde{a}_2}$, so daß $f(\tilde{z}_1) = f(\tilde{z}_2)$. Für die Punkte $\tilde{z}_1$ und $\tilde{z}_2$ gilt dann wegen $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$ nach (1) und (2) auch $g(\tilde{z}_1) = g(\tilde{z}_2)$. Es ist also $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$ und dies ist nach unserer Voraussetzung über die Abbildung φ nur so möglich, daß $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Die Zuordnung $\tilde{R} \to \tilde{R}_1$ ist somit eineindeutig, und der erste Teil des Satzes bewiesen.

Es sei nun zweitens die Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ eineindeutig. Um zu zeigen, daß die Abbildung φ dann bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist, seien $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ $(\tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2)$ zwei Punkte von $\tilde{R}$, so daß $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$. Dem Punkte $\tilde{a}_1$ bzw. $\tilde{a}_2$ entspricht auf der Fläche $\tilde{R}_1$ ein Punkt λ_{a_1} bzw. λ'_{a_2}. Dabei ist wieder $a_j = f(\tilde{a}_j)$ $(j = 1, 2)$ und die Abbildungen λ_{a_1} und λ'_{a_2} sind dadurch charakterisiert, daß in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ von $\tilde{a}_1$ gilt

$$\lambda_{a_1} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}) \tag{1}$$

und in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_2}$ von $\tilde{a}_2$

$$\lambda'_{a_2} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}). \tag{2}$$

Nach Voraussetzung ist $f(\tilde{a}_1) = f(\tilde{a}_2)$, also $a_1 = a_2 = a$, d.h. die lokalen Abbildungen λ_{a_1} und λ'_{a_2} gehören zu *demselben* Punkt a. Andererseits sind dies zwei *verschiedene* zum Punkte a gehörige lokale Abbildungen, denn λ_a bzw. λ'_a ist, als Punkt von $\tilde{R}_1$, Bildpunkt von $\tilde{a}_1$ bzw. $\tilde{a}_2$ und die Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist nach Voraussetzung eineindeutig. Es gibt daher eine Umgebung V_a von a, so daß für alle Punkte z von V_a, eventuell abgesehen von $z = a$, gilt $\lambda_a(z) \neq \lambda'_a(z)$. Nun wählen wir zum Punkte $\tilde{a}_j$ $(j = 1, 2)$ eine Umgebung $V_{\tilde{a}_j}$ $(V_{\tilde{a}_j} < U_{\tilde{a}_j})$, deren Bild auf a in der Umgebung V_a enthalten ist. Dann haben die φ-Bilder der Umgebungen $V_{\tilde{a}_1}$ und $V_{\tilde{a}_2}$ nur den Punkt a gemeinsam; es seien nämlich $\tilde{z}_1$ bzw. $\tilde{z}_2$ zwei Punkte von $V_{\tilde{a}_1}$ bzw. $V_{\tilde{a}_2}$, so daß $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$, also $f(\tilde{z}_1) = f(\tilde{z}_2) = z$ und $g(\tilde{z}_1) = g(\tilde{z}_2) = z'$. Der Punkt z liegt dann in der Umgebung V_a und die Gln. (1) und (2) besagen, daß $\lambda_a(z) = z'$ und $\lambda'_a(z) = z'$, also $\lambda_a(z) = \lambda'_a(z)$. Dies ist in der Umgebung V_a nur so möglich, daß $z = a$. Daraus folgt weiter $\tilde{z}_1 = \tilde{a}_1$,

denn der Punkt $\tilde{z}_1$ gehört der ausgezeichneten Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ an und liegt über dem Punkte a; ebenso zeigt man, daß $\tilde{z}_2 = \tilde{a}_2$. Aus der Gleichung $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$, wobei $\tilde{z}_1$ in $V_{\tilde{a}_1}$ und $\tilde{z}_2$ in $V_{\tilde{a}_2}$ liegt, folgt somit $\tilde{z}_1 = \tilde{a}_1$ und $\tilde{z}_2 = \tilde{a}_2$, was bedeutet, daß die Abbildung φ bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist.

9. Konstruktion der Abbildung φ. Nach diesem Ergebnis kommt es also darauf an, eine gegebene RIEMANNsche Fläche R mittels zweier meromorpher Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bis auf isolierte Punkte eineindeutig in das Produkt der beiden Zahlenkugeln abzubilden. Denn dann ist die Fläche R nach 8. zur schwächsten Uniformisierenden der Beziehung $x \leftrightarrow x'$ konform äquivalent (mittels der Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$). Es sei $f(z)$ eine beliebige nichtkonstante meromorphe Funktion auf der Fläche R. R' sei ein zweites Exemplar der Fläche R und α eine topologische und direkt konforme Abbildung von R auf R'. Der Funktion $f(z)$ entspricht auf der Fläche R' eine Funktion $f'(z')$, definiert durch

$$f'(z') = f(\alpha^{-1} z').$$

Nun erklären wir zwischen den Flächen R und R' eine mehrdeutige Relation $z \leftrightarrow z'$, indem wir zwei Punkte z und z' genau dann einander zuordnen, wenn $f(z) = f'(z')$. Insbesondere ist also z, αz ein Paar zugeordneter Punkte.

Die so erklärte mehrdeutige Beziehung erfüllt die Bedingungen A und B von 3., während C im allgemeinen nicht erfüllt ist. Dies sieht man schon an dem einfachen Beispiel der Funktion $f(z) = z^2$ auf der z-Kugel; hier gehören zu jedem Punkt a die zwei lokalen Abbildungen $\lambda_a(z) = z$ und $\lambda'_a(z) = -z$ und diese sind nicht miteinander verbindbar im Sinne der Bedingung C. Faßt man alle lokalen Abbildungen, die miteinander gemäß C verbindbar sind, in eine Klasse zusammen, so erfüllen die Abbildungen einer solchen Klasse die Bedingungen A, B und C. Zu jeder Klasse gehört somit eine schwächste Uniformisierende $\tilde{R}$ und man erhält also insgesamt ein System von uniformisierenden Flächen $(\tilde{R})$ entsprechend den verschiedenen Klassen.

Von den Klassen miteinander verbindbarer Abbildungen ist eine ausgezeichnet, die von den lokalen Abbildungen $\lambda_a = \alpha$ gebildete. Die zugehörige schwächste Uniformisierende $\tilde{R}_0$ ist zur Fläche R konform äquivalent.

10. Zwei spezielle Eigenschaften der Uniformisierenden $(\tilde{R})$. Aus der Konstruktion der Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ folgt, daß es zu jedem Paar z, z' nur endlich viele lokale Abbildungen λ_z gibt, für die $\lambda_z(z) = z'$. Es gibt auf dem Flächensystem $(\tilde{R})$ also nur endlich viele Punkte, die gleichzeitig über z und z' liegen.

Die oben erklärte Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ erfüllt ferner die Bedingung D von 4. Jede Komponente $\tilde{R}$ von $(\tilde{R})$ besitzt somit die Eigenschaft 3. von 6: Ist a, a' ein Paar zugeordneter Punkte und sind $\tilde{a}_\varrho$ $(\varrho = 1 \dots r)$ die Punkte von $(\tilde{R})$, die gleichzeitig über a und a' liegen, so gibt es Umgebungen V_a, $V_{a'}$, $V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte $\tilde{z}$ von $(\tilde{R})$, für die $\sigma\tilde{z}$ in V_a und $\sigma'\tilde{z}$ in $V_{a'}$ liegt, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören.

Aus diesen beiden Eigenschaften der Überlagerungsflächen $(\tilde{R})$ sollen jetzt zwei Folgerungen gezogen werden.

11. Es sei $\tilde{z}_\nu$ eine Punktfolge auf $(\tilde{R})$, so daß die Folgen $z_\nu = \sigma \tilde{z}_\nu$ bzw. $z'_\nu = \sigma' \tilde{z}_\nu$ auf R bzw. R' konvergent sind. Dann besitzt die Folge $\tilde{z}_\nu$ eine konvergente Teilfolge. Zum Beweis sei $z_\nu \to a$ und $z'_\nu \to a'$. Da für alle ν gilt

$$f(z_\nu) = f'(z'_\nu),$$

folgt

$$f(a) = f'(a'),$$

die Punkte a und a' sind also einander zugeordnet. Nach 10. gibt es also endlich viele Punkte $\tilde{a}_\varrho$ $(\varrho = 1 \dots r)$ auf $(\tilde{R})$, die gleichzeitig über a und a' liegen. Ferner gibt es Umgebungen V_a, $V_{a'}$, $V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte von $(\tilde{R})$, deren Spurpunkte auf R bzw. R' in V_a bzw. $V_{a'}$ liegen, in der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ enthalten sind. Dies gilt insbesondere für fast alle Punkte $\tilde{z}_\nu$. Eine der endlich vielen Umgebungen $V_{\tilde{a}_\varrho}$, etwa $V_{\tilde{a}_1}$, muß also eine unendliche Teilfolge von $\tilde{z}_\nu$ enthalten. Diese Teilfolge konvergiert dann gegen $\tilde{a}_1$, da sie in einer ausgezeichneten Umgebung enthalten ist und die Folge der Spurpunkte gegen a konvergiert. Damit ist eine konvergente Teilfolge angegeben.

12. Es sei $\tilde{R}_1$ eine der Flächen $(\tilde{R})$ und R_1 bzw. R'_1 seien ihre Spurflächen auf R bzw. R'. Auf der Fläche R sei eine offene Menge U gegeben. T sei der Durchschnitt UR_1 und T' sein Bild auf R'_1, d.h. das σ'-Bild desjenigen Teiles von $\tilde{R}_1$, dessen σ-Bild in der Menge U enthalten ist. Ist dann T' kompakt bezüglich R', so umfaßt der Durchschnitt T — sofern er nicht leer ist — eine ganze Komponente der Menge U. Zum Beweis zeigen wir, daß die Menge T bezüglich U sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Das erste ist wegen der Offenheit von R_1 klar. Um zu zeigen, daß T bezüglich U auch abgeschlossen ist, sei a ein Häufungspunkt von T, der in U liegt. z_ν sei eine Folge von T, so daß $z_\nu \to a$. Zu jedem Punkt z_ν wählen wir auf der Fläche $\tilde{R}_1$ einen Urbildpunkt $\tilde{z}_\nu$. Die Folge $z'_\nu = \sigma' \tilde{z}_\nu$ der Spurpunkte auf R'_1 liegt dann in T' und wegen der Kompaktheit von T' gibt es somit eine (auf R') konvergente Teilfolge. Daher besitzt nach 11. auch die Folge $\tilde{z}_\nu$ eine (auf $\tilde{R}$) konvergente Teilfolge. Ihr Grenzpunkt $\tilde{a}$ liegt, wie alle Punkte der Folge — auf der Komponente $\tilde{R}_1$. Sein Spurpunkt auf R ist $\sigma \tilde{a} = a$, d.h. der Punkt a gehört noch zur Fläche R_1. Andererseits liegt er nach Voraussetzung in U und somit auch im Durchschnitt T. Jeder Häufungspunkt von T bezüglich U gehört also zu T und T ist somit eine abgeschlossene Teilmenge von U.

Fällt die offene Menge U mit der ganzen Fläche R zusammen, so lautet dieses Ergebnis: Ist das Bild R'_1 einer Fläche R_1 kompakt bezüglich R', so umfaßt die Fläche R_1 ganz R.

13. Abzählbarkeit des Systems $(\tilde{R})$. Das System $(\tilde{R})$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Komponenten. Es genügt zu zeigen, daß man den Raum $(\tilde{R})$ durch abzählbar viele Parameterumgebungen überdecken kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die Abbildung des Raumes $(\tilde{R})$ in das Produkt $R \times R'$, die durch die Zuordnung $z = \sigma \tilde{z}$, $z' = \sigma' \tilde{z}$ bestimmt ist. Der Bildraum A

besteht aus den Paaren z, z' einander zugeordneter Punkte. Jeder Punkt a, a' von A besitzt nach 10. auf dem System $(\tilde{R})$ endlich viele Urbildpunkte $\tilde{a}_\varrho$. Ferner gibt es nach 10. Umgebungen $V_a, V_{a'}, V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte $\tilde{z}$ von $(\tilde{R})$, für die $\sigma\tilde{z}$ in V_a und $\sigma'\tilde{z}$ in $V_{a'}$ liegt, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören. Die Paare zugeordneter Punkte z, z', wobei z in V_a und z' in $V_{a'}$ liegt, bilden eine Umgebung $V(a, a')$ des Punktes (a, a') bezüglich A. Zu jedem Punkt (a, a') von A gibt es also eine Umgebung $V(a, a')$, so daß alle Urbildpunkte von $V(a, a')$ der Menge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören. Das System der Umgebungen $V(a, a')$, wobei (a, a') den ganzen Raum A durchläuft, bildet eine Überdeckung des Raumes A. Nun besitzt das Produkt $R \times R'$ eine abzählbare Basis und damit auch die Teilmenge A. Daher wird der Raum A bereits durch ein abzählbares System von Umgebungen $V_{(a_\nu, a'_\nu)}$ überdeckt. Die zugehörigen Umgebungen $V_{\tilde{a}_{\nu\varrho}}$, wobei $\tilde{a}_{\nu\varrho}$ bei festem ν alle Urbildpunkte von (a_ν, a'_ν) durchläuft, bildet dann eine Überdeckung des Raumes $(\tilde{R})$. Ist nämlich $\tilde{z}$ ein beliebiger Punkt von $(\tilde{R})$, so ist sein Bildpunkt (z, z') in einer Umgebung $V(a_\nu, a'_\nu)$ enthalten, etwa in $V(a_1, a'_1)$. Dann muß der Punkt $\tilde{z}$ in der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_{1\varrho}}$ enthalten sein. Damit ist eine Überdeckung des Raumes $(\tilde{R})$ durch abzählbar viele Parameterumgebungen hergestellt.

14. Bedingung für die Funktion $g(z)$. Es soll jetzt zur gegebenen Funktion $f(z)$ eine zweite meromorphe Funktion $g(z)$ konstruiert werden, so daß die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bestimmte Abbildung φ der Fläche R in das Produkt der beiden Zahlenkugeln bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist. Sei zunächst $g(z)$ eine beliebige nichtkonstante meromorphe Funktion auf R. Wir nehmen an, daß die Abbildung φ für zwei Punkte a und b $(a \neq b)$ die verlangte Eigenschaft nicht besitzt. Es gebe also zwei Punktfolgen $a_\nu \to a$ und $b_\nu \to b$, so daß $f(a_\nu) = f(b_\nu)$ und $g(a_\nu) = g(b_\nu)$, wobei entweder unendlich viele Punkte a_ν von a verschieden oder unendlich viele Punkte b_ν von b verschieden sind. Wir betrachten neben der Fläche R wieder die Fläche R' und übertragen die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ mittels der Abbildung α auf die Fläche R'. Dann lauten die beiden obigen Gleichungen, wenn man noch $b'_\nu = \alpha\, b_\nu$ setzt,

$$f(a_\nu) = f'(b'_\nu) \quad \text{und} \quad g(a_\nu) = g'(b'_\nu).$$

Wegen der ersten Gleichung gibt es für jedes ν einen Punkt $\tilde{z}_\nu$ auf $(\tilde{R})$, der gleichzeitig über a_ν und über b'_ν liegt. Wegen der Konvergenz $a_\nu \to a$ und $b'_\nu \to b'$ $(b' = \alpha\, b)$ besitzt die Folge $\tilde{z}_\nu$ nach 11. eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit $\tilde{z}_\nu$ bezeichnen. Es sei $\tilde{a}$ ihr Grenzpunkt und $\tilde{R}_1$ die Komponente von $(\tilde{R})$, welche den Punkt $\tilde{a}$ enthält. Die Spurpunkte von $\tilde{a}$ sind $\sigma\tilde{a} = a$ und $\sigma'\tilde{a} = b'$. Die Komponente $\tilde{R}_1$ ist daher sicher von der Fläche $\tilde{R}_0$ (vgl. 9. letzter Absatz) verschieden, denn sonst wäre $b' = \alpha\, a$ und damit $b = a$. Wir bemerken noch, daß die Folge $\tilde{z}_\nu$ unendlich viele von ihrem Grenzpunkt verschiedene Punkte besitzt, da mindestens eine der Folgen a_ν und b'_ν diese Eigenschaft hat.

Der Funktion g entspricht auf der Fläche $\tilde{R}_1$ eine Funktion $\tilde{g}$ gemäß

$$\tilde{g}(\tilde{z}) = g(\sigma\tilde{z});$$

ebenso kann man die Funktion g' von R' nach $\tilde{R}_1$ übertragen und erhält so eine Funktion

$$\tilde{g}'(\tilde{z}) = g'(\sigma'\tilde{z}).$$

Auf der Folge $\tilde{z}_\nu$ gilt

$$\tilde{g}(\tilde{z}_\nu) = g(a_\nu)$$

und

$$\tilde{g}'(\tilde{z}_\nu) = g'(b'_\nu)$$

und daher, da nach Voraussetzung $g(a_\nu) = g'(b'_\nu)$,

$$\tilde{g}(\tilde{z}_\nu) = \tilde{g}'(\tilde{z}_\nu).$$

Dies ist wegen der Analytizität der Funktionen $\tilde{g}$ und $\tilde{g}'$ für die konvergente Folge $\tilde{z}_\nu$ (die unendlich viele von $\tilde{a}$ verschiedene Punkte enthält) nur so möglich, daß $\tilde{g} = \tilde{g}'$ auf der ganzen Fläche $\tilde{R}_1$.

Daraus folgt weiter, daß die Funktion g und g' in je zwei einander (mittels der Beziehung $z \leftrightarrow z'$) zugeordneten Punkten z und z' der Spurflächen R_1 und R'_1 von $\tilde{R}_1$ denselben Wert haben. Denn die Punkte z bzw. z' sind die Spurpunkte eines Punktes $\tilde{z}$ von $\tilde{R}_1$, $z = \sigma\tilde{z}$, $z' = \sigma'\tilde{z}$ und damit wird $g(z) = \tilde{g}(\tilde{z})$ und $g'(z') = \tilde{g}'(\tilde{z})$, also $g(z) = g'(z')$.

Gelingt es also, die Funktion $g(z)$ zur gegebenen Funktion $f(z)$ so zu wählen, daß diese Situation auf keiner der Spurflächen R_1 besteht (abgesehen von der Spurfläche $R_0 = \sigma\tilde{R}_0 = R$), so muß die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ vermittelte Abbildung bis auf isolierte Punkte eineindeutig sein.

15. Konstruktion der Funktion $g(z)$. Der Raum $(\tilde{R})$ besteht nach 13. aus abzählbar vielen Flächen $\tilde{R}_\nu$. Es bezeichne R_ν bzw. R'_ν die Spurfläche von $\tilde{R}_\nu$ auf R bzw. R' $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Gesucht ist eine meromorphe Funktion $g(z)$, so daß es für jedes ν ein Punktepaar z_ν, z'_ν $(z_\nu \in R_\nu, z'_\nu \in R'_\nu, z_\nu \leftrightarrow z'_\nu, z'_\nu \neq \alpha z_\nu)$ gibt, für das $g(z_\nu) \neq g'(z'_\nu)$. Wir zeigen zunächst, daß man zwei derartige Punktfolgen z_ν und z'_ν angeben kann, so daß die Folgen z_ν und z'_ν divergent sind, d.h. keinen Häufungspunkt besitzen[5]).

Wir zeigen zunächst, daß es genügt, die ersten drei Bedingungen zu berücksichtigen. Ist z_ν, z'_ν eine Folge von Punktepaaren, welche diesen Bedingungen genügt, so kann man auch eine Folge angeben, die allen vier Bedingungen genügt. Dazu betrachten wir für ein bestimmtes ν die uniformisierende Fläche $\tilde{R}_\nu$; $\tilde{z}_\nu$ sei ein Punkt von $\tilde{R}_\nu$, der gleichzeitig über z_ν und z'_ν liegt, also eine lokale Abbildung λ_{z_ν}, welche den Punkt z_ν in den Punkt z'_ν überführt. Da die Fläche $\tilde{R}_\nu$ von der Fläche $\tilde{R}_0$ verschieden ist, ist diese lokale Abbildung von der Abbildung α verschieden und daher kann man, falls zufällig $z'_\nu = \alpha z_\nu$

[5]) Bei der folgenden Konstruktion wird die Fläche R als nichtkompakt vorausgesetzt. Der kompakte Fall wird in 20. betrachtet.

sein sollte, die Punkte z_ν und z'_ν durch zwei andere einander zugeordnete Punkte (die beliebig nahe an z_ν bzw. z'_ν liegen) ersetzen. Dabei bleiben die drei ersten Eigenschaften erhalten.

Um nun eine Folge z_ν, z'_ν zu konstruieren, welche den ersten drei Bedingungen genügt, betrachten wir zunächst die Flächenpaare R_ν, R'_ν mit folgender Eigenschaft:

Ist A_ν bzw. A'_ν ein beliebiger kompakter Teil von R_ν bzw. R'_ν, so gibt es ein Paar zugeordneter Punkte z, z', so daß z im Komplement von A_ν und z' im Komplement von A'_ν liegt. Dann kann man eine Folge einander zugeordneter Punkte z_ν, z'_ν ($z_\nu \in R_\nu$, $z'_\nu \in R'_\nu$) angeben, so daß die Folgen z_ν und z'_ν beide divergent sind.

Zweitens betrachten wir diejenigen Flächen R_ν, die bezüglich R kompakt sind. Dann umfaßt jede der Bildflächen nach 12. die ganze Fläche R'. Wir wählen dann einen festen Punkt a' auf R'; dieser hat auf jeder Fläche R_ν einen zugeordneten Punkt a_ν. Es ist $f(a_\nu) = f'(a')$ und daher kann die Folge a_ν auf der Fläche R keinen Häufungspunkt besitzen; denn sonst wäre die Funktion $f(z)$ (die in allen Punkten a_ν denselben Wert hat) konstant. Damit ist auch auf diesen Flächen eine Punktfolge mit der verlangten Eigenschaft angegeben und ebenso verfährt man mit denjenigen Flächen R_ν, deren Bildflächen R'_ν in R' kompakt sind. Schließlich sei R_1, R'_1 ein Flächenpaar, das nicht zu den bisher betrachteten Klassen gehört. Dieses ist dann durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Es gibt einen kompakten Teil A bzw. A' von R_1 bzw. R'_1, so daß das Bild (mittels der Beziehung $R_1 \leftrightarrow R'_1$) des Komplementes B von A in A' enthalten ist. Nun sei

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \to R$$

eine feste Ausschöpfung der Fläche R durch kompakte Teilflächen, die unabhängig von den Flächen R_ν konstruiert wird. Der nichtkompakte, zu A_μ komplementäre Teil von R sei B_μ, so daß also $R = A_\mu + B_\mu$. Es sei T_μ der Durchschnitt $R_1 B_\mu$ und T'_μ sein Bild auf R'. Da R_1 bezüglich R nicht kompakt ist, ist kein T_μ leer. T'_μ ist dann von einem bestimmten $\mu = \mu_1$ an in dem kompakten Teil A' der Fläche R' enthalten. Daraus folgt nach 12., daß der Durchschnitt T_{μ_1} eine ganze Komponente der Fläche B_{μ_1} umfassen muß, etwa $B_{\mu_1 \lambda_1}$[6]). Die Fläche R_1 muß daher die Komponente $B_{\mu_1 \lambda_1}$ umfassen.

Auf diese Art erhält man zu jedem Flächenpaar R_ν, R'_ν der betrachteten Klasse eine Zahl μ_ν, so daß die Fläche R_ν eine ganze Komponente der Fläche B_{μ_ν} überdeckt. Dabei ist es keine Einschränkung, die Folge μ_ν monoton wachsend anzunehmen.

16. Die Funktion $f(z)$, die bisher beliebig (meromorph) war, soll nun näher festgelegt werden, und zwar mit Hilfe der gegebenen Ausschöpfung A_μ. Wir wählen für jedes μ auf jeder Komponente $B_{\mu\lambda}$ von B_μ einen Punkt $b_{\mu\lambda}$. Diese Punkte kann man so wählen, daß die Menge $b_{\mu\lambda}$ auf der Fläche R divergent

[6]) Die dort betrachtete Punktmenge U ist in diesem Fall B_{μ_1}.

ist. Es gibt dann nach 18. eine meromorphe Funktion $f(z)$, welche in allen Punkten $b_{\mu\lambda}$ denselben Wert, etwa eins, annimmt[7]).

17. Mit Hilfe der Punkte $b_{\mu\lambda}$ konstruieren wir jetzt eine divergente Folge von Punktepaaren z_ν, z'_ν: Die Fläche R_ν umfaßt eine Komponente $B_{\mu_\nu\lambda_\nu}$ von B_{μ_ν} und enthält somit den Punkt $b_{\mu_\nu\lambda_\nu}$; wir setzen $z_\nu = b_{\mu_\nu\lambda_\nu}$. Die Folge z_ν ist dann auf R divergent; aber auch die Folge der zugeordneten Punkte kann auf R' keinen Häufungspunkt besitzen, denn es ist $f'(z'_\nu) = f(z_\nu) = 1$ für alle ν. Damit ist eine Folge z_ν, z'_ν der verlangten Art konstruiert.

Aus den vier Folgen z_ν, z'_ν, die wir entsprechend der obigen Fallunterscheidung erhalten haben, kann man nun eine einzige Folge z_ν, z'_ν ($z_\nu \in R_\nu$, $z'_\nu \in R'_\nu$, $z_\nu \leftrightarrow z'_\nu$) konstruieren, so daß die Folgen z_ν und z'_ν divergent sind. Gesucht ist eine meromorphe Funktion $g(z)$ auf R, so daß $g(z_\nu) \neq g'(z'_\nu)$, oder, wenn man $z'_\nu = \alpha z''_\nu$ setzt, $g(z_\nu) \neq g(z''_\nu)$; da $z'_\nu \neq \alpha z_\nu$, gilt $z''_\nu \neq z_\nu$.

18. Die Konstruktion einer solchen Funktion $g(z)$ gelingt jetzt auf Grund des folgenden Satzes:

Es sei z_ν ($z_\nu \neq z_\mu$ für $\nu \neq \mu$) eine divergente Punktfolge auf einer RIEMANNschen Fläche R und $\varkappa_\nu$ eine beschränkte Folge von komplexen Zahlen. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $g(z)$ auf R, so daß $g(z_\nu) = \varkappa_\nu$.

Zum Beweis unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem die Fläche R hyperbolisch oder parabolisch ist. Im ersten Fall bilden wir die Folge $G(z, z_\nu)$ der GREENschen Funktionen. Diese Folge ist für jeden Punkt z, der von den Polen z_ν verschieden ist, beschränkt, denn es ist

$$G(z, z_\nu) = G(z_\nu, z)$$

und die Punkte z_ν liegen, da sie auf R keinen Häufungspunkt besitzen, alle außerhalb einer Umgebung des Punktes z. Ist nun α_ν eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen, so ist die Summe

$$u(z) = \Sigma \alpha_\nu G(z, z_\nu)$$

in jedem Punkt z ($z \neq z_\nu$) konvergent und stellt somit eine harmonische Funktion dar, die für $z \neq z_\nu$ regulär ist und im Punkte z_ν die Entwicklung

$$u(z) = \alpha_\nu \log \left| \frac{1}{z - z_\nu} \right| + \text{reguläre Funktion}$$

besitzt. Die Kovariante

$$\varphi = u_x - i u_y$$

ist daher für $z \neq z_\nu$ ebenfalls regulär und hat für $z = z_\nu$ die Entwicklung

$$\varphi = -\frac{\alpha_\nu}{z - z_\nu} + \text{reguläre Funktion.}$$

Nun bilden wir mit Hilfe der gegebenen Zahlen $\varkappa_\nu$ die Reihe $\beta_\nu = \alpha_\nu \varkappa_\nu$. Diese ist mit der Reihe α_ν ebenfalls absolut konvergent und man kann daher

[7]) Man beachte, daß bei der Konstruktion der Funktion $f(z)$ kein Gebrauch von den Flächen R_ν gemacht wird, welche erst durch die Funktion $f(z)$ bestimmt sind.

wie oben eine Kovariante ψ konstruieren, die für $z = z_\nu$ die Entwicklung

$$\psi = -\frac{\beta_\nu}{z - z_\nu} + \text{reguläre Funktion}$$

hat. Der Quotient

$$g(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

ist dann eine meromorphe Funktion auf der Fläche R und es gilt

$$g(z_\nu) = \varkappa_\nu,$$

d.h. die Funktion $g(z)$ nimmt für $z = z_\nu$ den Wert $\varkappa_\nu$ an.

19. Ist die Fläche R parabolisch, so wählen wir zu jedem Punkt z_ν einen benachbarten Punkt z'_ν. Dann kann man zu jedem Punktepaar z_ν, z'_ν ein Normalpotential dritter Gattung konstruieren, d.h. eine Potentialfunktion $u(z; z_\nu, z'_\nu)$, die in einer Parameterumgebung des Punktes z_ν von der Form

$$u(z; z_\nu, z'_\nu) = \log \left| \frac{z - z_\nu}{z - z'_\nu} \right| + \text{reguläre Funktion}$$

ist und außerhalb dieser Umgebung beschränkt bleibt[8]). Dieses Potential ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Wir wählen jetzt einen festen Punkt z_0 $(z_0 \neq z_\nu)$ auf R und bilden die Funktionen

$$v(z, z_0;\ z_\nu, z'_\nu) = u(z;\ z_\nu, z'_\nu) - u(z_0 \cdot z_\nu, z'_\nu).$$

Da die Fläche R parabolisch und damit nullberandet ist, gilt der Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter[9]),

$$v(z, z_0;\ z_\nu, z'_\nu) = v(z_\nu, z'_\nu;\ z, z_0).$$

Da die Folge z_ν und damit auch die Folge z'_ν auf R divergent ist, bleibt die Folge $v(z_\nu, z'_\nu; z, z_0)$ für $\nu \to \infty$ beschränkt und dasselbe gilt daher auch für die Funktionen $v(z, z_0; z_\nu, z')$. Nun kann man genau wie im hyperbolischen Fall eine meromorphe Funktion $g(z)$ konstruieren, so daß $g(z_\nu) = \varkappa_\nu$.

20. Der Fall einer unbegrenzten Überlagerung. Kann man auf der gegebenen Fläche R eine meromorphe Funktion $f(z)$ so wählen, daß die durch sie bewirkte Spurabbildung die Unbegrenztheitsbedingung erfüllt[10]), so gelingt die Konstruktion einer bis auf isolierte Punkte eineindeutigen Abbildung in das Produkt der beiden Zahlenkugeln wesentlich einfacher. In diesem Fall überdeckt nämlich die Spurfläche R_ν jeder Komponente $\tilde{R}_\nu$ des Systems $(\tilde{R})$ ganz R. Diese Eigenschaft ist mit der folgenden gleichbedeutend:

Ein beliebiges Funktionselement λ_a der Beziehung $z \leftrightarrow z'$ ist auf der ganzen Fläche R fortsetzbar.

---

[8]) Vgl. N. Kap. VI, § 4.

[9]) Vgl. N. Kap. V, § 3. Der dort gegebene Beweis für kompakte Flächen läßt sich auf nullberandete Flächen übertragen.

[10]) Vgl. N. Kap. II, § 4 (2.45).

Zum Beweis dieser letzten Eigenschaft sei z_t $(0 \leq t \leq 1)$ ein beliebiger von a ausgehender Weg auf R. (τ) sei die Menge der t-Werte, so daß das Element λ_a längs des Teilweges z_t $(0 \leq t \leq \tau)$ fortsetzbar ist. Diese ist jedenfalls offen und wir können daher annehmen, daß sie das halboffene Intervall $0 \leq t < 1$ enthält. Es ist zu zeigen, daß dann auch der Punkt z_1 zur Menge (τ) gehört. Es sei x_t das Bild des Weges z_t $(0 \leq t \leq 1)$ auf der x-Kugel. Wegen der Unbegrenztheit der von der Funktion $f(z)$ bestimmten Überlagerung läßt sich dieser Weg vom Punkte $a' = \lambda_a(a)$ aus in die Fläche R' durchdrücken und man erhält so einen Weg z_t' $(0 \leq t \leq 1)$. Bezeichnet andererseits λ_t die durch das Anfangselement λ_a bestimmte Belegung des Weges z_t $(0 \leq t < 1)$, so ist $\lambda_t(z_t)$ ein Weg auf R', der ebenfalls vom Punkte a' ausgeht und über dem Weg x_t liegt. Daher gilt

$$\lambda_t(z_t) = z_t' \qquad (0 \leq t < 1).$$

Ferner gibt es, da die Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ die Eigenschaft D von 4. besitzt, eine wohlbestimmte lokale Abbildung λ_1 zum Punkte z_1, so daß die Punkte z_t und z_t' einander mittels der Abbildung λ_1 zugeordnet sind, falls t hinreichend nahe an 1 liegt, etwa für $t > 1 - \delta$. Dann bilden die Elemente λ_t $(0 \leq t \leq 1)$ eine Belegung des ganzen Weges z_t $(0 \leq t \leq 1)$; ist nämlich t_1 ein fester t-Wert, so daß $t_1 > 1 - \delta$, so gilt für alle hinreichend nahe an t_1 liegenden t-Werte

$$\lambda_t(z_t) = \lambda_{t_1}(z_t)$$

und wenn außerdem noch $t > 1 - \delta$,

$$\lambda_t(z_t) = \lambda_1(z_t).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\lambda_{t_1}(z_t) = \lambda_1(z_t)$$

für alle hinreichend nahe an t_1 liegenden t. Dies ist nur so möglich, daß die Abbildung λ_{t_1} eine unmittelbare Fortsetzung von λ_1 ist.

Nachdem man festgestellt hat, daß die Spurflächen R_ν alle ganz R überdecken, kann man die Funktion $g(z)$ folgendermaßen konstruieren: Man wähle auf R zwei Punkte a und b, so daß $f(a) = f(b)$ und eine meromorphe Funktion $g(z)$, so daß $g(a) \neq g(b)$. Dann ist die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bestimmte Abbildung der Fläche R bis auf isolierte Punkte eineindeutig. Denn sonst gäbe es nach 14. eine Spurfläche R_1, auf der die Gleichheit $f(z_1) = f(z_2)$ für zwei Punkte z_1 und z_2 stets die Gleichheit $g(z_1) = g(z_2)$ zur Folge hat. Die Spurfläche R_1 umfaßt aber jetzt ganz R und enthält somit die Punkte a und b, womit ein Widerspruch zur Konstruktion der Funktion $g(z)$ hergestellt ist.

Ist die RIEMANNsche Fläche R kompakt, so kann man die Funktion $f(z)$ immer so wählen, daß die durch sie bestimmte Überlagerung unbegrenzt ist. Man braucht für $f(z)$ nur eine rationale Funktion zu nehmen.

Zürich (Schweiz), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 16. November 1953.)

HOLYOKE, T. C.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 79/80 (1954)

Transitive extensions of dihedral groups.

By
T. C. HOLYOKE.

Let G be a transitive group of permutations on a given set of letters. Let a new fixed letter be adjoined to every permutation of G. Then a transitive group H of permutations on the combined set of letters is called a transitive extension of G if it contains G as the largest subgroup fixing the new letter (cf. [1], p. 751). The purpose of this paper is to show that *the only dihedral groups (including that containing an infinite cyclic subgroup) which possess transitive extensions when represented as groups of permutations of the cosets of a reflection subgroup are those of orders four, six, and ten.*

Let G be a faithful, non-regular permutation-representation of a dihedral group of order greater than four. In particular, let the dihedral group be generated by an element f of order two and an element w of order $n>2$ or of infinite order, such that $w f = f w^{-1}$. Denote the subgroup consisting of f and the identity by F, the letter $F w^i$ (or $w^{-i}F$) by i (an element of the additive group of integers mod n or mod 0), and identify f and w with the permutations $(i \to -i)$ and $(i \to i+1)$ respectively. Designate $f w^i$ as representative for the coset $F w^i$, and call it u_i. Then u_i has order two.

If G possesses a transitive extension H, then there exist single-valued mappings β and γ of the set of elements of G not belonging to F into itself satisfying the following relations:

$$g\gamma = u_j \quad \text{for some } j; \tag{1}$$

$$[f^i (f^i g f^k)\beta]^{-1} g\beta = (f^i g f^k)\gamma f^k (g\gamma)^{-1} \in F; \tag{2}$$

$$g\gamma\gamma \in F g; \tag{3}$$

$$g\beta\gamma \in F(g\gamma)^{-1}. \tag{4}$$

These relations follow respectively from conditions (a), (b), (c) and (d) of theorem 2.6 in [2] (p. 789), since the element q of that theorem can be taken to be the identity, and since the automorphism α of that theorem must be the identity.

Since $g\gamma = u_j$ [by (1)], all elements $g\gamma$ have order two. Therefore relation (4) can be replaced by

$$g\beta\gamma \in F g\gamma. \tag{4'}$$

For $r \neq 0$, let $(w^r)\gamma = f w^{t_r}$ $(t_r \neq 0)$. Write $w^r\gamma$ for $(w^r)\gamma$, etc. Relation (2), with $i=0$, $k=1$ and $g=w^r$, implies that $(w^r f)\gamma\, f (w^r\gamma)^{-1}$ is an element of F. Since $(w^r f)\gamma$ and $(w^r\gamma)^{-1}$ both have the form $f w^i$, this element is f rather than the identity, so that $(w^r f)\gamma = f w^{-t_r}$. Setting $i=1$ and $k=0$ in (2)

yields the result $(f\,g)\,\gamma = g\,\gamma$. Again in (2), set $i = k = 1$, $g = w^r$. Then

$$[f\,(f\,w^r\,f)\,\beta]^{-1}\,w^r\,\beta = (f\,w^r\,f)\,\gamma\,f\,(w^r\,\gamma)^{-1}$$
$$= (w^r\,f)\,\gamma\,f\,(w^r\,\gamma)^{-1} = f, \quad \text{and} \quad w^{-r}\beta = f\,w^r\,\beta\,f.$$

From relation (3), with $g = w^r$, it follows that $w^{fr}\,\gamma = f\,w^r$. According to (4'), with $g = w^r$, $w^r\,\beta\,\gamma \in F\,w^{fr}$, so that $w^r\,\beta\,\gamma = f\,w^{fr}$. Now $(w^r\,\beta\,\gamma)\,\gamma = (w^r\,\beta)\,\gamma\,\gamma \in F\,w^r\,\beta$; on the other hand, $(w^r\,\beta\,\gamma)\,\gamma = (f\,w^{fr})\,\gamma = w^{fr}\,\gamma = f\,w^r$, as shown in the first sentence of this paragraph. Hence $f\,w^r \in F\,w^r\,\beta$, i.e., $w^r\,\beta \in F\,w^r$, so that $w^r\,\beta = w^r$ or $f\,w^r$. Therefore $w^{-r}\beta = w^{-r}$ or $f\,w^{-r}$.

Define the permutation c as fixing F and taking $F\,g$ into $F\,g\,\gamma$, the permutation b as fixing F and taking gF into $g\,\beta\,F$ $(g \notin F)$.

Then ([2], pp. 791—792), $b = c$, and H is generated by G and $c \cdot (\infty 0)$, where ∞ is the letter fixed by G. It can be assumed that $c \cdot (\infty 0)$ is conjugate to f, so that c fixes at most three letters besides ∞ and 0. Since c takes $F\,w^r$ into $F\,w^{fr}$, b takes $w^{-r}F$ into $w^{-fr}F$. But b takes $w^{-r}F$ into $w^{-r}\beta\,F$, hence $w^{-r}\beta = w^{-fr}$ or $w^{-fr}\,f$. Therefore $t_r = r$ or $t_r = -r$, and it follows that c fixes exactly one letter i and its negative, where $i \neq -i$, and takes every other letter except ∞ into its negative. Thus $f\,c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)\,(i, -i)$. This element, which belongs to H, cannot fix more letters than does f, for if it fixes as many as two letters, it belongs to a subgroup of H which is conjugate to F. Hence G is finite, and $n \leq 6$.

For $n = 6$, $f \cdot c \cdot (\infty 0)$ can be assumed to be $(\infty 0)\,(15)$, since the only other possibility is $(\infty 0)\,(24)$, which is the product of f and $(\infty 0)\,(15)$. But $[f\,c \cdot (\infty 0) \cdot w]^4 = (\infty\,10)$, which is impossible. For $n = 5$, $c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)\,(14)$ and $f\,c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)\,(23)$ or vice versa, so that G has at most (in fact, exactly) one transitive extension, and therefore cannot be extended to a triply transitive group ([2], p. 794). For $n = 4$, $c \cdot (\infty 0) = (\infty 0)$, which is impossible. For $n = 2$ and $n = 3$, G is a symmetric group and has a trivial transitive extension.

Bibliography.

[1] ZASSENHAUS, H.: Über transitive Erweiterung gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien. Math. Ann. **111**, 748—759 (1935). — [2] HOLYOKE, T. C.: On the structure of multiply transitive permutation groups. Amer. J. Math. **74**, 787—796 (1952).

Northwestern University, Evanston, Ill. (USA.).

(Eingegangen am 24. Juli 1953.)

MÜLLER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 81—87 (1954)

Über die Konvergenz eines Verfahrens zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

Von
MAX MÜLLER.

1. Es sei

$$\operatorname{sign}(u) = 1 \quad \text{für} \quad u > 0, \qquad = 0 \quad \text{für} \quad u = 0, \qquad = -1 \quad \text{für} \quad u < 0$$

und ω eine positive Zahl. Dann gelten für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die FOURIER-Entwicklungen

$$C_n(x) = \operatorname{sign}\left(\cos\frac{2n\pi x}{\omega}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{1}{2\lambda+1}\cos\frac{(2\lambda+1)\,n\,2\pi x}{\omega},$$

$$S_n(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{2n\pi x}{\omega}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{2\lambda+1}\sin\frac{(2\lambda+1)\,n\,2\pi x}{\omega}.$$

Ist $f(x)$ eine reelle quadratisch integrierbare Funktion mit der Periode ω und den FOURIER-Koeffizienten

$$(1) \qquad a_\nu = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\cos\frac{2\nu\pi x}{\omega}\,dx, \qquad b_\nu = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\sin\frac{2\nu\pi x}{\omega}\,dx,$$

so liefert die PARSEVALsche Formel die Beziehungen

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{\omega} f(x)\,C_n(x)\,dx = \gamma_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{1}{2\lambda+1}\,a_{(2\lambda+1)n}, \\ \dfrac{\pi}{2\omega}\displaystyle\int_0^{\omega} f(x)\,S_n(x)\,dx = \sigma_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{2\lambda+1}\,b_{(2\lambda+1)n}, \end{cases}$$

die für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gelten.

Schon H. LIEBMANN[1]) und nach ihm P. TEREBESI[2]) haben sie abgeleitet und darauf hingewiesen, daß sie für die praktische Berechnung der FOURIER-Koeffizienten von Bedeutung sind, weil die Integrale auf der linken Seite von (2) oftmals einfacher zu ermitteln sind als die Integrale (1). Dies gilt

[1]) LIEBMANN, H.: Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von TSCHEBYSCHEFF. Jber. dtsch. Math.-Ver. **18**, 433—449, bes. 443—449 (1909).

[2]) TEREBESI, P.: Ein neues Näherungsverfahren zur harmonischen Analyse. Arch. Elektrotechn. **31**, 195—200 (1934). Vgl. auch A. WILLERS, Mathematische Instrumente, S. 171—173 (München u. Berlin, R. Oldenbourg 1943), oder A. WILLERS, Mathematische Maschinen und Instrumente, S. 197—199 (Berlin, Akademie-Verlag 1951).

besonders dann, wenn $f(x)$ graphisch gegeben ist und man sich eines Planimeters oder Integrimeters bedient. Zur Berechnung der a_ν aus den γ_n, bzw. der b_ν aus den σ_n ersetzt TEREBESI die Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen, die (2) für $n = 1, 2, \ldots$ liefert und die man eigentlich aufzulösen hätte, durch endliche lineare Näherungsgleichungssysteme, die entstehen, wenn man etwa nur die l ersten Gleichungen und auf deren rechten Seiten nur die l ersten Glieder berücksichtigt[3]). Die Berechtigung dieses Vorgehens und die Güte der dabei für die FOURIER-Koeffizienten a_ν und b_ν gewonnenen Näherungswerte $a_\nu^{(l)}$ und $b_\nu^{(l)}$ scheinen noch nicht untersucht worden zu sein; diese Untersuchung soll im folgenden nachgeholt werden.

H. LIEBMANN hat a. a. O. auch schon erwähnt, daß man die strengen Auflösungen der Gln. (2) nach den a_ν und b_ν formal mittels eines von H. BRUNS[4]) aufgestellten Hilfssatzes bewirken kann, die Auflösung allerdings nicht explizit angegeben und die auftretenden Konvergenzfragen ausdrücklich offen gelassen und als noch der Erörterung bedürftig bezeichnet. In der Tat scheint es zweifelhaft zu sein, ob die von BRUNS angegebenen Formeln unter der von BRUNS genannten Voraussetzung ausnahmslos gelten. Bei den hier vorliegenden Verhältnissen läßt sich aber die Auflösung durchführen; *es wird sich ergeben, daß unter den obigen Voraussetzungen, d. h. bei quadratisch integrierbarem* $f(x)$ *stets*

$$\left.\begin{aligned} (3_1) \qquad a_n &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}, \\ (3_2) \qquad b_n &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \sigma_{(2\nu+1)n} \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt. Dabei ist $\mu(k)$ die MÖBIUSsche Funktion, d. h. $\mu(1) = 1$ und für $k > 1$ $\mu(k) = 0$, wenn die ganze Zahl k durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist, aber $\mu(k) = 1$ oder $\mu(k) = -1$, je nachdem k das Produkt einer geraden oder einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen ist.

Die von TEREBESI vorgeschlagenen Näherungswerte $a_\nu^{(l)}$ und $b_\nu^{(l)}$ sind gewisse Teilsummen der vorstehenden unendlichen Reihen, nämlich die folgenden:

$$(4) \qquad a_n^{(l)} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-n}{2n}\right]} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}, \qquad b_n^{(l)} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-n}{2n}\right]} \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \sigma_{(2\nu+1)n}$$

(leere Summen bedeuten die Null); für $l = 13$ sind die Formeln (4) bei TEREBESI a. a. O. und bei WILLERS a. a. O. explizit angegeben.

Wir führen im folgenden den Beweis von (3_1) durch. Der Beweis von (3_2) verläuft ganz analog.

---

[3]) Der Grundgedanke findet sich auch bei A. SCHLEIERMACHER, Zur Analyse von Wechselstromkurven. Elektrotechn. Z. **31**, 1246—1249 (1910).

[4]) BRUNS, H.: Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, S. 132—134 (Leipzig, B. G. Teubner 1903).

2. Zunächst bemerken wir, daß die in (2) für γ_n angegebene Reihe absolut konvergiert, denn es ist für $\Lambda = 0, 1, 2, \ldots$

$$(5)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \frac{1}{2\lambda+1} |a_{(2\lambda+1)n}| \leq \sqrt{\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \frac{1}{(2\lambda+1)^2} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} a_{(2\lambda+1)n}^2} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^2},$$

und bei unseren Voraussetzungen nach der BESSELschen Ungleichung $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ konvergent. Insbesondere folgt aus (2) und (5), daß

$$(6)\qquad \gamma_n \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Genauere Aussagen über die Raschheit dieses Grenzübergangs erhält man, wenn man bei entsprechenden schärferen Voraussetzungen über $f(x)$ die Ordnung des Gegennullstrebens der FOURIER-Koeffizienten a_ν beachtet. (Vgl. Nr. 5.)

3. Wir setzen

$$(7)\qquad \gamma_n(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{2\lambda+1} a_{(2\lambda+1)n} z^{(2\lambda+1)n};$$

diese Funktion ist, weil die Potenzreihe nach (5) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergiert, in $|z| < 1$ regulär analytisch und in $|z| \leq 1$ stetig; es ist $\gamma_n(1) = \gamma_n$.

Wir bilden die Reihe

$$(8)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}(z).$$

Da diese in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert — wir werden in Nr. 4 sogar zeigen können, daß die Reihe der absoluten Beträge in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert —, ist nach dem WEIERSTRASSschen Doppelreihensatz

$$(9)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}(z) \\ \displaystyle = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{2\lambda+1} a_{(2\lambda+1)(2\nu+1)n} z^{(2\lambda+1)(2\nu+1)n} \\ \displaystyle = \sum_{\varrho=0}^{\infty} (-1)^\varrho \left(\sum_{\substack{(2\lambda+1)(2\nu+1) \\ = 2\varrho+1}} \mu(2\nu+1) \right) \frac{a_{(2\varrho+1)n}}{2\varrho+1} z^{(2\varrho+1)n} \\ = a_n z^n, \end{cases}$$

weil[5])

$$(10)\qquad \sum_{d|a} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad a = 1 \\ 0 & \text{für} \quad a > 1 \end{cases}$$

[5]) Vgl. etwa E. LANDAU: Vorlesungen über Zahlentheorie I, S. 20—21 (Leipzig, S. Hirzel 1927).

und $a=2\varrho+1$ ungerade ist und daher nur ungerade Teiler, d.h. Teiler der Form $2\nu+1$ hat.

Da die Reihe (8) in $|z|\leq 1$ gleichmäßig konvergiert und ihre Glieder in $|z|\leq 1$ stetig sind, können wir den Grenzübergang $z\to 1-0$ in (9) gliedweise vollziehen; dabei ergibt sich die Formel (3_1).

4. Es ist in $|z|\leq 1$ nach (7) und Nr. 2

$$|\gamma_n(z)| \leq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{2\lambda+1} |a_{(2\lambda+1)n}|,$$

also für $N=0,1,2,\ldots$, $N'=0,1,2,\ldots$, $N'>N$

$$\sum_{\nu=N}^{N'} \left|(-1)^{\nu} \frac{\mu(2\nu+1)}{2\nu+1} \gamma_{(2\nu+1)n}(z)\right|$$

$$\leq \sum_{\nu=N}^{N'} \frac{|\mu(2\nu+1)|}{2\nu+1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{2\lambda+1} |a_{(2\lambda+1)(2\nu+1)n}| \, |z|^{(2\lambda+1)(2\nu+1)n}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(2\lambda+1)(2\nu+1) \\ =2\varrho+1, \\ N\leq\nu\leq N'}} |\mu(2\nu+1)| \right) \frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1} |z|^{(2\varrho+1)n},$$

also erst recht

$$\leq \sum_{\varrho=N}^{\infty} \left(\sum_{d/2\varrho+1} |\mu(d)| \right) \frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1},$$

falls die Reihe

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \left(\sum_{d/2\varrho+1} |\mu(d)| \right) \frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1} \tag{11}$$

konvergiert. Ist dies festgestellt, so folgt aus der letzten Abschätzung die behauptete gleichmäßige Konvergenz der Reihe (8) im Kreis $|z|\leq 1$, und der Beweis der Formel (3_1) ist erbracht.

Wir formen die Reihe (11) etwas um. Es ist, wenn $p_1, p_2, \ldots$ die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots$ bedeutet und $2\varrho+1$ die Primfaktorenzerlegung

$$2\varrho+1 = p_{\alpha_1}^{\beta_1} p_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots p_{\alpha_t}^{\beta_t} \qquad (\beta_\tau \geq 1;\ \tau=1,\ldots,t)$$

hat, wie ein Blick auf den zitierten Beweis von (10) zeigt,

$$\sum_{d/2\varrho+1} |\mu(d)| = 2^t = 2^{P(2\varrho+1)}, \tag{12}$$

wo $t=P(2\varrho+1)$ die Anzahl der verschiedenen in $2\varrho+1$ aufgehenden Primzahlen bedeutet. Die Formel (12) gilt auch im Falle $\varrho=0$, d.h. $t=0$, weil dann die linke und die rechte Seite den Wert 1 haben.

Um nun die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\Big(\sum_{d/2\varrho+1}|\mu(d)|\Big)\frac{|a_{(2\varrho+1)n}|}{2\varrho+1}=\sum_{\varrho=0}^{\infty}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}|$$

festzustellen, spalten wir dieselbe, unter T eine oberhalb 1 noch geeignet zu wählende Zahl verstehend, in die beiden Teilreihen

$$(13)\qquad \sum_{\substack{\varrho=0\\P(2\varrho+1)\leqq T}}^{\infty}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}| \quad\text{und}\quad \sum_{\substack{\varrho=0\\P(2\varrho+1)>T}}^{\infty}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}|$$

auf.

Die erste Teilreihe ist konvergent, weil für jede natürliche Zahl r

$$\sum_{\substack{\varrho=0\\P(2\varrho+1)\leqq T}}^{r}\frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}|a_{(2\varrho+1)n}|\leq 2^T\sqrt{\sum_{\varrho=0}^{r}\frac{1}{(2\varrho+1)^2}\cdot\sum_{\varrho=0}^{r}a^2_{(2\varrho+1)n}}$$

$$\leq 2^T\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu^2}$$

ist.

Bei der Untersuchung der zweiten Teilreihe beachten wir, daß jetzt $2\varrho+1$ Primfaktoren hat, weil $t=P(2\varrho+1)>T>1$ ist; es ist

$$2\varrho+1\geq p_{\alpha_1}\cdots p_{\alpha_t}\geq p_2\cdots p_{t+1}\geq\prod_{\tau=1}^{t}(2\tau+1),$$

$$\log(2\varrho+1)\geq\sum_{\tau=1}^{t}\log(2\tau+1)>\int_0^t\log(2x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2t+1)\log\frac{2t+1}{e}+1\right]>(2t+1)\,\frac{1}{2}\log\frac{2t+1}{e}>(2t+1)K,$$

wobei

$$K=K(T)=\frac{1}{2}\log\frac{2T+1}{e}>0.$$

Daher ist

$$2^{P(2\varrho+1)}=2^t=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(2t+1)\log\sqrt{2}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2}}e^{K^{-1}\log\sqrt{2}\log(2\varrho+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\varrho+1)^{K^{-1}\log\sqrt{2}}.$$

Wir wählen T so groß, daß $1-K^{-1}\log\sqrt{2}>\frac{1}{2}$ wird, d.h.

$$T>\frac{4e-1}{2}>4{,}93.$$

Bei solcher Wahl von T ist auch die zweite Teilreihe konvergent, da dann für jede natürliche Zahl τ

$$\sum_{\substack{\varrho=0\\ P(2\varrho+1)>T}}^{\tau} \frac{2^{P(2\varrho+1)}}{2\varrho+1}\,|a_{(2\varrho+1)n}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\varrho=0}^{\tau} \frac{1}{(2\varrho+1)^{1-K^{-1}\log\sqrt{2}}}\,|a_{(2\varrho+1)n}|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{(2\varrho+1)^{2(1-K^{-1}\log\sqrt{2})}} \cdot \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^2}$$

und unter der Quadratwurzel sowohl die erste Reihe [wegen $2(1-K^{-1}\log\sqrt{2})>1$] als auch die zweite Reihe konvergiert.

Als Summe der beiden konvergenten Teilreihen (13) ist auch die Reihe (11) konvergent.

5. *Zwei Beispiele.*

a) Die Funktion $f(x)$ habe an den Stellen $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ des Intervalles $0 \leq x < \omega$ Sprünge und zwischen je zwei benachbarten Sprungstellen eine integrierbare, beschränkte Ableitung; es sei etwa $|f'(x)| \leq M_1$. Dann ist

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} [f(\xi_\varkappa - 0) - f(\xi_\varkappa + 0)] \sin\frac{2n\pi\xi_\varkappa}{\omega} - \frac{1}{n\pi} \int_0^\omega f'(x) \sin\frac{2n\pi x}{\omega}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} [f(\xi_\varkappa + 0) - f(\xi_\varkappa - 0)] \cos\frac{2n\pi\xi_\varkappa}{\omega} + \frac{1}{n\pi} \int_0^\omega f'(x) \cos\frac{2n\pi x}{\omega}\,dx,$$

also

$$\left.\begin{matrix}|a_n|\\ |b_n|\end{matrix}\right\} \leq \frac{1}{n\pi}\left(\sum_{\varkappa=0}^{k-1} |f(\xi_\varkappa - 0) - f(\xi_\varkappa + 0)| + \omega M_1\right) = \frac{C}{n\pi}.$$

Damit wird in $|z| \leq 1$

$$\left.\begin{matrix}|\gamma_n(z)|\\ |\sigma_n(z)|\end{matrix}\right\} \leq \frac{C}{n\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda+1)^2} = \frac{C\pi}{8n};$$

die Reihe (8) hat die Majorante

$$\frac{C\pi}{8n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2},$$

ist also in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergent. Es gelten die Formeln (3), und es ist für $l \geq n$

$$\left.\begin{matrix}|a_n - a_n^{(l)}|\\ |b_n - b_n^{(l)}|\end{matrix}\right\} \leq \frac{C\pi}{8n} \sum_{\nu=\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} < \frac{C\pi}{8n} \int_{\left[\frac{l-n}{2n}\right]}^{\infty} \frac{ds}{(2s+1)^2} < \frac{C\pi}{16n} \frac{1}{2\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1}.$$

b) $f(x)$ habe eine Ableitung k-ter Ordnung mit dem Stetigkeitsmaß $\Omega_k(\delta)$. Dann ist[6])

$$\left.\begin{matrix}|a_n|\\ |b_n|\end{matrix}\right\} \leq \frac{1}{n^k}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k \frac{2}{\pi}\,\Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right).$$

[6]) Vgl. etwa C. DE LA VALLÉE POUSSIN: Leçons zur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, S. 15—16. Paris 1919.

Es ist, weil $\Omega_k(\delta)$ eine monoton steigende Funktion von δ ist,

$$\left.\begin{matrix}|\gamma_n(z)|\\|\sigma_n(z)|\end{matrix}\right\} \leq \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda+1)^k n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2(2\lambda+1)n}\right) \frac{1}{2\lambda+1}$$

$$\leq C(\omega; k) \frac{1}{n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right),$$

wo

$$C(\omega; k) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^k \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{(2\lambda+1)^{k+1}},$$

und für $l \geq n$

$$\left.\begin{matrix}|a_n - a_n^{(l)}|\\|b_n - b_n^{(l)}|\end{matrix}\right\} \leq \frac{C(\omega; k)}{n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right) \sum_{\nu=\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{k+1}}$$

$$< \frac{C(\omega; k)}{2k\, n^k} \Omega_k\left(\frac{\omega}{2n}\right) \frac{1}{\left(2\left[\frac{l-n}{2n}\right]+1\right)^k}.$$

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. September 1953.)

BAGCHI, H. D., and B. N. MUKHERJEE
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 88—93 (1954)

Note on the operational representations of some special functions.

By
HARI DAS BAGCHI and BHOLA NATH MUKHERJEE.

Introduction. The present paper deals mainly with certain applications of the methods of modern operational calculus, and eventual establishment of a class of relations (integral as well as functional), involving one or more of the functions:

$$h_n(x), \quad H_n(x), \quad L_n^{(\alpha)}(x), \quad l_n^{(\alpha)}(x), \quad J_n(x), \quad I_n(x), \quad k_{2n}(x), \quad P_n(x), \quad \gamma(n, x).$$

Besides, there are miscellaneous results on infinite integrals. The notations and conventions adopted in this paper are the same as those initiated by VAN DER POL. Thus:

If $$f(p) = p\int_0^\infty e^{-px} g(x)\,dx, \quad \text{(assumed convergent)}, \quad p > 0,$$

then we write

$$f(p) \doteqdot g(x) \quad \text{or} \quad g(x) \doteqdot f(p).$$

For the sake of clarity we quote below four basic propositions, which will be freely made use of in the paper:

If $$f_1(p) \doteqdot g_1(x) \quad \text{and} \quad f_2(p) \doteqdot g_2(x),$$

then:

(I) $$\frac{1}{p} f_1(p) f_2(p) \doteqdot \int_0^x g_1(t)\, g_2(x-t)\,dt$$

(II) $$\int_0^\infty \frac{g_1(x) f_2(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{g_2(x) f_1(x)}{x}\,dx.$$

If $f(p) \doteqdot g(x)$, then

(III) $$\frac{p}{p+\alpha} f(p+\alpha) \doteqdot e^{-\alpha x} g(x)$$

(IV) $$\frac{1}{p^{\nu-1}} f\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}\nu} J_\nu\{2(xs)^{\frac{1}{2}}\}\, g(s)\,ds \qquad (\nu > -1).$$

For the sake of brevity we shall use the following notations:

(V) $$\begin{cases} \lambda(n) = n!\, 2^{2n-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}, & \mu(n) = n!\, 2^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} \\ \Phi(n) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^n n!}, & \psi(n) = \dfrac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+\frac{1}{2}} n!}. \end{cases}$$

The following important results have been used in course of the proof:

(VI) $$L_n(x) = {}_1F_1(-n;\ 1;\ x), \quad \text{where } n \text{ is arbitrary } [1]$$

(VII) $$x^\nu L_n^{(\nu)}(x) \doteqdot \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{n!} \cdot \frac{1}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n, \qquad R(\nu) > -1 \ [2]$$

(VIII) $$e^{-x} L_n(x) \doteqdot \frac{p^{n+1}}{(1+p)^{n+1}},$$

(IX) $$e^{-\frac{1}{2}x} k_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) \doteqdot (-1)^{n-1} \frac{p^n}{(1+p)^{n+1}} \quad [3].$$

$k_{2n}(x)$ being BATEMAN's function.

Although there are casual references to certain *known* results, still the paper is believed to embody some amount of *original* matter.

1. It has been shown by G. PALAMA [4] that a second solution other than $H_n(x)$ of the Hermite equation:

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0, \qquad (n \text{ is a } \textit{positive} \text{ integer})$$

is given by

(2) $$h_{2n}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n}\, l_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2)$$

and

(3) $$x^{-1} h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} n!\, 2^{2n+1}\, l_n^{(\frac{1}{2})}(x^2),$$

where

(4) $$l_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{\Gamma(\alpha)}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-\alpha}\, {}_1F_1(-n-\alpha,\ 1-\alpha,\ x),$$

α being non-integral. Putting $\alpha = \frac{1}{2}$ in (4), we get:

(5) $$l_n^{(\frac{1}{2})}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2r-1)} \cdot \frac{2^r}{r!}\, x^{r-\frac{1}{2}}\right],$$

where $m = n + \frac{1}{2}$.

From the formula for the Laplace transform of a general power, we deduce from (5)

$$l_n^{(\frac{1}{2})}(x) \doteqdot -\frac{1}{\sqrt{2}}\, p^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \cdot \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2r-1)} \cdot \frac{2^r}{r!} \cdot \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{p^r}\right],$$

(6) $$l_n^{(\frac{1}{2})}(x) \doteqdot -\sqrt{\frac{p\pi}{2}} \cdot \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Similarly putting $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (4), we get:

(7) $$l_n^{(-\frac{1}{2})}(x) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Combining (7) and (6) with (2) and (3) respectively, we get:

$$h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n \lambda(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}} \tag{8}$$

and

$$x^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n \mu(n) \cdot \sqrt{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

2. Applying (I) to the relations:

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} \doteqdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ x\right) \tag{10}$$

and

$$\Phi(n) \sqrt{p} \left(\frac{1}{p} - 1\right)^n \doteqdot x^{-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{x}\right), \tag{11}$$

we get:

$$(-1)^n \Phi(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}} \doteqdot \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{t}\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ x - t\right) dt.$$

Hence by (8) and (VI), we have

$$h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\lambda(n)}{\Phi(n)} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{t}\right) L_{-\frac{1}{2}}(x - t)\, dt. \tag{12}$$

Similarly

$$H_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\psi(n)}{\mu(n)} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) L_{-\frac{1}{2}}(x - t)\, dt. \tag{13}$$

3. If we now apply (II) to (8) and (11), we get:

$$\int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^n h_{2n}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\lambda(n)}{\Phi(n)} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} H_{2n}\left(\sqrt{x}\right)}{x^2}\, dx. \tag{14}$$

Similarly we get

$$\int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^n h_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)}{x^2}\, dx = \frac{\mu(n)}{\psi(n)} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}} H_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx. \tag{15}$$

Modifying (9) in the form:

$$x^{-\frac{1}{2}} h_{2n-1}(x) \doteqdot (-1)^{n-1} \mu(n-1) \sqrt{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

and applying (I) to (16) coupled with $1 \doteqdot 1$ and interpreting the result by (8), we obtain

$$h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) = -2n \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} h_{2n-1}\left(\sqrt{t}\right) dt. \tag{17}$$

Differentiating (17) with respect to x, we obtain the recurrence-relation:

$$h'_{2n}(x) = -4n\,h_{2n-1}(x). \tag{18}$$

Adding (9) to (16) multiplied by $4n$, we obtain by (8) the recurrence-relation:

$$h_{2n+1}(x) + 2x\,h_{2n}(x) + 4n\,h_{2n-1}(x) = 0. \tag{19}$$

If we now apply (I) to $x^{\frac{1}{2}} \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,p^{-\frac{1}{2}}$ and (11), after changing n into $(m+n)$ in the latter of these relations, we derive:

$$\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}}\,H_{2m+2n}\left(\sqrt{t}\right)dt \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(m+n)\cdot\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)^{m+n}. \tag{20}$$

Similar applications of (I) yield:

$$\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}\,h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right)h_{2m}\left(\sqrt{x-t}\right)dt \doteqdot m!\,n!\,2^{2m+2n}\,\pi\cdot\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)^{m+n}, \tag{21}$$

$$\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}\,H_{2m}\left(\sqrt{t}\right)H_{2n+1}\left(\sqrt{x-t}\right)dt \doteqdot \Phi(m)\,\psi(n)\cdot\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)^{m+n}, \tag{22}$$

$$\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\,H_{2m+2n+1}\left(\sqrt{t}\right)dt \doteqdot m!\,n!\,2^{2m+2n}\,\pi\cdot\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)^{m+n}. \tag{23}$$

Also we have the *known* relation:

$$x\,L^{(1)}_{m+n}(x) \doteqdot (-1)^{m+n}(m+n+1)\cdot\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)^{m+n}. \tag{24}$$

Comparing (20)—(24), we can easily establish several (subsidiary) relations of equality. For instance:

$$\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}\,h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right)h_{2m}\left(\sqrt{x-t}\right)dt = (-1)^{m+n}\cdot\frac{m!\,n!}{m+n+1}\cdot 2^{2m+2n}\cdot\pi\,x\,L^{(1)}_{m+n}(x). \tag{25}$$

4. By (III) we get from (8) and (9)

$$e^{-x}\,h_{2n}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n\,\lambda(n)\cdot\frac{p^{n+\frac{1}{2}}}{(1+p)^{n+1}} \tag{26}$$

and

$$e^{-x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,h_{2n+1}\left(\sqrt{x}\right) \doteqdot (-1)^n\,\mu(n)\cdot\frac{p^{n+\frac{3}{2}}}{(1+p)^{n+1}}. \tag{27}$$

Now applying (I) to (27) and interpreting the result by (26), we obtain:

$$\int_0^x e^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}\,h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right)dt = 2e^{-x}\,h_{2n}\left(\sqrt{x}\right). \tag{28}$$

Applying (IV) to (26) and taking $r=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ and $n+\frac{1}{2}$ in succession and interpreting the results by the relations:

$$\frac{1}{(1+p)^{n+1}} \doteqdot \frac{\gamma(n+1,x)}{\Gamma(n+1)}, \tag{29}$$

where $\gamma(n, x)$ is the *incomplete* Gamma function,

$$\frac{p}{(1+p)^{n+1}} \doteq \frac{e^{-x} x^n}{\Gamma(n+1)} \tag{30}$$

and

$$\frac{\sqrt{\pi}}{p^n (1+p)^{n+1}} \doteq \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1)} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} x^{n+\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right), \tag{31}$$

where $I_n(x)$ is the modified Bessel function, we deduce:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = (-1)^n \lambda(n) \cdot \frac{\gamma(n+1, x)}{\Gamma(n+1)}, \tag{32}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = (-1)^n \lambda(n) \cdot \frac{e^{-x} x^n}{\Gamma(n+1)} \tag{33}$$

and

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{2n+3}{4}} J_{\frac{2n+3}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds \\ \qquad = (-1)^n \cdot 2^{2n-\frac{1}{2}} \pi e^{-\frac{1}{2}x} x^{n+\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right). \end{cases} \tag{34}$$

Applying (IV) with $r = \frac{1}{2}$ to (VIII) and with $r = 1$ to (26) and comparing the results, we obtain:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} J_1\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = (-1)^n \lambda(n) \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} L_n(s)\, ds. \tag{35}$$

Similarly from (26) and (27) and from (IV) and (IX), we get:

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right) J_2\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} J_1\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{s}\right) ds, \tag{36}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} J_1\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-s} h_{2n}\left(\sqrt{s}\right) ds = -\lambda(n) \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{xs}\right) e^{-\frac{1}{2}s} k_{2n}\left(\frac{1}{2}s\right) ds. \tag{37}$$

Applying (I) to (26) and to $x^{-\frac{1}{2}} \doteq \sqrt{\pi}\, p^{\frac{1}{2}}$ and interpreting the result by (IX), we have:

$$\int_0^x e^{-t} (x-t)^{-\frac{1}{2}} h_{2n}\left(\sqrt{t}\right) dt = -n!\, 2^{2n-\frac{1}{2}} \pi e^{-\frac{1}{2}x} k_{2n}\left(\tfrac{1}{2}x\right). \tag{38}$$

Similarly from (VIII) and (38) we derive:

$$\int_0^x e^{-t} (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} h_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) dt = (-1)^n n!\, 2^{2n+\frac{1}{2}} \pi e^{-x} L_n(x). \tag{39}$$

6. Expressing the operational relation (8) in the equivalent form:

$$\int_0^\infty e^{-pu} h_{2n}\left(\sqrt{u}\right) du = (-1)^n \lambda(n)\, p^{-\frac{n}{2}} (1-p)^{n-\frac{1}{2}}$$

and using the relation: $p = \frac{1}{x^2}$, we get

$$\int_0^\infty h_{2n}(\sqrt{u}) \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} e^{-\frac{u}{x^2}} du = \lambda(n) \cdot (x^2 - 1)^n.$$

Now differentiating both sides n times with respect to x and using Rodrigues' formula for the Legendre polynomial $P_n(x)$, we ultimately derive:

$$\int_0^\infty h_{2n}(\sqrt{u}) \cdot \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} e^{-\frac{u}{x^2}}\right\}\right] du = \lambda(n) \cdot 2^n n! P_n(x). \tag{40}$$

The legitimacy of differentiation under the integral sign for finite non-zero values of the parameter x can be easily established.

References.

[1] Szegö, G.: Orthogonal polynomials, Art 5.3, p. 99. 1939. — [2] McLachlan, N. W.: Modern Operational Calculus, p. 211. 1948. — [3] Shastri, N. A.: Note on some results involving Bateman functions $k_{2n}(x)$. J. Indian Math. Soc. New Ser. **3** (1938/39). — [4] Palama, G.: Funzioni di Laguerre di 2 specie. Boll. Un. mat. ital., III. s. **5**, 72—77 (1950).

Dept. of Math., Calcutta University, Calcutta (India).
Scottish Church College, Calcutta (India).

(Eingegangen am 16. Oktober 1953.)

REID, W. T.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 94—97 (1954)

A Tauberian Theorem for Power Series.

By
WILLIAM T. REID.

1. *Introduction.* Recently WIELANDT[1]) has given a brief and elegant modification of KARAMATA's[2]) proof of the result of HARDY and LITTLEWOOD[3]) to the effect that a series $\sum a_n$ of real terms is convergent if this series is Abel summable and there exists a constant K such that $n\,a_n \leq K$, $(n=1, 2, \ldots)$. It is the purpose of this note to point out that a slight modification of WIELANDT's proof leads to a stronger Tauberian theorem.

For brevity, a sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$, $(n=1, 2, \ldots)$, will be said to satisfy condition Γ if: (α) $\sum_1^\infty d_n x^n$ converges for $|x|<1$; (β) there exists a finite constant M such that $g(x) \equiv (1-x)\sum_1^\infty d_n x^n \leq M$ on $0 \leq x < 1$; (γ) $g(x^k) - g(x) \to 0$ as $x \to 1^-$ for each positive integer k. The result that will be established is as follows:

Theorem A. *If a_n, $(n=0, 1, \ldots)$, is real, the series $\sum a_n$ is Abel summable, and there is a sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$ satisfying condition Γ for which $n\,a_n \leq d_n$, $(n=1, 2, \ldots)$, then the series $\sum a_n$ is convergent.*

A sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$ that is Abel summable clearly satisfies condition Γ. Moreover, since for sequences of non-negative real numbers Abel summability is equivalent to $(C, 1)$ summability[4]), restriction of attention to such dominating sequences $\{d_n\}$ gives the following corollary, which contains the HARDY-LITTLEWOOD result for $d_n = K$, $(n=1, 2, \ldots)$.

Corollary. *If a_n, $(n=0, 1, 2, \ldots)$, is real, the series $\sum a_n$ is Abel summable, and there is a sequence of non-negative real numbers $\{d_n\}$ which is summable $(C, 1)$ and such that $n\,a_n \leq d_n$, $(n=1, 2, \ldots)$, then the series $\sum a_n$ is convergent.*

Section 3 of this note contains some comments on sequences which satisfy condition Γ, and also a generalization of Theorem A.

2. *Proof of Theorem A.* As in WIELANDT's proof, it is noted that attention may be restricted to series $\sum a_n$ with $a_0 = 0$ and Abel summable to the value zero, and that the result of the stated theorem is established if it is shown

[1]) WIELANDT, H.: Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z. **56**, 206—207 (1952).

[2]) KARAMATA, J.: Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z. **32**, 319—320 (1930).

[3]) HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proc. Lond. Math. Soc. (2), **13**, 174—191 (1913/14); Theorem 11 in particular.

[4]) See HARDY and LITTLEWOOD: loc. cit., and KARAMATA, loc. cit.

that the function $f^*(x)=0$, $0\leq x<\frac{1}{2}$, $f^*(x)=1$, $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ belongs to the class $\mathfrak{F}$ of functions real-valued on $0\leq x<1$ and satisfying the conditions: (i) $\sum_1^\infty a_n f(x^n)$ converges for $0<x<1$; (ii) $\sum_1^\infty a_n f(x^n)\to 0$ as $x\to 1^-$. In particular, $\mathfrak{F}$ contains all polynomials with real coefficients and constant term equal to zero. Let $\mathfrak{F}_1$ denote the space of functions $f(x)$ real-valued on $0<x<1$ which satisfy (i) above and the following condition (iii): for each $\varepsilon>0$ there exist polynomials $p_1(x)$, $p_2(x)$ with real coefficients and zero constant terms such that $p_1(x)\leq f(x)\leq p_2(x)$, $0<x<1$, while $p_2(x)-p_1(x)=x(1-x)\,q(x)$ where $q(x)$ is a polynomial with $\int_0^1 q(x)\,dx<\varepsilon$. Still following WIELANDT's argument, as $f^*(x)\in\mathfrak{F}_1$ it suffices to show that $\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}$. By a slight modification of WIELANDT's proof for the HARDY-LITTLEWOOD result we shall proceed to show that the hypotheses of Theorem A imply that $\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}$.

Suppose that $\sum a_n$ satisfies the hypotheses of Theorem A, and for a function $f(x)\in\mathfrak{F}_1$ let $\{x_i\}$ be a sequence of values on $0<x<1$ such that $x_i\to 1$ and $\sum_1^\infty a_n f(x_i^n)\to\limsup_{x\to 1^-}\sum_1^\infty a_n f(x^n)$ as $i\to\infty$. In view of (α) and (β) of the definition of property Γ there is a value D, $0\leq D\leq M$, and a subsequence $\{x_j\}$ of $\{x_i\}$ such that $g(x_j)\equiv(1-x_j)\sum_1^\infty d_n x_j^n\to D$ as $j\to\infty$; moreover, in view of (γ) of the definition of property Γ it follows that $g(x_j^k)\to D$ as $j\to\infty$ for $k=1,2,\ldots$. If $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)=\sum_{\varrho=0}^r b_\varrho x^\varrho$ are polynomials satisfying condition (iii) for a given $\varepsilon>0$, then

$$\begin{aligned}
&\sum_1^\infty a_n f(x_j^n)-\sum_1^\infty a_n p_1(x_j^n)\\
&=\sum_1^\infty a_n[f(x_j^n)-p_1(x_j^n)]\leq\sum_1^\infty (d_n/n)[f(x_j^n)-p_1(x_j^n)]\leq\sum_1^\infty (d_n/n)[p_2(x_j^n)-p_1(x_j^n)]\\
&=\sum_1^\infty (d_n/n)(1-x_j^n)\,x_j^n\,q(x_j^n)\leq\sum_1^\infty d_n(1-x_j)\,x_j^n\,q(x_j^n)\\
&=\sum_{\varrho=0}^r b_\varrho[(1-x_j)/(1-x_j^{\varrho+1})]\,g(x_j^{\varrho+1})\to D\sum_{\varrho=0}^r b_\varrho/(\varrho+1)\\
&=D\int_0^1 q(x)\,dx\leq D\,\varepsilon\leq M\,\varepsilon\quad\text{as}\quad x\to 1^-.
\end{aligned}$$

Since $p_1(x)\in\mathfrak{F}$ it then follows that

$$\limsup_{x\to 1^-}\sum_1^\infty a_n f(x^n)\leq 0.$$

Similarly, if $\{x_i\}$ is a sequence on $0<x<1$ such that $x_i\to 1$ and

$$\sum_1^\infty a_n f(x_i^n)\to\liminf_{x\to 1^-}\sum a_n f(x^n)\quad\text{as}\quad i\to\infty,$$

and $\{x_j\}$ is a subsequence of $\{x_i\}$ such that $g(x_j)$ converges to a limit D as $j \to \infty$, a corresponding consideration of $\sum_1^\infty a_n p_2(x_j^n) - \sum_1^\infty a_n f(x_j^n)$ leads to the conclusion that $\liminf_{x \to 1^-} \sum_1^\infty a_n f(x^n) \geq 0$. Consequently, it follows that $\sum_1^\infty a_n f(x^n) \to 0$ as $x \to 1^-$, and $f(x) \in \mathfrak{F}$.

3. *Additional remarks.* The author has been unable to exhibit a sequence of non-negative real constants $\{d_n\}$ that has property Γ, but is not Abel summable; however, it seems desirable to prove the seemingly more general result of Theorem A rather than to restrict attention to the result of the corollary. It is interesting to note that if $\{d_n\}$ is a sequence of non-negative real numbers satisfying condition Γ then:

1°. If $\{x_j\}$ is a sequence of values on $0 < x < 1$ such that $x_j \to 1$ and

$$g(x_j) \equiv (1 - x_j) \sum_1^\infty d_n x_j^n \to D \qquad \text{as} \quad j \to \infty,$$

then

$$(1 - x_j) \sum_1^\infty d_n x_j^n h(x_j^n) \to D \int_0^1 h(x)\, dx \quad \text{as} \quad j \to \infty,$$

for $h(x)$ an arbitrary bounded Riemann integrable function on $0 \leq x \leq 1$.

2°. If $L^* = \limsup_{x \to 1^-} g(x)$, $L_* = \liminf_{x \to 1^-} g(x)$, and

$$\delta_n = (d_1 + \cdots + d_n)/n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

then

$$\limsup_{n \to \infty} \delta_n = L^*, \quad \liminf_{n \to \infty} \delta_n = L_*,$$

and each value y on the interval $L_* \leq y \leq L^*$ is an accumulation point of the sequence $\{\delta_n\}$.

For the case of $\{d_n\}$ Abel summable results 1° and 2° reduce respectively to KARAMATA's lemma (loc. cit.) and the statement that for a non-negative real sequence Abel summability implies $(C, 1)$ summability. Indeed, one may establish 1° and 2° by simple modifications of the argument used by KARAMATA (loc. cit.), so no details of proof are given here.

Let $\mathfrak{A}$ denote the class of series $\sum a_n$ with real terms and satisfying the following conditions: (α') $\sum a_n x^n$ converges for $|x| < 1$; (β') $A(x) \equiv \sum a_n x^n$ is such that $A(x^k) - A(x) \to 0$ as $x \to 1^-$ for $k = 2, 3, \ldots$. For example, if $\sum a_n x^n$ is the Maclaurin expansion of $\sin [\ln \ln (e/(1-x))]$, then $\sum a_n \in \mathfrak{A}$ although $\sum a_n x^n$ does not tend to a limit as $x \to 1^-$; this particular example was suggested to the author by one of his students, Mr. RICHARD DRISCOLL. Moreover, let $A^* = \limsup_{x \to 1^-} A(x)$, $A_* = \liminf_{x \to 1^-} A(x)$, $s_n = a_0 + \cdots + a_n$,

$$s^* = \limsup_{n \to \infty} s_n, \quad s_* = \liminf_{n \to \infty} s_n.$$

The result of Theorem A may be generalized as follows.

Theorem B. *If* $\sum a_n \in \mathfrak{A}$ *and there is a sequence of non-negative real numbers* $\{d_n\}$ *satisfying condition* Γ *for which* $n\,a_n \leq d_n$, $(n=1, 2, \ldots)$, *then* $s^* = A^*$, $s_* = A_*$, *and each value of* y *on the interval* $A_* \leq y \leq A^*$ *is an accumulation point of the sequence* $\{s_n\}$.

Without loss of generality one may assume $a_0 = 0$. If $\sum a_n \in \mathfrak{A}$ and $p(x)$ is a polynomial with constant term zero then $p(1)A(x) - \sum a_n p(x^n) \to 0$ as $x \to 1^-$. If $f(x)$ belongs to the space $\mathfrak{F}_1$ defined in Section 2 it follows that $f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ exists and $f(1^-) = p_1(1) = p_2(1)$ for polynomials $p_1(x)$, $p_2(x)$ satisfying (iii) of the definition of $\mathfrak{F}_1$ for any $\varepsilon > 0$. Consequently, for $f(x) \in \mathfrak{F}_1$ an argument similar to that of the last paragraph of Section 2 shows that $\sum a_n f(x^n) - f(1^-)A(x) \to 0$ as $x \to 1^-$. This result for the particular function $f^*(x)$ defined in Section 2 gives that $s_{N(x)} - A(x) \to 0$ as $x \to 1^-$, where $N(x)$ is the largest integer not exceeding $\ln 2 / |\ln x|$, and from this latter relation the conclusion of Theorem B is immediate.

In particular, it may be verified readily that the hypotheses of Theorem B are satisfied by a series $\sum a_n$ of real terms for which the sequence $\{n|a_n|\}$ is summable (C,1) to the value zero.

Northwestern University, Evanston, Ill. (USA.).

(Eingegangen am 18. Dezember 1953.)

SCHNEIDER, TH.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 98—108 (1954)

Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes.

Von
THEODOR SCHNEIDER.

Nach dem Satze von EISENSTEIN besitzt eine algebraische Funktion $y=f(z)$, bei der die Veränderlichen z und y durch ein Polynom $F(z, y)=0$ mit algebraischen Zahlenkoeffizienten miteinander verknüpft sind, auf jedem Blatt ihrer RIEMANNschen Fläche an einer regulären Stelle z_0, die gleichzeitig regulärer Wert der algebraischen Funktion $f(z)$, d.h. $F_y(z_0, y_0) \neq 0$, und eine algebraische Zahl ist, eine Potenzreihenentwicklung

$$y = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \{a_\varkappa(z_0)\} \cdot (z - z_0)^\varkappa = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \cdot (z - z_0)^\varkappa,$$

deren Koeffizienten $a_\varkappa$ algebraische Zahlen aus einem von z_0 abhängigen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{R}$ endlichen Grades s sind mit der Eigenschaft, daß eine natürliche Zahl T existiert derart, daß $a_\varkappa T^\varkappa$ für alle Werte $\varkappa = 1, 2, \ldots$ ganzalgebraisch wird.

Beim Beweise dieses Satzes, auf den ich nicht eingehen will[1]), erkennt man, daß T von z_0 abhängt, und man stellt bei der Durchführung dieses Beweises leicht fest, daß eine nur von den in $F(z, y)$ eingehenden Konstanten abhängige Konstante γ_1 existiert, so daß mit natürlichem $\nu > 1$ für $z_0 = \frac{1}{\nu}$ und für ein dem EISENSTEINschen Satze genügendes T die Abschätzung

$$T\left(\frac{1}{\nu}\right) < \nu^{\gamma_1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

gilt. Es sei nur beiläufig bemerkt, daß sich ebenso leicht $T(z_0)$ für beliebiges algebraisches z_0 nach oben abschätzen läßt, jedoch soll hiervon keine Anwendung gemacht werden.

Ferner ist wegen $F_y(z_0, y_0) \neq 0$ ohne weiteres klar, daß die Koeffizienten $a_\varkappa(1/\nu)$ von $a_0(1/\nu)$ und den Zahlkoeffizienten von $F(z, y)$ rational abhängen. Diese Zahlkoeffizienten von $F(z, y)$ können übrigens ohne Einschränkung der Allgemeinheit rational vorausgesetzt werden.

Ist $f(z)$ bei $z=0$ regulär, so existiert eine Zahl $\varrho > 0$ derart, daß die Entwicklung von $f(z)$ nach Potenzen von z auf jedem Blatt ihrer RIEMANNschen Fläche einen Konvergenzradius größer als ϱ besitzt. Dann folgt mit ν_0, das durch $\nu_0 = 2\left[\frac{1}{\varrho} + 1\right]$ definiert sei, für alle $\nu > \nu_0$ und das Maximum der

[1]) Siehe z.B. POLYA-SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. II, VIII. Abschnitt, Aufg. 141 u. 236. Berlin: Springer 1925.

Beträge der Koeffizienten $a_\varkappa(1/\nu)$ und ihrer Konjugierten der Potenzreihenentwicklung an der Stelle $1/\nu$ mit einer von ν und $\varkappa$ unabhängigen Konstanten γ_2 die Abschätzung

$$\overline{\left|a_\varkappa\left(\frac{1}{\nu}\right)\right|} < \gamma_2^\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Durch Beachtung von (1) und (2) erkennt man, daß für die Betragsmaxima der ganzen Zahlen $T(1/\nu)^{\varkappa+1} \cdot a_\varkappa(1/\nu) = T^{\varkappa+1} a_\varkappa$ und aller Konjugierten, abkürzend geschrieben, mit einem geeigneten, von ν und $\varkappa$ unabhängigen γ_3 gilt

$$\overline{\left|T^{\varkappa+1} a_\varkappa\right|} < \nu^{\gamma_3(\varkappa+1)} \qquad (\nu > \nu_0).$$

Faßt man diese Feststellungen für die Stellen $z = \frac{1}{\nu}$ zum verschärften Satz von EISENSTEIN zusammen, so kann man formulieren:

Satz 1. *Gegeben sei eine algebraische Funktion $y = f(z)$, wobei z und y mittels rationalen Koeffizienten miteinander algebraisch verknüpft seien. $z = 0$ sei eine reguläre Stelle von $f(z)$. Dann existieren drei natürliche Zahlen ν_0, s und γ_4 derart, daß die Koeffizienten $a_\varkappa(1/\nu)$ für alle $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ der Potenzreihenentwicklungen von $f(z)$ an den Stellen $1/\nu$ für $\nu > \nu_0$ algebraische Zahlen eines durch $a_0(1/\nu)$ erzeugten algebraischen Körpers $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}$ höchstens s-ten Grades sind, die durch Multiplikation mit der $(\varkappa+1)$-ten Potenz einer natürlichen Zahl $T(1/\nu) = T$ ganz werden, und daß für die ganzen Zahlen $T^{\varkappa+1} a_\varkappa$, wie auch für $T^{\varkappa+1}$ die Ungleichung*

$$\mathrm{Max}\left(T^{\varkappa+1}, \overline{\left|T^{\varkappa+1} a_\varkappa\right|}\right) < \nu^{\gamma_4(\varkappa+1)} \qquad (\nu > \nu_0;\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

erfüllt ist.

Ist $y = f(z)$ sogar eine rationale Funktion, so gilt über Satz 1 hinaus wie sofort einsichtig, noch der

Zusatz zu Satz 1: *Bei einer rationalen Funktion $y = f(z)$ ist der Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}$ vom Grade $\leq s$ der Potenzreihenentwicklung an der Stelle $1/\nu$ von ν unabhängig.*

Diese beiden Sätze sind insofern von besonderem Interesse, als man sie zu einer Charakterisierung der algebraischen bzw. der rationalen Funktionen, die durch die selbstverständliche Forderung der Algebraizität der Koeffizienten von $F(z, y)$ eingeschränkt sind, heranziehen kann, und dieses soll hier ausgeführt werden.

Seit langem ist bekannt, daß der EISENSTEINsche Satz eine zwar notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Algebraizität einer Funktion $f(z)$ ist. Hingegen läßt sich zeigen, daß $f(z)$ algebraisch sein muß, falls die Eigenschaften des Satzes 1 für genügend viele ν erfüllt sind.

Genauer lautet die Umkehrung von Satz 1 wie folgt:

Satz 2. *Es seien zwei natürliche Zahlen s und γ_4 und eine an der Stelle $z = 0$ auf einem Blatt ihrer* RIEMANNschen *Fläche reguläre analytische Funktion $f(z)$ vorgegeben. Der Radius der Kreisumgebung des Nullpunktes, innerhalb*

der $f(z)$ regulär sei, werde mit ϱ bezeichnet und es werde $\nu_0 = 2\left[\frac{1}{\varrho} + 1\right]$ eingeführt. Besitze nun mit

$$n \geq 6(s+1)\gamma_4(\nu_0+1)^2 \tag{4}$$

die Funktion an den Stellen $z = \frac{1}{\nu_0+\tau}$, wobei $\tau = n+1, n+2, \ldots, 2n$ durchlaufe, Potenzreihenentwicklungen, deren Koeffizienten $a_\varkappa\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right) = a_\varkappa$ Zahlen eines algebraischen Körpers $\mathfrak{K}_{\nu_0+\tau}$ höchstens s-ten Grades seien, der durch $a_0\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)$ erzeugt sei, und zu denen eine natürliche Zahl $T\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right) = T$ existiere mit der Eigenschaft, daß $T^{\varkappa+1}a_\varkappa$ für alle $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$; $\tau = 1, \ldots, n$ ganz werde, und sei ferner für T und die Zahlen $T^{\varkappa+1}a_\varkappa$ die Ungleichung (3) aus Satz 1 erfüllt, so ist $f(z)$ eine algebraische Funktion von z.

Wir benötigen also die Eigenschaften, die Satz 1 aussagt, nur an endlich vielen Stellen, deren Anzahl n in (4) durch s, γ_4 und auch ν_0 angegeben ist, um die Umkehrung des Satzes 1 aussprechen zu können. Auf diese Weise lassen sich also die algebraischen Funktionen durch den verschärften EISENSTEINschen Satz an endlich vielen geeigneten Stellen charakterisieren. Allerdings haben wir so nur die an der Stelle $z = 0$ regulären algebraischen Funktionen charakterisiert. Das ist jedoch insofern keine Einschränkung der Allgemeinheit, als man eine algebraische Funktion, die an irgendeiner algebraischen Stelle $z = \alpha$ regulär ist, sofort durch die lineare Substitution $z^* = z - \alpha$ in eine bei $z^* = 0$ reguläre algebraische Funktion umschreiben kann.

Die rationalen Funktionen lassen sich zusammen mit dem Zusatz zu Satz 1 kennzeichnen durch den

Zusatz zu Satz 2: *Ist der Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}_{\nu_0+\tau}$ vom Grade $\leq s$ von τ unabhängig und*

$$n \geq 10000(s+1)^3\gamma_4^2(\nu_0+1)^2, \tag{4*}$$

so ist $f(z)$ sogar eine rationale Funktion.

Zu beweisen bleibt die Behauptung, daß die angegebenen Eigenschaften für Algebraizität bzw. Rationalität von $f(z)$ hinreichend sind, also der Satz 2 und dessen Zusatz. Ich möchte vor der Ausführung dieser Beweise auf meine frühere Veröffentlichung über die Charakterisierung algebraischer Funktionen[2]) hinweisen, da der Beweisaufbau ähnlich wie dort verlaufen wird.

Wenden wir uns nun dem Beweis von Satz 2 zu.

Man setze mit natürlichen Zahlen l und m und unbestimmten Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ ein Polynom

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda,\,\mu=0}^{l,\,m} c_{\lambda\mu} z^\lambda (f(z))^\mu \tag{5}$$

an und bestimme die $c_{\lambda\mu}$ als nicht sämtlich verschwindende, ganze rationale Zahlen so, daß $\Phi(z)$ und dessen Ableitungen $\Phi^{(\iota)}(z)$ $(\iota = 1, \ldots, j)$ auf dem in Satz 2 betrachteten Blatt der RIEMANNschen Fläche von $f(z)$ für alle Werte

[2]) SCHNEIDER, TH.: Zur Charakterisierung der algebraischen und der rationalen Funktionen durch ihre Funktionswerte. Acta math., Stockh. **86**, 57—70 (1951).

$z = \frac{1}{\nu_0+n+1}, \ldots, \frac{1}{\nu_0+2n}$ verschwindet, wobei über l, m und die natürlichen Zahlen j und n noch Festsetzungen zu treffen sind.

Jede dieser Bedingungen

$$\Phi^{(\iota)}\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0 \qquad (\iota = 0, 1, \ldots, j;\ \nu = \nu_0 + n + 1, \ldots, \nu_0 + 2n)$$

liefert eine lineare homogene Gleichung für die $c_{\lambda\mu}$ mit algebraischen Koeffizienten aus $\mathfrak{R}_\nu$ vom Grade $\leq s$, und diese lineare Gleichung zerfällt, da die $c_{\lambda\mu}$ ganzrational gesucht werden, vermittels der Basisdarstellung der algebraischen Koeffizienten in höchstens s lineare homogene Gleichungen für die $c_{\lambda\mu}$ mit rationalen Koeffizienten. Diese Gleichungen wollen wir genauer ansehen.

Wegen (5) ist

$$\Phi^{(\iota)}\left(\frac{1}{\nu}\right) = \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} c_{\lambda\mu}\left(\frac{d^\iota(z^\lambda(f(z))^\mu)}{dz^\iota}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)$$

$$= \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} c_{\lambda\mu}\left(\sum_{\eta=0}^{\iota}\binom{\iota}{\eta}\cdot\left(\frac{d^\eta(z^\lambda)}{dz^\eta}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot\left(\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\right).$$

Aus der vorausgesetzten Ungleichung (3) folgt, daß für alle $\mu = 1, 2, \ldots$ die Zahl

$$\frac{1}{(\iota-\eta)!}\left(\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\iota-\eta+\mu}$$

in $\mathfrak{R}_\nu$ ganzalgebraisch ist. Ferner ist unmittelbar einsichtig, daß

$$\frac{1}{\eta!}\left(\frac{d^\eta(z^\lambda)}{dz^\eta}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot\nu^{\lambda-\eta}$$

eine ganzrationale Zahl darstellt. Daraus folgt nun, daß die Koeffizienten der Linearform in den $c_{\lambda\mu}$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{\iota!}\cdot\Phi^{(\iota)}\left(\frac{1}{\nu}\right)\cdot\nu^\iota\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\iota+m} = \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} c_{\lambda\mu}\Bigg(\sum_{\eta=0}^{\iota}\binom{\iota}{\eta}\cdot\left(\frac{1}{\eta!}\,\frac{d^\eta(z^\lambda)}{dz^\eta}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^\iota\right)\times\\ \times\left(\frac{1}{(\iota-\eta)!}\,\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\iota+\mu}\right)\cdot\frac{\eta!\,(\iota-\eta)!}{\iota!}\Bigg)\cdot T\left(\frac{1}{\nu}\right)^{m-\mu}\end{aligned}\right.$$

wegen

$$\binom{\iota}{\eta}\cdot\frac{\eta!\,(\iota-\eta)!}{\iota!} = 1$$

ganzalgebraische Zahlen aus $\mathfrak{R}_\nu$ sind. Der Koeffizient von $c_{\lambda\mu}$ in dieser Linearform lautet also

$$(7)\quad \nu^{l-\lambda}T^{m-\mu}\sum_{\eta=0}^{\iota}\left(\left(\frac{1}{\eta!}\,\frac{d^\eta(z^\lambda)}{dz^\eta}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{(\iota-\eta)!}\,\frac{d^{\iota-\eta}(f^\mu(z))}{dz^{\iota-\eta}}\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot T^{\iota-\eta+\mu}\right)\cdot T^\eta\right).$$

Dabei ist

$$\frac{1}{\eta!}\left.\frac{d^{\eta}(z^{\lambda})}{dz^{\eta}}\right|_{z=\frac{1}{\nu}} \cdot \nu^{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } \eta > \lambda, \\ \binom{\lambda}{\eta} \cdot \nu^{\eta} & \text{für } \eta \leq \lambda. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Potenzreihe von $f^{\mu}(z)$ mit $f^{\mu}(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_{\varkappa\mu}\left(z-\frac{1}{\nu}\right)^{\varkappa}$ für alle $\mu = 1, 2, \ldots$ und $a_{\varkappa 1} = a_{\varkappa}$, so wird

$$\frac{1}{(\iota-\eta)!}\left.\frac{d^{\iota-\eta}(f^{\mu}(z))}{dz^{\iota-\eta}}\right|_{z=\frac{1}{\nu}} = a_{\iota-\eta,\mu}\left(\frac{1}{\nu}\right) = a_{\iota-\eta,\mu}$$

und für die Beträge der in $\mathfrak{R}_{\nu}$ ganzen Zahlen $a_{\iota-\eta,\mu} \cdot T^{\iota-\eta+\mu} = a^{\{1\}}_{\iota-\eta,\mu} T^{\iota-\eta+\mu}$ und deren Konjugierten $a^{\{\sigma\}}_{\iota-\eta,\mu} \cdot T^{\iota-\eta+\mu}$ ergibt sich mittels Induktion nach μ

$$(8) \qquad \overline{\left|a_{\iota-\eta,\mu} T^{\iota-\eta+\mu}\right|} = \max_{(1 \leq \sigma)}\left(\left|a^{\{\sigma\}}_{\iota-\eta,\mu} T^{\iota-\eta+\mu}\right|\right) < \nu^{\gamma_1(\iota-\eta+\mu)} \binom{\iota-\eta+\mu-1}{\mu-1}.$$

Erinnern wir uns daran, daß $a_{\iota-\eta,\mu}$ in einem durch a_0, also auch durch die ganzalgebraische Zahl $T \cdot a_0$ erzeugten Körper liegt, mithin die Potenzen $(T \cdot a_0)^0, T \cdot a_0, \ldots, (T \cdot a_0)^{s_1}$ mit einem $s_1 \leq s$ eine Fundamentalbasis bilden, so läßt sich bekanntlich[3]) die ganze Zahl $a_{\iota-\eta,\mu} T^{\iota-\eta+\mu}$ in der Form

$$(9) \qquad a_{\iota-\eta,\mu} T^{\iota-\eta+\mu} = \sum_{\sigma=1}^{s_1} u_{\iota-\eta,\mu;\sigma} \frac{(T a_0)^{\sigma}}{D}$$

mit ganzen rationalen Zahlen $u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}$ darstellen, und dabei ist der ganzrationale Nenner $D = |\Delta|^2 \geq 1$ und mit der Bezeichnung $T a_0 = \vartheta$ ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta & \vartheta^2 & \ldots & \vartheta^{s_1-1} \\ 1 & \vartheta^{\{2\}} & (\vartheta^{\{2\}})^2 & \ldots & (\vartheta^{\{2\}})^{s_1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \vartheta^{\{s_1\}} & (\vartheta^{\{s_1\}})^2 & \ldots & (\vartheta^{\{s_1\}})^{s_1-1} \end{vmatrix};$$

$\vartheta^{\{\sigma\}}$ für $\sigma = 2, \ldots, s_1$ bedeute die zu ϑ Konjugierten in $\mathfrak{R}_{\nu}$. Trägt man die Summe in (9) für den entsprechenden Faktor in (7) ein, so zerfällt, da die $c_{\lambda\mu}$ rational gesucht sind, jede der linearen Formen (6) für die $c_{\lambda\mu}$ in s_1 lineare Formen mit rationalen Koeffizienten, die durch Multiplikation mit der ganzrationalen Zahl D ganzrational werden. Diese ganzrationalen Koeffizienten setzen sich multiplikativ aus den $u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}$ und aus $\binom{\lambda}{\eta} \cdot \nu^{\eta}$, $\nu^{l-\lambda}$, T^{η}, $T^{m-\mu}$ zusammen, und da wegen (8) und (9) für die $u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}$ die Abschätzung

$$\left|u_{\iota-\eta,\mu;\sigma}\right| < s_1!\, \nu^{\gamma_1(\iota-\eta+\mu+s_1^2)} \cdot 2^{\iota-\eta+\mu}$$

gilt, so sind die Beträge der ganzrationalen Koeffizienten der $c_{\lambda\mu}$ kleiner als

$$(10) \qquad s!\, \nu^{\gamma_1(j+m+s^2)} \cdot 2^{l+j+m} \cdot \nu^{j} \cdot \nu^{l} \cdot T^{j} < s! \cdot 2^{l+j+m} \cdot \nu^{\gamma_1(3j+l+m+s^2)}.$$

[3]) Siehe z.B. HECKE, E.: Theorie der algebraischen Zahlen, S. 81 u. 82. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1923.

Die Anzahl dieser Gleichungen mit ganzrationalen Koeffizienten ist höchstens, wenn ν die natürlichen Zahlen $\nu_0+n+1, \ldots, \nu_0+2n$ durchläuft, $s \cdot n \cdot (j+1)$, während die Anzahl der Unbestimmten $c_{\lambda\mu}$ genau $(l+1)(m+1)$ beträgt.

Nun soll die folgende Festsetzung getroffen werden: Es werde $j=l$ und $m+1=2sn+1$ gesetzt. Dann ist die Anzahl der Unbestimmten mehr als doppelt so groß wie die Anzahl der Gleichungen und für die Abschätzung der Koeffizientenbeträge läßt sich wegen (10) und $\nu_0 \geq 1$ als obere Schranke der Ausdruck

$$(\nu_0+2n)^{\gamma_4(6l+4sn+2s^2)}$$

angeben. Nach einer bekannten Anwendung des Schubfachschlusses[4]) läßt sich dann die Existenz von nicht sämtlich verschwindenden ganzrationalen Zahlen $c_{\lambda\mu}$ nachweisen, die das Gleichungssystem (6) erfüllen und der Ungleichung

$$(11)\quad |c_{\lambda\mu}| < (l+1)(m+1) \cdot (\nu_0+2n)^{\gamma_4(6l+4sn+2s^2)} < (\nu_0+2n)^{\gamma_4(7l+6sn+2s^2)}$$

genügen. Damit erfüllt das nach (5) gebildete $\Phi(z)$ die für diese Funktion geforderten Bedingungen.

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen: Verschwindet $\Phi(z)$ für $z=\frac{1}{\nu_0+n+1}, \ldots, \frac{1}{\nu_0+2n}$ mitsamt seinen Ableitungen $\Phi'(z), \ldots, \Phi^{(j_1)}(z)$, so verschwindet auch $\Phi^{(j_1+1)}(z)$ an denselben Stellen, wenn nur $j_1 \geq j$ und j genügend groß ist.

Zum Beweis ziehen wir die CAUCHYsche Integralformel heran. Es ist nach derselben unter der gemachten Voraussetzung des Verschwindens von $\Phi^{(\iota)}(1/\nu)$ für alle $\iota=0, 1, \ldots, j_1$; $\nu=\nu_0+n+1, \ldots, \nu_0+2n$

$$(12)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)\,dz}{\left(z-\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)\prod\limits_{\nu=\nu_0+n+1}^{\nu_0+2n}\left(z-\frac{1}{\nu}\right)^{j_1+1}} = \frac{1}{(j_1+1)!}\cdot\frac{\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)}{\prod\limits_{\substack{\nu=\nu_0+n+1\\ \nu\neq\nu_0+\tau}}^{\nu_0+2n}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}-\frac{1}{\nu}\right)^{j_1+1}},$$

wobei C der Kreis um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius $R=\mathrm{Min}\,(\frac{3}{4}\varrho, \frac{3}{4})$ sei, denn dann besteht wegen der in Satz 2 eingeführten Bezeichnung von ν_0 zwischen R und ν_0 der Zusammenhang $R > \frac{3}{2(\nu_0+1)}$, und somit liegen alle Stellen $\frac{1}{\nu_0+\tau}$ mit $\tau=n+1, \ldots, 2n$, sicher innerhalb dieses Kreises C.

Schätzen wir $\left|\frac{1}{(j_1+1)!}\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)\right|$ mittels (12) ab, so erhalten wir wegen

$$\max_{|z|=R}|\Phi(z)| < (\nu_0+2n)^{\gamma_4(7l+6sn+2s^2)}(l+1)(m+1)\,e^{\nu_0 m},$$

was aus (11) und der Regularität von $f(z)$ auf C mit $|f(z)|_{|z|=R} < e^{\nu_0}$ folgt, ferner wegen

$$\max_{|z|=R}\frac{1}{\left(z-\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)\prod\limits_{\nu=\nu_0+n+1}^{\nu_0+2n}\left(z-\frac{1}{\nu}\right)^{j_1+1}} < (2(\nu_0+1))^{n(j_1+1)+1}$$

[4]) SIEGEL, C. L.: Abh. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **1929**, Nr. 1, Hilfssatz S. 8.

und

$$\prod_{\substack{\nu=\nu_0+1\\ \nu\neq\nu_0+\tau}}^{\nu_0+n}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}-\frac{1}{\nu}\right)^{j_1+1}\Bigg| < (\nu_0+2n)^{-(n-1)(j_1+1)}$$

die Ungleichung

$$(13)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{1}{(j_1+1)!}\,\Phi^{(j_1+1)}\left(\dfrac{1}{\nu_0+\tau}\right)\right| < \\ < (\nu_0+2n)^{-(n-1)(j_1+1)}\cdot e^{(n(j_1+1)+1)\log(2(\nu_0+1))+\gamma_3\cdot 2sn}\cdot(\nu_0+2n)^{\gamma_4(8l+8sn+2s^2)}. \end{cases}$$

Andererseits ist $\dfrac{1}{(j_1+1)!}\,\Phi^{(j_1+1)}\left(\dfrac{1}{\nu_0+\tau}\right)$ eine in $\mathfrak{R}_{\nu_0+\tau}$ gelegene algebraische Zahl, die, wie analog den vorangegangenen Betrachtungen zu (6) ersichtlich ist, durch Multiplikation mit $(\nu_0+\tau)^l\cdot T^{j_1+1+m}$ ganzalgebraisch wird. Die Abschätzung dieser ganzalgebraischen Zahl und ihrer Konjugierten läßt sich unter Benutzung der Voraussetzung (3) und von (11) analog (7) und (8) durchführen und liefert

$$(14)\quad \begin{cases} \left|(\nu_0+\tau)^l\cdot T^{j_1+1+m}\cdot\dfrac{1}{(j_1+1)!}\cdot\left(\Phi^{(j_1+1)}\left(\dfrac{1}{\nu_0+\tau}\right)\right)^{\{\sigma\}}\right| < \\ < (\nu_0+\tau)^{\gamma_4(j_1+1+m)}(\nu_0+2n)^{\gamma_4(7l+6sn+2s^2)}(l+1)(m+1)2^{l+m}\times \\ \times(\nu_0+\tau)^l\cdot 2^l\cdot(j_1+1) < (\nu_0+2n)^{\gamma_4(2j_1+1+11l+12sn+2s^2)}. \end{cases}$$

Da die Norm dieser Zahl, falls dieselbe von Null verschieden ist, was nun angenommen werde, absolut genommen, mindestens gleich 1 ist, folgt aus (14)

$$(15)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{1}{(j_1+1)!}\,\Phi^{(j_1+1)}\left(\dfrac{1}{\nu_0+\tau}\right)\right| \geq T^{-(j_1+1+m)}\cdot(\nu_0+\tau)^{-l}\times \\ \times\prod_{2\leq\sigma}\left(T^{j_1+1+m}\cdot(\nu_0+\tau)^l\cdot\dfrac{1}{(j_1+1)!}\cdot\left(\Phi^{(j_1+1)}\left(\dfrac{1}{\nu_0+\tau}\right)\right)^{\{\sigma\}}\right)^{-1} > \\ > (\nu_0+2n)^{(2j_1+1+11l+12sn+2s^2)}. \end{cases}$$

Diese Ungleichung steht offenbar im Widerspruch zu (13), falls (4), was bis jetzt noch nicht benutzt worden ist, gilt, und l genügend groß ist, denn aus (4) folgt einmal für die Teilfaktoren der rechten Seite von (13)

$$(\nu_0+2n)^{-\frac{1}{2}(n-1)(j_1+1)}\cdot e^{n(j_1+1)\log(2(\nu_0+1))}<1$$

für alle positiven j_1, wie leicht nachzuprüfen ist, und weiter durch Division der Ungleichungen (13) durch (15)

$$(16)\quad \begin{cases} 1 < e^{-\frac{1}{2}(n-1)(j_1+1)\log(\nu_0+2n)}\cdot e^{\gamma_3\cdot 2sn}\cdot e^{\log(2(\nu_0+1))}\cdot e^{\gamma_4(2j_1+1)\log(\nu_0+2n)}\times \\ \times e^{\gamma_4(8l+11sl+8sn+2s^2+s(12sn+2s^2))\log(\nu_0+2n)}. \end{cases}$$

Wegen (4) ist

$$n\geq 24\gamma_4(s+1)$$

und daher unter weiterer Berücksichtigung von $j_1\geq j=l$

$$(17)\qquad e^{-\frac{1}{2}(n-1)(j_1+1)\log(\nu_0+2n)}\cdot e^{\gamma_4(2j_1+1+8l+11sl)\log(\nu_0+2n)} < e^{-l\log(\nu_0+2n)}.$$

Durch Kombination von (16) mit (17), indem man den der linken Seite von (17) gleichen Faktor in (16) vergrößert, erkennt man

$$1 < e^{-l+\gamma_4(8sn+2s^2+s(12sn+2s^2))\log(\nu_0+2n)} \cdot e^{\gamma_5 \cdot 2sn} \cdot e^{\log(2(\nu_0+1))},$$

und diese Ungleichung und damit auch (16) ist bei festen Werten von s, γ_4, γ_5 und ν_0 für genügend großes l unmöglich. Nun sei l so groß gewählt, daß (16) nicht gilt. Dann haben wir für alle $j_1 \geq l$ einen Widerspruch zu $\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right) \neq 0$; also muß, wie behauptet $\Phi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{\nu_0+\tau}\right)$ verschwinden.

Dann muß aber $\Phi(z)$ an jeder der Stellen $\frac{1}{\nu_0+\tau}$ $(\tau = n+1, \ldots, 2n)$ von beliebig hoher Ordnung verschwinden, und da es nach seiner Konstruktion (5) eine analytische Funktion ist, ist es identisch Null, d.h. $f(z)$ ist eine algebraische Funktion.

Es geht aus der Beweisdurchführung hervor, daß es ein Leichtes ist, die Zahl n durch eine kleinere zu ersetzen, aber dies soll nicht unsere Aufgabe sein.

Die Rationalität ist gezeigt, wenn von $f(z)$, welches nach Satz 2 unter den gültigen Voraussetzungen als algebraisch bereits erwiesen ist, die Eindeutigkeit bewiesen ist. Diese folgt analog zu [2]) aus dem identischen Verschwinden einer Funktion

$$\Psi(z) = \sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} b_{\lambda\mu} z^\lambda f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right) \tag{18}$$

mit geeigneten Koeffizienten $b_{\lambda\mu}$, denn durch Einführung von w durch $z = \frac{1}{w}$ und $f(z) = \varphi(1/z)$ wird

$$f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right) = f\left(\frac{1}{mw+\mu}\right) = \varphi(mw+\mu),$$

also aus der rechten Seite von (18)

$$\sum_{\lambda,\mu=0}^{l,m} b_{\lambda\mu} w^{-\lambda} \varphi(mw+\mu) = 0,$$

d.h., $\varphi(mw)$ genügt einer linearen homogenen Differenzengleichung mit eindeutigen Funktionen in w als Koeffizienten, woraus bekanntlich die Eindeutigkeit von $\varphi(mw)$, also auch von $f(z)$ folgt.

Mit ϱ^* sei der Radius einer Kreisumgebung des Nullpunktes bezeichnet, innerhalb der die sämtlichen Funktionen $f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)$ mit $\mu = 0, 1, \ldots, m$ regulär sind; dort ist dann auch $\Psi(z)$ regulär.

Die Koeffizienten $b_{\lambda\mu}$ von $\Psi(z)$ seien nun derart zu bestimmen, daß sie nicht alle Null sind und $\Psi(z)$, sowie die Ableitungen $\Psi^{(\iota)}(z)$ $(\iota = 1, \ldots, j)$ auf dem in Satz 2 genannten festen Blatt der RIEMANNschen Fläche von $f(z)$ für $z = \frac{1}{\nu}$; $\nu = \nu_0+n+1, \ldots, \nu_0+2n$ mit $\nu_0 = 2\left[\frac{1}{\varrho^*}+1\right]$ verschwinden. Auch hier liefern diese Bedingungen wieder ein lineares homogenes Gleichungssystem von $n(j+1)$ Gleichungen mit algebraischen Koeffizienten aus einem Körper

höchstens s-ten Grades und mit $(l+1)(m+1)$ Unbestimmten $b_{\lambda\mu}$. Die Koeffizienten dieser Gleichungen haben nach Division durch $\iota!$ die Gestalt

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\iota!}\cdot\frac{d^{\iota}\left(z^{\lambda}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)\right)}{dz^{\iota}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\iota!}\sum_{\eta=0}^{\iota}\binom{\iota}{\eta}\frac{d^{\eta}(z^{\lambda})}{dz^{\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\frac{d^{\iota-\eta}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{dz^{\iota-\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\\ &=\sum_{\eta=0}^{\iota}\left(\frac{1}{\eta!}\cdot\frac{d^{\eta}(z^{\lambda})}{dz^{\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right)\cdot\left(\frac{1}{(\iota-\eta)!}\cdot\frac{d^{\iota-\eta}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{dz^{\iota-\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\right), \end{aligned}\right.$$

wobei der zweite Faktor in der Summe den $(\iota-\eta)$-ten Koeffizienten in der Reihenentwicklung von $f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)$ nach Potenzen von $z-\frac{1}{\nu}$ darstellt. Dieser Faktor läßt sich, wie man mittels Induktion nachprüft, in der Gestalt

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(\iota-\eta)!}\cdot\frac{d^{\iota-\eta}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{dz^{\iota-\eta}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\\ &=\left(\sum_{\delta=1}^{\iota-\eta}\frac{f^{(\delta)}\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)}{\delta!}\cdot(-1)^{\iota-\eta+\delta}\binom{\iota-\eta-\delta}{\delta-1}\frac{m^{\delta}\cdot\mu^{\iota-\eta-\delta}}{(m+\mu z)^{\iota-\eta+\delta}}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} \end{aligned}\right.$$

ausdrücken. Dabei ist

$$\frac{1}{\delta!}f^{(\delta)}\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\delta!}f^{(\delta)}\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right) = a_{\delta}\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)$$

der Koeffizient der δ-ten Potenz von $\left(z-\frac{1}{\nu m+\mu}\right)$ in der zugehörigen Potenzreihenentwicklung von $f(z)$. Mithin ist wegen (19) und (20) mit $T=T\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)$ die Zahl

$$\frac{1}{\iota!}\cdot\frac{d^{\iota}\left(z^{\lambda}f\left(\frac{z}{m+\mu z}\right)\right)}{dz^{\iota}}\Bigg|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^{\lambda}\cdot\left(T\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)\right)^{\iota+1}\cdot(\nu m+\mu)^{2\iota}$$

in $\mathfrak{R}$ vom Grade s ganzalgebraisch. Dieser Körper $\mathfrak{R}$ ist nach Voraussetzung unabhängig von μ. Daraus ist ersichtlich, daß die Koeffizienten der linearen Gleichungen für die $b_{\lambda\mu}$ in $\mathfrak{R}$ gelegene algebraische Zahlen sind, und zwar besitzen die Linearformen

$$\frac{1}{\iota!}\cdot\Psi^{(\iota)}(z)\Big|_{z=\frac{1}{\nu}}\cdot\nu^{l}\cdot\prod_{\mu=0}^{m}\left(\left(T\left(\frac{1}{\nu m+\mu}\right)\right)^{j+1}\cdot(\nu m+\mu)^{2j}\right)$$

in den $b_{\lambda\mu}$ ganzalgebraische Koeffizienten, deren Beträge wegen der Voraussetzung (3) und den Beziehungen (19) und (20), samt den Beträgen ihrer Konjugierten, kleiner als

$$2^{l}\cdot\nu^{l}\cdot\prod_{\mu=0}^{m}\left((\nu_0+2n)m+\mu\right)^{\gamma_4(j+1)+2j}\cdot j\cdot\left((\nu_0+2n)m+m\right)^{\gamma_4 j}\leqq 2^{j}\cdot m^{2j}$$
$$<2^{l+2j}(\nu_0+2n+1)^{l+(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)}m^{(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)}$$

sind. Im Gegensatz zum vorangegangenen Beweis wählen wir nun

$$m = [\sqrt{2sn}] + 1 \quad \text{und} \quad l = \big([\sqrt{2sn}] + 1\big)(j+1);$$

so ist sicher das $2s$-fache der Anzahl der Gleichungen $n \cdot (j+1)$ mit den ganzen Koeffizienten aus einem Körper s-ten Grades kleiner als die Anzahl der Unbestimmten $b_{\lambda\mu}$. Diese lassen sich dann mittels des Schubfachschlusses als nicht sämtlich verschwindende ganze rationale Zahlen ermitteln, die der Bedingung

$$(21) \quad \begin{cases} |b_{\lambda\mu}| < \gamma_6 \cdot 2^{3l+2j}\,(\nu_0+2n+1)^{l+(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)}\, m^{(\gamma_4+2)(m+2)(j+1)} \\ \qquad < \gamma_6\big((\nu_0+2n+1)^2 m\big)^{(\gamma_4+4)([\sqrt{2sn}]+4)(j+1)} \end{cases}$$

genügen, wobei γ_6 nur von $\mathfrak{K}$ abhängt.

Bei der weiteren Beweisdurchführung darf ich mich der größeren Analogie zum vorangegangenen Beweis für Satz 2 wegen kürzer fassen. Es ist der Hilfssatz noch zu zeigen, wonach $\Psi^{(j_1+1)}(z)$ mit $j_1 \geq j$ für alle $z = \frac{1}{\nu_0+n+1}, \ldots, \frac{1}{\nu_0+2n}$ verschwindet unter der Voraussetzung, daß $\Psi^{(i)}(z)$ für alle diese z und $i = 0, 1, \ldots, j_1$ Null ist. Der Beweis wird wieder mittels der Integralformel (12) geführt mit der gleichen Bestimmung von C. Dann folgt mit $\tau = n+1, \ldots, 2n$ unter Beachtung von (21) einerseits aus der CAUCHYschen Formel

$$(22) \quad \begin{cases} \left|\frac{1}{(j_1+1)!}\,\Psi^{(j_1+1)}\Big(\frac{1}{\nu_0+\tau}\Big)\right| < e^{(n-1)(j_1+1)\log(\nu_0+2n)}\, e^{(n(j_1+1)+1)\log(2(\nu_0+1))} \times \\ \qquad \times e^{\gamma_7} \cdot \gamma_6\big((\nu_0+2n+1)^2 m\big)^{(\gamma_4+5)([\sqrt{2sn}]+4)(j_1+1)}. \end{cases}$$

Aus der Darstellung (18) folgt hingegen mit Hilfe der Betrachtungen eingangs dieses Beweises, daß

$$\frac{1}{(j_1+1)!}\,\Psi^{(j_1+1)}\Big(\frac{1}{\nu_0+\tau}\Big) \cdot (\nu_0+\tau)^l \times \prod_{\mu=0}^{m}\left(\left(T\left(\frac{1}{(\nu_0+\tau)\,m+\mu}\right)\right)^{j_1+2} \cdot (\nu_0+\tau)\,m+\mu\right)^{2(j_1+1)}$$

ganze, in $\mathfrak{K}$ gelegene algebraische Zahlen sind, für welche die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\left|\prod_{\mu=0}^{m}\left(\left(T\left(\frac{1}{(\nu_0+\tau)\,m+\mu}\right)\right)^{j_1+2} \cdot \big((\nu_0+\tau)\,m+\mu\big)^{2(j_1+1)}\right) \cdot (\nu_0+\tau)^l \times \right. \\ &\qquad \left. \times \frac{1}{(j_1+1)!}\left(\Psi^{(j_1+1)}\Big(\frac{1}{\nu_0+\tau}\Big)\right)^{\{\sigma\}}\right| \\ &< 2^{l+j_1+2}\,(\nu_0+2n+1)^{l+(\gamma_4+2)(m+2)(j_1+2)}\, m^{(\gamma_4+2)(m+2)(j_1+2)} \cdot (l+1)\,(m+1) \times \\ &\qquad \times \gamma_6\big((\nu_0+2n+1)^2 m\big)^{(\gamma_4+4)([\sqrt{2sn}]+4)(j+1)} \\ &< \gamma_6\big((\nu_0+2n+1)^2 m\big)^{(2\gamma_4+8)([\sqrt{2sn}]+4)(j_1+2)} \end{aligned}$$

gelten.

Dann folgt, falls $\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right) \neq 0$ ist,

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{1}{(j_1+1)!}\,\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right) > \left((v_0+2n+1)\,m\right)^{-(\gamma_4+2)(n+1)(j_1+2)} \times \\ \qquad \times (v_0+2n)^{-(\sqrt{2sn}+1)(j_1+1)}\,\gamma_6^{-(s-1)} \times \\ \qquad \times \left((v_0+2n+1)^2 m\right)^{-(2\gamma_4+8)(s-1)(\sqrt{2sn}+4)(j_1+2)} \\ \qquad > \gamma_6^{-(s-1)}\left((v_0+2n+1)^2 m\right)^{-(2\gamma_4+8)\,s\,(\sqrt{2sn}+4)(j_1+2)}. \end{cases}$$

Wegen (4) folgt nun aus (22) und (23) in Analogie zu (16)

$$0 < -\tfrac{1}{2}\cdot(j_1+1)(n-1)\log(v_0+2n) + \gamma_7 + s\log\gamma_6 + \\ + (j_1+2)\left(\log\left((v_0+n+1)^2 m\right)\right)\cdot(2\gamma_4+8)(s+1)\left(\sqrt{2sn}+4\right),$$

und dies ist für jedes n, das (4*) genügt und genügend großes j_1 unmöglich. Also verschwindet $\Psi^{(j_1+1)}\left(\frac{1}{v_0+\tau}\right)$ für alle $\tau = 1, \ldots, n$ und alle $j_1 \geq j$ bei hinreichend groß gewähltem festem j, und damit ist $\Psi(z) \equiv 0$, was gezeigt werden sollte.

Es sei noch hinzugefügt, daß sich die Sätze 1 und 2 und deren Zusätze naturgemäß modifizieren, wenn andere geeignete als die betrachteten Stellen $1/v$ zugrunde gelegt werden und insbesondere, wenn zu geeigneten Stellen eine p-adische Bewertung herangezogen wird.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. Mai 1953.)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 109—111 (1954)

Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. III*).

Von

WOLFGANG KRULL.

Herr M. KNESER ist unabhängig von mir zu ähnlichen Ergebnissen gekommen wie ich in der Note Pz. II. Insbesondere hat er dabei den folgenden Satz formuliert[1]): Die Behauptung: „die Körperfolge K_i besitzt die Eigenschaft (Z)" ist gleichwertig mit der folgenden Aussage: Es gibt für alle ganzen Zahlen $D \neq 0, 1$ eine berechenbare Schranke $\nu_0(D)$, derart, daß K_i für $i > \nu_0(D)$ keinen Unterkörper der Diskriminante D enthält. Der Beweis ergibt sich mühelos aus den folgenden, auch in Pz. II benutzten Tatsachen: a) Das über K_0 irreduzible Polynom $p(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n$ wird höchstens dann über K_i reduzibel, wenn K_i einen Unterkörper enthält, dessen Diskriminante in der Diskriminante des durch $p(x)$ definierten Normalkörpers N aufgeht. b) Es gibt für jedes D nur endlich viele Körper der Diskriminante D.

Natürlich hat der Knesersche Satz, der kurz als *D-Kriterium* [Diskriminantenkriterium für die Eigenschaft (Z)] bezeichnet werden möge, in seiner allgemeinen Fassung im wesentlichen theoretische Bedeutung. Im folgenden soll eine andere Gedankenreihe entwickelt werden, die etwas überraschend wieder auf einen Zusammenhang mit der Diskriminante führt.

A-Kriterium [Kriterium des absoluten Betrages für (Z)]: *Die Körperfolge K_i besitzt dann und nur dann die Eigenschaft (Z), wenn man für jedes ganze positive $n > 1$ ein System von ganzzahligen Polynomen $\varphi_{in}(u)$ $(i = 1, \ldots, l(n))$ in n Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ so bestimmen kann, daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes Paar (n, M) $(n, M = 2, 3, \ldots)$ läßt sich eine Schranke $\nu_0(n, M)$ berechnen, derart, daß für $\mu > \nu_0(n, M)$ ein ganzzahliges, über K_0 irreduzibles Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ höchstens dann über K_μ reduzibel wird, wenn $|\varphi_{in}(a_1, \ldots, a_n)| > M$ für mindestens ein i aus der Reihe $1, \ldots, l(n)$.*

Daß das A-Kriterium hinreicht, ist trivial. Um einzusehen, daß es auch notwendig ist, hat man nur zu beachten: Man setze $l(n) = n$, $\varphi_{in}(u) = u_i$. Dann genügt es zu zeigen: Hat die Folge K_i die Eigenschaft (Z), so gibt es ein $\nu_0(n, M)$ derart, daß für $\mu > \nu_0(n, M)$ das über K_0 irreduzible Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ auch über K_μ irreduzibel bleibt, falls $|a_i| \leq M$ $(i = 1, \ldots, n)$. Nun gibt es aber nur endlich viele ganzzahlige, über K_0 irreduzible, den Bedingungen $|a_i| \leq M$ $(i = 1, \ldots, n)$ genügende Polynome $p(x)$,

*) Vgl. die beiden gleichbetitelten Noten [diese Z. **59**, 57—60, 296—298 (1953)], die im folgenden mit Pz. I und Pz. II zitiert werden. Der Inhalt von Pz. II, insbesondere die Definition der Eigenschaft (Z) werden als bekannt vorausgesetzt.

[1]) Briefliche Mitteilung von Herrn M. KNESER.

etwa $p_1(x), \ldots, p_\omega(x)$, und es existiert wegen der Eigenschaft (Z) zu jedem $\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, \omega)$ ein $\nu_\varkappa$, derart, daß $p_\varkappa(x)$ irreduzibel über K_μ für $\mu > \nu_\varkappa$. Man kann also einfach $\nu_0(n, M) = \max(\nu_\varkappa)$ $(\varkappa = 1, \ldots, \omega)$ setzen.

Die praktische Brauchbarkeit des A-Kriteriums zeigt der Fall der Folge K_i^* der imaginär quadratischen Zahlkörper. Denn der elementare Beweis von Pz. I für die Tatsache, daß diese Folge die Eigenschaft (Z) besitzt, beruhte auf der Bemerkung, daß bei ihr im Sinne des A-Kriteriums einfach $l(n) = n$, $\varphi_{in}(u) = i^n + u_1 i^{n-1} + \cdots + u_n$, $\nu_0(n, M) = M$ gesetzt werden kann. Der enge Zusammenhang zwischen dem A-Kriterium und dem D-Kriterium ergibt sich aus dem folgenden

Satz. *Kennt man Schranken $\nu_0^*(M)$ $(M = 2, 3, \ldots)$, derart, daß für $i > \nu_0^*(M)$ jeder Unterkörper $K \neq K_0$ eines Körpers K_i der Folge $K_1, K_2, \ldots$ eine Diskriminante D mit $|D| > M$ besitzt, so kann man explizit ein Polynomsystem $\varphi_{in}^*(u)$ $(i = 1, \ldots, l^*(n);\ n = 2, 3, \ldots)$ angeben, derart, daß die Bedingung des A-Kriteriums für die Folge $K_1, K_2, \ldots$ mit $n(l) = n^*(l)$, $\varphi_{in}(u) = \varphi_{in}^*(u)$, $\nu_0(n, M) = \nu_0^*(M)$ erfüllt ist.*

Zur Konstruktion des Systems $\varphi_{in}^*(u)$ gehen wir aus von der Faktorzerlegung des „allgemeinen Polynoms" n-ten Grades $p(x; u) = x^n + u_1 x^{n-1} + \cdots + u_n = (x - \xi_1) \cdot \cdots \cdot (x - \xi_n)$ in dem zu $p(x; u)$ über $K_0(u)$ gehörigen Normalkörper $N_u = K_0(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Wir bilden mit weiteren Unbestimmten $v_1, \ldots, v_n$ das Polynom $P(x; u, v) = \prod [x - (\xi_{i_1} v_1 + \cdots + \xi_{i_n} v_n)]$, wobei die Produktbildung über alle Permutationen $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}$ der Reihe $\xi_1, \ldots, \xi_n$ zu erstrecken ist. Die Diskriminante $D(u, v)$ von $P(u, v)$ wird dann ein ganzzahliges Polynom in den u_i, v_k, und wir behaupten: *Das Koeffizientensystem $\varphi_{in}^*(u)$ des v-Polynoms $D(u, v)$ bildet ein Polynomsystem der gesuchten Art.* Zum Beweis hat man nur zu beachten: Spezialisiert man irgendwie die u_i so zu ganzen Zahlen a_i, daß $p(x) = p(x; a)$ über K_0 irreduzibel, so wird $P(x; a, v) = (x - \eta_1(v)) \cdot \cdots \cdot (x - \eta_n(v))$, und es ist jedes $\eta_k(v)$ primitives Element für den über $K_0(v)$ durch $p(x; a)$ definierten Normalkörper $N_{a,v}$. Dabei wird natürlich $N_{a,v} = N_a(v)$, falls N_a der zu $p(x; a)$ über K_0 gehörige Normalkörper ist. Ist ferner $R_{0,v}$ der Ring aller Polynomquotienten $\frac{a(v)}{b(v)}$ [$a(v)$ ganzzahlig, $b(v)$ ganzzahlig primitiv], $S_{a,v}$ der Ring aller von $R_{0,v}$ ganz abhängigen Elemente aus $N_{a,v}$[2]), so gehören die $\eta_k(v)$ zu $S_{a,v}$, und daraus folgt, daß $D(a, v) = \prod_{i<k} (\eta_i(v) - \eta_k(v))^2$ in $R_{0,v}$ ein Vielfaches der Diskriminante von $S_{a,v}$ über $R_{0,v}$ ist, die ihrerseits, wie bekannt, mit der Diskriminante D von N_a über K_0 übereinstimmt. Das heißt aber: Es müssen alle Koeffizienten $\varphi_{in}^*(a)$ durch D teilbar sein. Aus dieser Tatsache folgt mühelos die Behauptung. [Man beachte insbesondere den schon für den Beweis des D-Kriteriums nötigen Satz a) weiter oben.]

---

[2]) $R_{0,v}$ bzw. $S_{a,v}$ sind die mit den Unbestimmten $v_1, \ldots, v_n$ gebildeten KRONECKERschen Funktionalringe, die zu dem Ring R_0 der ganzen Zahlen bzw. zu der Hauptordnung S_a aller algebraischen Zahlen aus N_a gehören. Aus dieser Tatsache folgt sofort die im Text benutzte Behauptung über die Diskriminante von $S_{a,v}$ über $R_{0,v}$.

Durch die Herstellung des Zusammenhanges zwischen D-Kriterium und A-Kriterium wird auch die Eigenart der (mindestens vorläufigen) Sonderstellung der Folge $K_1^*, K_2^*, \ldots$ der imaginär quadratischen Zahlkörper klarer herausgearbeitet. Die Sonderstellung der K_i^* beruht *nicht* darauf, daß man bei ihnen unmittelbar das A-Kriterium anwenden kann, bei dem nur vom absoluten Betrag und nicht von Teilbarkeitsbedingungen u. dgl. die Rede ist. Denn dieses Kriterium hat ja nicht nur an sich einen universellen Charakter, es ist auch wie wir sahen, mit dem „trivialen" Polynomsystem $\varphi_{in}^*(u)$ überall dort brauchbar, wo die Grundlagen für die Anwendung des D-Kriteriums vorhanden sind. Die Folge der K_i^* ist vielmehr dadurch ausgezeichnet, daß bei ihr neben dem trivialen System der $\varphi_{in}^*(u)$ ein nichttriviales, viel elementareres Polynomsystem $\varphi_{in}(u)$ im Sinne des A-Kriteriums bekannt ist. Will man sich also überhaupt über das D- und A-Kriterium hinaus mit den Körperfolgen, mit der Eigenschaft (Z) näher beschäftigen, so ist die nächstliegende Frage: *Gibt es außer den K_i^* weitere praktisch interessierende Körperfolgen K_i, bei denen einfach definierbare, nichttriviale Polynomsysteme $\varphi_{in}(u)$ im Sinne des A-Kriteriums existieren?* Dabei ist es natürlich — obwohl im A-Kriterium selbst nur vom absoluten Betrag die Rede ist — durchaus zulässig, daß bei der Aufstellung eines Polynomsystems Teilbarkeitsüberlegungen benutzt werden. Auf einer Teilbarkeitsbetrachtung beruhte ja auch der Beweis des Satzes über den Zusammenhang des D-Kriteriums mit dem A-Kriterium. Es dürfte daher auch unnötig sein, nach einer Verallgemeinerung des A-Kriteriums zu fragen, bei der außer von dem absoluten Betrag noch explizit von Kongruenzbedingungen Gebrauch gemacht wird.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

JEGER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 112—119 (1954)

Zur projektiven Differentialgeometrie der ebenen Kurven-3-Gewebe.

Von
M. JEGER.

Einleitung.

In der Ebene α sei ein differenzierbares Kurven-3-Gewebe[1]) durch die drei Nullrichtungen einer kubischen Differentialform gegeben[2]):

$$p_{ijk}\,dx^i\,dx^j\,dx^k = 0. \tag{1}$$

Den Tensor p_{ijk} setzen wir symmetrisch voraus; (1) lautet dann ausgeschrieben:

$$p_{111}(dx^1)^3 + 3p_{112}(dx^1)^2\,dx^2 + 3p_{122}\,dx^1(dx^2)^2 + p_{222}(dx^2)^3 = 0.$$

Die Gewebebedingungen erfordern, daß die drei Nullrichtungen in jedem Punkte eines Gebietes G reell und voneinander verschieden sind. Dies bedeutet, daß die Diskriminante der kubischen Differentialform (1) in allen Punkten von G positiv ist.

$$D \equiv 3p_{112}^2p_{122}^2 - 4p_{111}p_{122}^3 - 4p_{112}^3p_{222} - p_{111}^2p_{222}^2 + \\ + 6p_{111}p_{112}p_{122}p_{222} > 0\,^3).$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß $D \neq 0$ damit gleichbedeutend ist, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} p_{111} & 2p_{112} & p_{122} \\ p_{112} & 2p_{122} & p_{222} \end{pmatrix} \tag{2}$$

den Rang 2 hat. Falls also der Tensor p_{ijk} ein Gewebe aufspannt, so hat das homogene Gleichungssystem

$$p_{ijk}g^{jk} = 0; \qquad i = 1, 2 \tag{3}$$

in den symmetrischen Größen g^{jk} den Rang 2 und seine Lösung lautet bis auf einen Faktor

$$g^{11} = 2\begin{vmatrix} p_{112} & p_{122} \\ p_{122} & p_{222} \end{vmatrix}; \qquad g^{12} = \begin{vmatrix} p_{122} & p_{111} \\ p_{222} & p_{112} \end{vmatrix}; \qquad g^{22} = 2\begin{vmatrix} p_{111} & p_{112} \\ p_{112} & p_{122} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

[1]) Für die genaue Definition des Gewebes vgl. [1], [4] und [5]. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse.

[2]) Diese Darstellung eines 3-Gewebes durch eine kubische Differentialform geht auf J. HAANTJES zurück. Vgl. [2]; dort wird mit Hilfe des Tensors p_{ijk} die sog. Sechseckbedingung konstruiert.

[3]) Vgl. B. L. VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra I, S. 172. Berlin 1930.

Durch eine einfache Rechnung findet man für die Determinante

$$g = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{vmatrix} = D.$$

Aus $D \neq 0$ schließen wir daher die Existenz der inversen Größen g_{ik}, gegeben durch

$$g^{jk} g_{ik} = \delta^j_i. \tag{5}$$

Jedem Gewebe ist damit invariant eine konforme Metrik zugeordnet. Durch Abbildung der Ebene α auf eine Ebene $\bar{\alpha}$, derart, daß ein Netz aus dem Gewebe in das Koordinatennetz von $\bar{\alpha}$ übergeht[4]), läßt sich stets erreichen, daß

$$\bar{p}_{111} = \bar{p}_{222} = 0.$$

In $\bar{\alpha}$ ist dann

$$\bar{g}^{11} = 2\bar{p}^2_{122}; \quad \bar{g}^{12} = -\bar{p}_{122}\bar{p}_{112}; \quad \bar{g}^{22} = 2\bar{p}^2_{112}$$

und wir erhalten für den Winkel zwischen zwei Koordinatenlinien [gegeben durch die kovarianten Vektoren (1,0) und (0,1)]:

$$\cos\omega = \frac{\bar{g}^{ik}\bar{u}_i\bar{v}_k}{\sqrt{\bar{g}^{ik}\bar{u}_i\bar{u}_k \cdot \bar{g}^{jk}\bar{v}_j\bar{v}_k}} = -\frac{1}{2}.$$

Die Kurven des Koordinatennetzes in $\bar{\alpha}$ schneiden sich somit unter dem konstanten Winkel $\pi/3$. Da aber im Gewebe keine Kurvenschar irgendwie ausgezeichnet ist, ergibt sich sofort, daß zwei Kurven, welche verschiedenen Scharen angehören, sich unter dem Winkel $\pi/3$ schneiden[5]).

Wir denken nun für den Moment die Differentialform (1) in ihre drei reellen Linearfaktoren aufgespalten:

$$p_{ijk}\, dx^i\, dx^j\, dx^k = \prod_{\mu=1,2,3} u^{(\mu)}_i\, dx^i. \tag{6}$$

Dann ist

$$D = 24 \prod_{\mu \neq \nu} \{u^{(\mu)}_{[1} u^{(\nu)}_{2]}\}^2 \text{ [6])}.$$

Beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem (bzw. bei einer Abbildung von α auf $\bar{\alpha}$) durch

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2) \tag{7}$$

ist

$$\bar{u}^{(\mu)}_{[1}\bar{u}^{(\nu)}_{2]} = u^{(\mu)}_i u^{(\nu)}_k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{[1}} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{2]}} = 2u^{(\mu)}_{[1} u^{(\nu)}_{2]} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{[1}} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^{2]}},$$

wobei

$$2\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{[1}} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^{2]}} = \Delta = \frac{1}{\bar{\Delta}}$$

---

[4]) Infolge der Gewebebedingungen ist dies wenigstens im kleinen immer möglich.

[5]) Vgl. [1], § 17. Die hier eingeführte konforme Metrik stimmt mit der dort verwendeten überein.

[6]) Zur Vereinfachung der Schreibweise ist von der BACHschen Symbolik Gebrauch gemacht. Beispielsweise ist

$$R_{[ik]} = \tfrac{1}{2}\{R_{ik} - R_{ki}\} \quad \text{und} \quad R_{(ik)} = \tfrac{1}{2}\{R_{ik} + R_{ki}\}.$$

die Funktionaldeterminante der inversen Transformation zu (7) ist. Somit wird

$$\bar{D} = 24 \prod_{\mu+\nu} \{\bar{u}_{[1}^{(\mu)} \bar{u}_{2]}^{(\nu)}\}^2 = D \cdot \Delta^6. \tag{8}$$

Ferner ist

$$\bar{g} = g\, \bar{\Delta}^2. \tag{9}$$

g ist ein Pseudoskalar vom Gewicht -2, D ein Pseudoskalar vom Gewicht 6. Daraus ergibt sich aber, daß

$$g^3 D$$

ein Skalar ist.

Projektive Gewebeinvarianten.

Durch die in den unter Indizes symmetrischen Größen Γ_{jk}^i sei in der Ebene eine affine Übertragung erklärt. Verschiebt man ein Linienelement dx^i im Sinne dieser Übertragung stets in seiner eigenen Richtung, so heißt seine Bahn eine geodätische Linie der Übertragung. Aus dieser Definition leitet man leicht die Differentialgleichungen der geodätischen Linien ab:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \alpha(t) \frac{dx^i}{dt}; \qquad i = 1, 2. \tag{10}$$

Durch die Lage der geodätischen Linien ist umgekehrt die affine Übertragung nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr gibt es eine ganze Klasse isogeodätischer affiner Übertragungen. Die Klasse, welcher unsere Übertragung Γ_{jk}^i angehört, wird aufgespannt durch eine allgemeine bahntreue Transformation

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i w_k + \delta_k^i w_j \text{ [7]} \tag{11}$$

mit dem willkürlichen Kovektorfeld w_k.

Das invariant mit einer Klasse isogeodätischer affiner Übertragungen verbundene System von Integralkurven der Gln. (10) wird auch als quasigeodätisches System bezeichnet. In einer solchen Klasse, welche etwa durch das zugehörige quasigeodätische System gegeben sein mag, ist nur die Verschiebung eines Linienelementes in seiner eigenen Richtung erklärt. Im Gegensatz zum affinen Zusammenhang, bei dem die Verschiebung eines Linienelementes längs beliebiger Wege erklärt ist, spricht man auch von einem projektiven Zusammenhang und wir wollen im folgenden affine Zusammenhänge oder Übertragungen, welche in derselben Klasse liegen, projektiv-äquivalent heißen.

In einer früheren Arbeit wurde gezeigt [8], daß die Kurven eines 3-Gewebes stets unendlich vielen quasigeodätischen Systemen angehören. Unter Zugrundelegung eines Koordinatensystems, in welchem

$$p_{111} = p_{222} = 0$$

[7] Vgl. SCHOUTEN: Der Ricci-Kalkül, S. 76. Berlin 1924.
[8] Vgl. [4], § 2 oder [5] Abschnitt II.

ist, ergibt sich bis auf bahntreue Transformationen für die CHRISTOFFELschen Symbole der allgemeinsten affinen Übertragung, in der die Gewebekurven geodätische Linien sind[9])

$$(12)\qquad \begin{cases} \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\partial_2 \ln\left(\frac{p_{112}}{p_{122}}\right) + \lambda(x^1, x^2)\cdot p_{122} \\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\partial_1 \ln\left(\frac{p_{122}}{p_{112}}\right) - \lambda(x^1, x^2)\cdot p_{112} \\ \Gamma^i_{jk} = 0, \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

wo $\lambda(x^1, x^2)$ eine willkürliche Funktion in den beiden Variabeln x^1 und x^2 ist. Daraus folgt, daß durch jede feste Wahl der Funktion λ in eindeutiger Weise eine Klasse isogeodätischer Übertragungen und damit ein quasigeodätisches System festgelegt ist.

Die Funktion λ bestimmt wohl zusammen mit einem 3-Gewebe ein quasigeodätisches System; sie ist aber keine Invariante dieser beiden Objekte. Letzteres entnimmt man ohne weiteres (12), denn diese Darstellung gilt ja nur in einem ganz speziellen Koordinatensystem und zudem ändert sich λ bereits bei einer Umnormierung des Tensors p_{ijk}

$$(13)\qquad \overline{p}_{ijk} = \sigma\, p_{ijk},$$

welche das Gewebe invariant läßt.

Mit einer affinen Übertragung ist ein koordinateninvarianter Differentiationsprozeß verbunden. Die kovariante Ableitung von p_{ijk} ist gegeben durch

$$(14)\qquad \nabla_h p_{ijk} = \partial_h p_{ijk} - \Gamma^l_{hi} p_{ljk} - \Gamma^l_{hj} p_{ilk} - \Gamma^l_{hk} p_{ijl}.$$

Diese Ableitung ist nicht projektiv-invariant; nach der bahntreuen Transformation (11) wird

$$(15)\qquad \nabla^*_h p_{ijk} = \nabla_h p_{ijk} - 3 w_h p_{ijk} - w_i p_{hjk} - w_j p_{ihk} - w_k p_{ijh}.$$

Unser Ziel besteht nun im Aufsuchen von Projektiv-Invarianten eines Gewebes bezogen auf die quasigeodätischen Systeme, denen seine Kurven angehören. Dies sind Größen, die nur vom Gewebe und einer bestimmten, das Gewebe geodätisch enthaltenden Klasse isogeodätischer affiner Übertragungen abhängen.

Zunächst bilden wir aus (15) durch Alternieren der Indizes i und h

$$(16)\qquad \nabla^*_{[h} p_{i],jk} = \nabla_{[h} p_{i]jk} - 2 w_{[h} p_{i]jk}.$$

Durch Überschieben mit g^{jk} ergibt sich infolge von (3)

$$(17)\qquad g^{jk} \nabla^*_{[h} p_{i]jk} = g^{jk} \nabla_{[h} p_{i]jk}.$$

(17) ist noch keine Invariante, denn sowohl p_{ijk} als auch g^{jk} sind nur je bis auf einen Faktor durch das Gewebe bestimmt. Hingegen kommt

$$(18)\qquad g^{jk} \nabla_{[h} p_{i],jk} = 0$$

[9]) Die Ableitung dieser Formeln ist in [4] und [5] durchgeführt.

Invariantencharakter zu, denn das Verschwinden der linken Seite ist invariant gegenüber Umnormierungen

$$\begin{cases} \bar{p}_{ijk} = \sigma \cdot p_{ijk} \\ \bar{g}^{jk} = \varrho \cdot g^{jk}. \end{cases} \tag{19}$$

Zur Diskussion von (18) verwenden wir nun wieder ein spezielles Koordinatensystem, in welchem $p_{111} = p_{222} = 0$. Aus $D \neq 0$ folgt dann

$$p_{112} \neq 0, \quad p_{122} \neq 0.$$

Die projektiven Zusammenhänge über dem Gewebe sind in diesem Falle durch (12) gegeben und man findet durch eine einfache Rechnung für die einzige wesentliche Komponente von (18):

$$g^{jk} \nabla_{[1} p_{2]jk} = -4\lambda (p_{112} p_{122})^2. \tag{20}$$

Das Verschwinden der linken Seite ist daher gleichbedeutend mit $\lambda = 0$. Das zugehörige quasigeodätische System ist aber das sog. Doppelverhältnissystem[10]; dieses besteht aus denjenigen Kurven der Ebene, deren Tangenten mit den Tangenten an das Gewebe ein festes Doppelverhältnis bilden.

Unter den projektiven Zusammenhängen über einem Gewebe ist das geometrisch ausgezeichnete D.V.-System durch die Beziehung (18) *gekennzeichnet.*

Wir haben damit in (18) eine koordinateninvariante Charakterisierung des D.V.-Systems gefunden.

Um zu einer invarianten Größe für die übrigen quasigeodätischen Systeme zu gelangen, müssen wir beachten, daß uns zur Elimination der Umnormierungsfaktoren σ und ϱ in (19) nur der koordinateninvariante Skalar $g^3 D$ zur Verfügung steht. Da

$$\bar{g} = \varrho^2 \cdot g \quad \text{und} \quad \bar{D} = \sigma^4 \cdot D$$

transformiert sich dieser bei einer Umnormierung wie

$$(\bar{g}^3 \bar{D}) = \varrho^6 \cdot \sigma^4 \cdot (g^3 D). \tag{21}$$

Es kommen als Gewebeinvarianten daher nur Größen in Frage, welche in g^{jk} vom Grad $3n$ und in p_{ijk} vom Grad $2n$ sind. Mit

$$p_k^{hl} = g^{ih} g^{jl} p_{ijk}$$

ist

$$p_k^{hl} g^{ij} \nabla_{[r} p_{s]ij}$$

eine solche Größe und es ist daher der Tensor

$$T_{krs}^{hl} = \frac{1}{\sqrt{D g^3}} \cdot p_k^{hl} g^{ij} \nabla_{[r} p_{s]ij} \tag{22}$$

[10] Diese Bezeichnungsweise stammt von THOMSEN; vgl. [2], sowie [4] und [5].

und damit auch die Verjüngung

$$T^h_{ks} = T^{hr}_{krs} \tag{23}$$

eine projektive Gewebeinvariante im geforderten Sinne[11]).

Der Tensor (22) ist symmetrisch in den Indizes h, l und schiefsymmetrisch in r, s. Weiter ist infolge von (3)

$$T^{hl}_{krs} = 0.$$

Es verbleiben daher für T^{hl}_{krs} vier wesentliche Komponenten. Durch Abzählen stellt man leicht fest, daß auch die Verjüngung (23) vier wesentliche Komponenten umfaßt.

In unserem speziellen Koordinatensystem findet man unter Berücksichtigung von (20) für die vier wesentlichen Komponenten von (23):

$$\begin{cases} T^1_{11} = -T^2_{12} = -T^2_{21} = \frac{4}{3}\lambda \cdot p_{112} \\ T^2_{22} = -T^1_{12} = -T^1_{21} = -\frac{4}{3}\lambda \cdot p_{122} \\ T^1_{22} = 0 \\ T^2_{11} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Wir bezeichnen den Tensor T^i_{ks} als Einbettungstensor des Gewebes. Aus (12) und (24) entnehmen wir:

Zu verschiedenen quasigeodätischen Systemen gehören verschiedene Einbettungstensoren.

Das Verschwinden des Einbettungstensors kennzeichnet das Doppelverhältnissystem.

Geodätische Einbettung von Geweben.

Die Einbettung eines 3-Gewebes in quasigeodätische Systeme wurde bis jetzt nur in einem speziellen Koordinatensystem explizit angegeben[12]). Zum Schluß sei diese Konstruktion auch noch in einem beliebigen Koordinatensystem durchgeführt.

Das Gewebe sei gegeben durch (1). Wir betrachten nun eine beliebige Gewebekurve $x^i(t)$ [13]); sie ist Integralkurve eines Nullrichtungsfeldes von (1) und es ist daher:

$$\frac{d}{dt}\left(p_{ijk}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right) = 0. \tag{25}$$

Führt man den Differentiationsprozeß aus, so ergibt sich

$$\left\{\partial_h p_{ijk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt} + 3\,p_{ijk}\frac{d^2x^k}{dt}\right\}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0.$$

---

[11]) Es handelt sich genauer um eine Relativ-Invariante des Gewebes, bezogen auf ein bestimmtes quasigeodätisches System, dem das Gewebe angehört.

[12]) Vgl. Formeln (12). Dort sind die Einbettungsbeziehungen aufgelöst nach den Übertragungsparametern Γ^i_{jk}.

[13]) t ist Kurvenparameter.

Die Kurve $x^i(t)$ ist eine geodätische Linie in der affinen Übertragung Γ^i_{jk}, wenn

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} + \Gamma^l_{hk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha(t)\frac{dx^l}{dt}. \tag{26}$$

Nach Elimination der zweiten Ableitungen in (25) mit Hilfe von (26) erhalten wir

$$\{\partial_h p_{ijk} - 3\Gamma^l_{hi} p_{ljk}\}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Durch Aufspaltung des zweiten Gliedes in der Klammer und nachfolgende geeignete Wahl der Summationsindizes läßt sich dieser Ausdruck zurückführen auf

$$\nabla_h p_{ijk}\frac{dx^h}{dt}\cdot\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{27}$$

Im Hinblick auf den Vergleich von Nullrichtungen müssen wir den erzeugenden Tensor der Differentialform auf der linken Seite von (27) symmetrisieren[14]). Mit

$$\nabla_{(h} p_{ijk)} = p_{hijk}$$

ergibt sich für (27) ähnlich wie im Falle der kubischen Differentialform (1) die symmetrische Schreibweise

$$p_{hijk}\,dx^h\,dx^i\,dx^j\,dx^k = 0.$$

Soll das Gewebe geodätisch sein, so müssen sämtliche drei Nullrichtungen von p_{ijk} zugleich auch Nullrichtungen von p_{hijk} sein. Die vierte Nullrichtung von p_{hijk} ist willkürlich; wir legen sie fest durch ein Kovektorfeld u_i. Da die Koeffizienten einer symmetrischen Differentialform durch die Nullrichtungen bis auf einen Faktor bestimmt sind, ergibt sich als Einbettungsbedingung:

$$p_{hijk} = u_{(h} p_{ijk)}. \tag{28}$$

Ausgeschrieben lautet (28)

$$\begin{cases} \nabla_1 p_{111} = u_1 p_{111} \\ 3\nabla_1 p_{112} + \nabla_2 p_{111} = 3u_1 p_{112} + u_2 p_{111} \\ 2\nabla_1 p_{122} + 2\nabla_2 p_{112} = 2u_1 p_{122} + 2u_2 p_{112} \\ \nabla_1 p_{222} + 3\nabla_2 p_{122} = u_1 p_{222} + 3u_2 p_{122} \\ \nabla_2 p_{222} = u_2 p_{222}. \end{cases} \tag{29}$$

Der willkürliche Kovektor u_i läßt sich noch eliminieren; (29) ist damit äquivalent, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} \nabla_1 p_{111} & 3\nabla_1 p_{112} + \nabla_2 p_{111} & 2\nabla_1 p_{122} + 2\nabla_2 p_{112} & \nabla_1 p_{222} + 3\nabla_2 p_{122} & \nabla_2 p_{222} \\ p_{111} & 3p_{112} & 2p_{122} & p_{222} & 0 \\ 0 & p_{111} & 2p_{112} & 3p_{122} & p_{222} \end{pmatrix}$$

[14]) Der symmetrische Teil des erzeugenden Tensors einer Differentialform n-ter Ordnung ist durch die n Nullrichtungen bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.

den Rang 2 hat. Dies entspricht einem linearen Gleichungssystem in den Γ^i_{jk}; die Lösung führt auf die den Formeln (12) analogen Ausdrücke für die Γ^i_{jk} in einem allgemeinen Koordinatensystem.

Bemerkenswert ist die aus dieser Beziehung folgende Bedingung für ein Geradengewebe. Das zum Tensor p_{ijk} gehörende 3-Gewebe ist gerade, wenn es geodätisch in der Übertragung $\Gamma^i_{jk}=0$ enthalten ist, d.h. wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 p_{111} & 3\partial_1 p_{112}+\partial_2 p_{111} & 2\partial_1 p_{122}+2\partial_2 p_{112} & \partial_1 p_{222}+3\partial_2 p_{122} & \partial_2 p_{222} \\ p_{111} & 3p_{112} & 2p_{122} & p_{222} & 0 \\ 0 & p_{111} & 2p_{112} & 3p_{122} & p_{222} \end{pmatrix}$$

den Rang 2 hat.

Literatur.

[1] Blaschke-Bol: Geometrie der Gewebe. Berlin 1938. — [2] Haantjes, J.: Hexagonal tree-webs. Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam **49**, No. 1 (1946). — [3] Thomsen, G.: Doppelverhältnis-Systeme. Abh. Hamburg **8**, 115—122 (1930). — [4] Jeger, M.: Projektive Zusammenhänge und Gewebe. Diss. E. T. H. Zürich 1949. — [5] Jeger, M.: Projektive Methoden in der Gewebegeometrie. Comm. Math. Helv. **24**, 260—290 (1950).

Zürich (Schweiz), Technische Hochschule.

(Eingegangen am 16. Januar 1954.)

NAUMANN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 120—141 (1954)

Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie.

Von
HERBERT NAUMANN.

Einleitung.

Nach M. HALL [*10*][1]) reicht zur Begründung einer analytischen ebenen Geometrie, in der die Geraden durch lineare Gleichungen ausgedrückt werden, außer den trivialen affinen Inzidenzaxiomen ein eng an das Koordinatensystem gebundener Spezialfall des kleinen Desarguesschen Satzes aus. Algebraisch werden auf dieser Stufe außer den Loopeigenschaften der Addition und Multiplikation[2]) nur gewisse, Addition und Multiplikation miteinander verbindende Auflösbarkeitsaxiome gefordert, aber keines der assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze. Bei Hinzunahme einzelner dieser Rechengesetze ergeben sich weitere Stufen, die geometrisch durch stärkere Schnittpunktsätze gekennzeichnet sind. In der vorliegenden Arbeit wird eine derartige Stufensystematik gegeben und die Frage nach der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen mittels entsprechender Modelle behandelt.

Die vorliegende Arbeit entstand im Anschluß an Seminare über Grundlagen der Geometrie auf Anregung von Herrn Prof. Dr. ARNOLD SCHMIDT.

§ 1. Axiomatische Grundlage.

Dieser Arbeit liegen die Axiome und Punktrechnungsdefinitionen HILBERTs[3]) zugrunde. Von den geometrischen Axiomen HILBERTs benötigen wir die ebenen Verknüpfungsaxiome I 1—3 und das verschärfte Parallelenaxiom IV*. Wir bezeichnen dieses Aggregat von Axiomen im folgenden kurz als die (trivialen) ebenen affinen Axiome und eine Geometrie, die diesen Axiomen genügt, als „affine Ebene".

Von dem HILBERTschen Axiomensystem der reellen Zahlen[4]) benötigen wir die Verknüpfungs- und die Rechenaxiome[5]):

---

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

[2]) Letztere unter Ausschluß des additiv neutralen Elements 0, für dessen Multiplikation $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ gilt.

[3]) D. HILBERT [*11*].

[4]) D. HILBERT [*11*], Anhang VI [„Über den Zahlbegriff", abgedruckt aus Jber. dtsch. Math. Ver. **8** (1900)]. — Die Numerierung der Axiome ist hier eine andere als bei HILBERT.

[5]) In der Algebra ist diese Aufteilung der Körperaxiome in Axiome der Verknüpfung und Axiome der Rechnung nicht üblich geworden; im folgenden wird sie sich jedoch als zweckmäßig und der Behandlung unseres Stoffes als durchaus angemessen erweisen.

I. Axiome der Verknüpfung.

I 1. Eindeutige Existenz einer Summe und eines Produkts.

I 2. Eindeutige Existenz einer Zahl Null und einer davon verschiedenen Zahl Eins mit

$$a + 0 = 0 + a = a, \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \qquad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

I 3. Eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen $a + x = b$ und $y + a = b$ bei beliebig gegebenem a, b und der Gleichungen $a\,x = b$ und $y\,a = b$ bei $a \neq 0$.

II. Axiome der Rechnung.

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Formeln:

II 1. $a + (b + c) = (a + b) + c$

II 2. $a(b + c) = a\,b + a\,c$ (1. distributives Axiom)

II 3. $a + b = b + a$

II 4. $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$ (2. distributives Axiom)

II 5. $a(b\,c) = (a\,b)\,c$

II 6. $a\,b = b\,a$.

Zur Definition eines Alternativkörpers (vgl. § 4) fügen wir den Axiomen I 1–3, II 1–4 das folgende abgeschwächte assoziative Gesetz der Multiplikation an:

II 5*: Wenn a und b beliebige Zahlen sind, so gelten stets die Formeln

$$a(a\,b) = (a\,a)\,b \quad \text{und} \quad (a\,b)\,b = a(b\,b).$$

Die allgemeinsten Systeme doppelter Komposition, von denen hier die Rede sein wird, erfüllen die Axiome I 1–3; wir nennen sie kurz *„Zahlensysteme"* und ihre Elemente einfach *„Zahlen"*.

Zur Definition einer affinen analytischen Geometrie mittels eines Zahlensystems reichen die Axiome I 1–3 nicht aus, wie folgendes Beispiel zeigt.

Wir betrachten das Zahlensystem mit der Additions- und Multiplikationsvorschrift

$+$	0	1	a	a^2	a^3	a^4
0	0	1	a	a^2	a^3	a^4
1	1	0	a^4	a^3	a^2	a
a	a	a^2	0	1	a^4	a^3
a^2	a^2	a^4	a^3	0	a	1
a^3	a^3	a	1	a^4	0	a^2
a^4	a^4	a^3	a^2	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	a^2	a^3	a^4
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	a^2	a^3	a^4
a	0	a	a^2	a^3	a^4	1
a^2	0	a^2	a^3	a^4	1	a
a^3	0	a^3	a^4	1	a	a^2
a^4	0	a^4	1	a	a^2	a^3.

In diesem System gelten die algebraischen Verknüpfungsaxiome I 1–3 (und außerdem die Axiome der Rechnung II 2, 4–6, aber nicht II 1 und II 3).

Durch Zahlenpaare dieses Zahlensystems kann keine affine Geometrie gegeben werden, denn es lassen sich $6^2 = 36$ Zahlenpaare bilden, und diesen 36 Zahlenpaaren müßte eine affine Geometrie mit 6 Punkten auf der Geraden entsprechen, was nach einem kombinatorischen Resultat von G. TARRY [25][6]) nicht möglich ist.

Wenn jedoch gewisse lineare Auflösbarkeitsaxiome zu den Axiomen I 1–3 hinzutreten, dann ist die Möglichkeit, eine affine Geometrie zu konstruieren, immer gegeben, wie sich zeigen wird.

Unter Voraussetzung des assoziativen Gesetzes der Addition II 1 reichen die Axiome Iα und Iβ aus:

Iα. $-a\,x + b\,x = c$ eindeutig lösbar für $a \neq b$

Iβ. $y\,a - y\,b \;\; = c$ eindeutig lösbar für $a \neq b$.

Hierbei ist $-a\,x$ die bei gegebenem x nach I 3 eindeutig existierende Zahl, für die $a\,x + (-a\,x) = 0$ und, nach I 1–3, II 1, auch $-a\,x + a\,x = 0$ ist; $y\,a - y\,b$ ist lediglich als abkürzende Schreibweise für $y\,a + (-y\,b)$ zu verstehen.

Ist die Assoziativität der Addition nicht vorausgesetzt, so treten an die Stelle von Iα und Iβ die Axiome Iα^* und Iβ^*:

Iα^*. Das Gleichungssystem

$$y + a\,x = b$$
$$y + c\,x = d$$

ist für $a \neq c$ eindeutig nach x, y auflösbar.

Iβ^*. Die Gleichung

$$a + u\,b = c + u\,d$$

ist für $b \neq d$ eindeutig nach u auflösbar.

Diese Auflösbarkeitsaxiome wird man sinngemäß zur Gruppe I zählen.

§ 2. Einführung einer Punktrechnung. Koordinaten. Vergleich der Definitionen HILBERTs mit denen HALLs.

In einer beliebigen affinen Ebene zeichnen wir drei verschiedene Scharen paralleler Geraden aus und nennen die zugehörigen Geraden $\mathfrak{X}$-, $\mathfrak{Y}$- und $\mathfrak{E}$-Geraden. Einen Punkt der Ebene wählen wir als Koordinatenursprung und nennen die $\mathfrak{X}$-Gerade durch O die x-Achse und die $\mathfrak{Y}$-Gerade durch O die y-Achse. Nach HILBERT definiert man nun für die Punkte der x-Achse eine Addition und eine Multiplikation und stellt die Punkte der Ebene durch Koordinatenpaare solcher Punkte dar; bei HALL geschehen entsprechende

[6]) Siehe auch R. H. BRUCK u. H. J. RYSER [7].

Definitionen für die Punkte der $\mathfrak{E}$-Geraden durch O. Die Definitionen HILBERTs und HALLs geben wir andeutungsweise durch Fig. 1 zusammenfassend wieder.

Für beide Punktrechnungen gelten ersichtlich die algebraischen Axiome I 1—3. Jedem beliebigen Punkt A der x-Achse ordnen wir den Schnittpunkt A' der $\mathfrak{E}$-Geraden durch O mit der $\mathfrak{Y}$-Geraden durch A zu und umgekehrt. Um die Multiplikation in der HALLschen Punktrechnung mit der

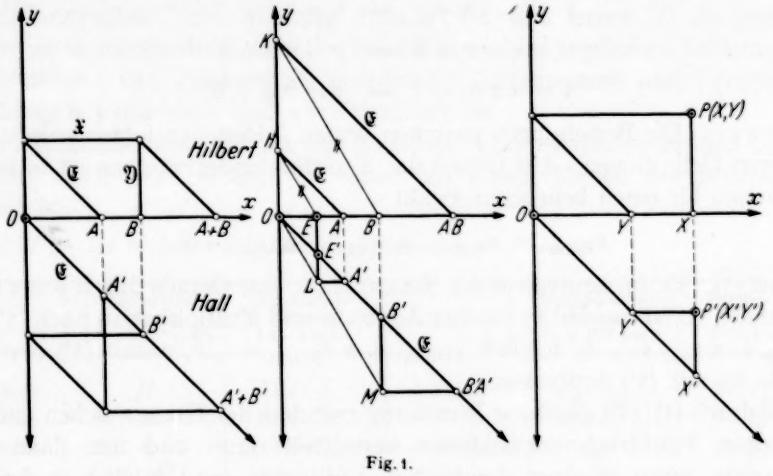

Fig. 1.

in der HILBERTschen vergleichen zu können, setzen wir zunächst voraus, daß die willkürlich, aber fest zu wählenden Punkte E und E', die die Rolle der Eins in den Punktrechnungen spielen, einander zugeordnete Punkte sind. Ferner fordern wir die Gültigkeit des affinen kleinen Desarguesschen Satzes für den Fall, daß zwei entsprechende Dreiecks-Ecken auf der y-Achse liegen und die zugehörigen Gegenseiten $\mathfrak{X}$-Geraden sind (Fig. 2). Dieser Schnittpunktsatz wird im folgenden mit $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ bezeichnet werden. Durch Anwendung dieses Satzes (bzw. einer seiner mit ihm äquivalenten Umkehrungen) erst auf die Dreiecke E, A, H; L, A', O, dann auf die Dreiecke B, AB, K; $M, B'A', O$ folgt sodann, daß HILBERTsche und HALLsche Punktrechnungsmultiplikationen invers-isomorph zueinander sind, d.h. $a\, b_{\text{Hilbert}} = b\, a_{\text{Hall}}$, wo a und b die den Punkten A, A' und B, B' zugeordneten Zahlen sind.

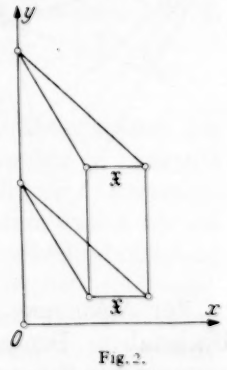

Fig. 2.

Satz 1. *Seien in einer affinen Geometrie die Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$, ferner die Punkte O, E und E' fest gewählt (OE $\mathfrak{X}$-Gerade, EE' $\mathfrak{Y}$-Gerade, OE' $\mathfrak{E}$-Gerade); ferner seien mit ${}_l a$ und ${}_r a$ die zu a links- bzw. rechtsnegativen Zahlen bezeichnet* (${}_l a + a = a + {}_r a = 0$). *Dann ist unter Voraussetzung des Schnittpunktsatzes $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ der Zusammenhang zwischen der* HILBERTschen *und der* HALLschen *Darstellung durch folgende Beziehungen gegeben:*

	HILBERT		HALL
(1)	$a+b=c$	$\leftrightarrow$	$b\,{}_{r}c={}_{r}a$
(1′)	${}_{l}c+a={}_{l}b$	$\leftrightarrow$	$a+b=c$
(2)	$a\,b$	$\leftrightarrow$	$b\,a$
(3)	$P(a,b)$	$\leftrightarrow$	$P(a,{}_{r}b)$
(3′)	$P'(a,{}_{l}b)$	$\leftrightarrow$	$P'(a,b)$
(4)	$x=c$	$\leftrightarrow$	$x=c$
(5)	$y+a\,x=b$	$\leftrightarrow$	$y=x\,a\,{}_{r}b$
(5′)	$y+a\,x={}_{l}b$	$\leftrightarrow$	$y=x\,a+b$.

Beweis. Die Beziehungen zwischen beiden Additionen folgen unmittelbar aus ihren Definitionen. Auf Grund der Koordinatendefinitionen ist in beiden Additionen für einen beliebigen Punkt

$$x_{\text{Hilbert}}=x_{\text{Hall}},\qquad y_{\text{Hilbert}}+y_{\text{Hall}}=0,$$

was mit (3), (3′), (4) äquivalent ist. Ist bei HALL eine Gerade durch $y=x\,a+b$ dargestellt, so ist bei HILBERTscher Addition und Multiplikation nach (1′), (2) ${}_{l}y_{\text{Hall}}+a\,x_{\text{Hall}}={}_{l}b$, folglich $y_{\text{Hilbert}}+a\,x_{\text{Hilbert}}={}_{l}b$, womit (5′) bewiesen ist. (5) ist mit (5′) äquivalent.

Die durch (1), (1′) gegebene Beziehung zwischen der HILBERTschen und der HALLschen Punktrechnungsaddition vermittelt dann und nur dann eine Isomorphie, wenn in einer der beiden Additionen (und folglich in beiden) aus $a+(b+c)=0$ stets $(a+b)+c=0$ folgt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das assoziative Gesetz der Addition gilt, und folgt auch schon aus den schwächeren Gesetzen

$$\left.\begin{aligned}-a+a=a-a=0,\\(a+b)-b=a=-b+(b+a).\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

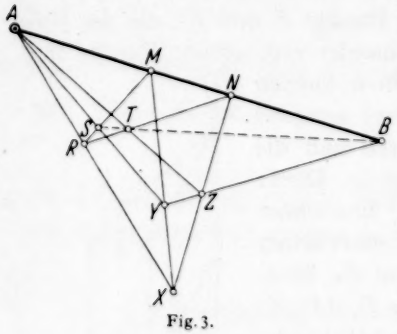

Fig. 3.

§ 3. Stufen der Begründung.

Wir stellen nun sieben Stufen der affinen Geometrie zusammen, die durch verschiedene geometrische und algebraische Voraussetzungen gekennzeichnet sind.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die benötigten Schnittpunktsätze durch Buchstaben. Den affinen PAPPUS-PASCALschen Satz und den affinen DESARGUESschen Satz nennen wir Π und Δ. Mit $\boldsymbol{d}$ bezeichnen wir den sog. „kleinen Desarguesschen Satz", von M. HALL als „Theorem L" bezeichnet (Fig. 3; Benennungen der Punkte wie bei HALL); es können bei diesem Satz Punkte oder auch eine Gerade uneigentlich sein. Die übrigen der benötigten Schnittpunktsätze sind sämtlich Spezialfälle des kleinen Desarguesschen Satzes. Wird die Gerade $AMNB$ als uneigentlich vorausgesetzt, so entsteht der „affine kleine Desarguessche Satz" δ. Weiter ist $\boldsymbol{d}^{\mathfrak{D}}$ der Spezialfall mit ARX

als uneigentlicher Gerade und A als uneigentlichem Schnittpunkt Y_∞ aller $\mathfrak{Y}$-Geraden, $\delta_\mathfrak{Y}$ der Spezialfall mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade und A als Y_∞, analog $\delta_\mathfrak{X}$ mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade und A als X_∞, und schließlich $\delta_y^\mathfrak{X}$ mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade, ARX als y-Achse und B als X_∞ (vgl. Fig. 2).

Eine affine Geometrie und ein Zahlensystem nennen wir gekoppelt, wenn (1) das gegebene Zahlensystem isomorph dem Zahlensystem ist, das durch die gegebene Geometrie nach Vorgabe eines Koordinatensystems vermittels der HILBERTschen Punktrechnung definiert ist, und ferner (2) die gegebene Geometrie isomorph der Geometrie ist, die über dem gegebenen Zahlensystem bei Erklärung von Punkten als geordneten Zahlenpaaren und Geraden als Gleichungen $y + a\,x = b$ und $x = c$ definiert ist.

Ein geometrisches und ein algebraisches Axiomensystem nennen wir gekoppelt, wenn jedes Modell des einen mit einem Modell des anderen gekoppelt ist.

Satz 2. *Es bestehen folgende Koppelungen*:

	Geometrische Axiome I 1–3, IV* sowie	Algebraische Axiome I 1–3 sowie		Geometrische Axiome I 1–3, IV* sowie	Algebraische Axiome I 1–3 sowie
1. Stufe	Π	II 1–6	5. Stufe	$\delta_\mathfrak{X}$, $\delta_\mathfrak{Y}$	I α, II 1,2
2. Stufe	Δ	II 1–5		$(\to \delta)$	$(\to$ II 3)
3. Stufe	$\boldsymbol{d}$	II 1–4,5*	6. Stufe	$\delta_\mathfrak{Y}$	I α, β, II 1
4. Stufe	δ, $\boldsymbol{d}^\mathfrak{Y}$	II 1–4	7. Stufe	$\delta_y^\mathfrak{X}$	I α*, β*

Die meisten dieser Koppelungen sind aus der Abhandlung [*10*] von M. HALL mittels der Übersetzungsvorschrift von § 2 und einfacher geometrischer Überlegungen herzuleiten[7]). Wegen des Beweises von δ aus $\delta_\mathfrak{X}$ und $\delta_\mathfrak{Y}$ und des Beweises der Kommutativität der Addition II 3 aus den Axiomen I 1–3, α, II 1, 2 siehe § 6.1 und § 6.2.

§ 4. Modelle zu den Stufen eins bis vier.

Wir behandeln nun die Frage nach der logischen Unabhängigkeit der einzelnen Stufen. Zu den Unabhängigkeitsbeweisen werden — zumeist algebraische — Modelle herangezogen. Unter einem Modell (einer Geometrie, eines Zahlensystems) der ersten, zweiten, ..., siebenten Stufe wollen wir ein System von Dingen verstehen, welches die (geometrischen oder algebraischen) Axiome der betreffenden Stufe befriedigt, nicht aber die der nächst-„stärkeren" Stufe. Bei der Angabe solcher Modelle werden wir bei der stärksten (ersten) Stufe beginnen und schrittweise bis zur schwächsten (siebenten) Stufe vorgehen.

Die algebraischen Modelle der *ersten Stufe* sind die Körper, und als algebraische Modelle der *zweiten Stufe* kommen genau die echten Schiefkörper in Betracht.

[7]) Es sei hier daran erinnert, daß die beiden ersten Stufen zuerst von D. HILBERT [*11*] und die dritte von R. MOUFANG [*15*], [*16*] näher untersucht wurden; betreffs weiterer vorliegender Arbeiten zu den in Satz 2 angegebenen Koppelungen sei auf später folgende Zitate verwiesen.

Die algebraischen Modelle der *dritten Stufe* sind die echten Alternativkörper und als solche CAYLEY-DICKSON-Algebren über ihren Zentren[8]). Die einfachste unter ihnen ist die CAYLEYsche Algebra über dem Körper der rationalen oder der reellen Zahlen, deren Basisgrößen $1, e_1, e_2, \ldots, e_7$ sich nach passender Numerierung folgendermaßen multiplizieren:

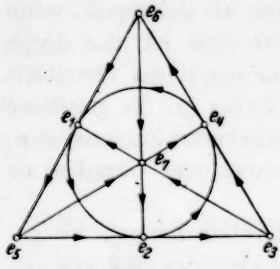

Fig. 4.

$$e_i\, e_{i+k} = \begin{cases} e_{i+3k} \\ -1 \\ -e_{i-2k} \end{cases} \quad \text{für} \quad k^3 \equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \pmod 7,$$

wobei die Indizes mod 7 aus dem Restsystem 1, 2, ..., 7 zu nehmen sind. Diese Multiplikationsvorschrift läßt sich leicht in Gestalt einer (symbolischen) Konfiguration 7_3 merken, deren Seiten mit einem zyklischen Durchlaufungssinn versehen sind (Fig. 4):

Es ist $e_\alpha^2 = -1$ und, wenn $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ ein „kollineares" Tripel von Basisgrößen ist, $e_\alpha\, e_\beta = -e_\beta\, e_\alpha = \pm e_\gamma$ mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen bei positiver bzw. negativer Orientierung des Tripels. — In Analogie zu den Quaternionen könnte man diese Algebra die „CAYLEYschen Oktonionen" nennen[9]).

Als algebraische Modelle der *vierten Stufe* kommen alle diejenigen nichtassoziativen, beiderseits distributiven Divisionsalgebren in Frage, in denen II 5* nicht gilt. Beispiele hierzu gab L. E. DICKSON[10]).

§ 5. Modelle zur fünften Stufe.

Die algebraischen Modelle zur fünften Stufe sind die nur linksseitig distributiven Zahlensysteme mit assoziativer Addition, sofern in ihnen die Gleichung $-a\,x + b\,x = c$ für $a \neq b$ eine eindeutige Lösung besitzt. Zu diesen Modellen gehören alle *endlichen* nur linksseitig distributiven Divisionsalgebren, da im Falle der Endlichkeit das angeführte Auflösbarkeitsaxiom Iα beweisbar ist[11]). Beispiele dieser Art finden sich wieder bei L. E. DICKSON[12]). Insbesondere gehören hierher die endlichen *vollständigen Fastkörper* im Sinne von H. ZASSENHAUS [*30*], das sind im wesentlichen endliche Zahlensysteme der fünften Stufe mit assoziativer Multiplikation[13]).

---

[8]) Wegen des Zusammenhangs von Geometrie und Alternativkörper s. R. MOUFANG [*15*], [*16*], ferner M. HALL [*10*]. Daß jeder Alternativkörper assoziativ oder eine CAYLEY-DICKSON-Algebra (vgl. L. E. DICKSON [*9*], S. 264f.) über seinem Zentrum ist, bewiesen R. H. BRUCK und E. KLEINFELD ([*6*] für Charakteristik $\neq 2$; [*12*] für Charakteristik 2) und, unabhängig davon, L. A. SKORNIAKOW ([*21*] für Charakteristik $\neq 2, 3$).

[9]) (lat.) *quaterni* je vier, *octoni* je acht.

[10]) Siehe z. B. L. E. DICKSON [*8*], S. 69. Als neuere Arbeit zu diesem Gegenstand vgl. A. A. ALBERT [*2*]. — Geometrien über Zahlensystemen der vierten und fünften Stufe wurden zuerst von O. VEBLEN und J. H. M. WEDDERBURN [*27*] konstruiert.

[11]) R. STETTLER [*24*].

[12]) L. E. DICKSON [*8*], S. 71.

[13]) Der Zusammenhang stellt sich genauer folgendermaßen dar: Jedes endliche assoziative Zahlensystem der fünften Stufe ist ein vollständiger Fastkörper; das ZASSEN-

Ein auf L. E. DICKSON zurückgehendes unendliches Modell, in dem die Axiome I 1–3, $\bar{\alpha}$, II 1–3, 5 gelten, findet sich in multiplikativ inversisomorpher Gestalt bei K. REIDEMEISTER [*20*], S. 43; dabei ist I$\bar{\alpha}$ das folgende Axiom:

I$\bar{\alpha}$. $a\,x+b\,x=c$ eindeutig lösbar für $a+b\neq 0$.

Hierzu läßt sich zeigen: Unter Voraussetzung der Axiome I 1–3, II 1, 2 folgt Iα aus I$\bar{\alpha}$; umgekehrt gilt unter Voraussetzung von Iα dann und nur dann I$\bar{\alpha}$, wenn -1 zum assoziativen Zentrum gehört.

Zum Beweise der ersten Behauptung genügt der Nachweis der Formel $(-a)\,b=-a\,b$, wobei man sich auf $b\neq 0$ beschränken kann. Es gibt ein c und wegen $b\neq 0$ weiter ein d, daß $0=(-a)\,b+c=(-a)\,b+d\,b$ ist. Also gestattet die Gleichung $(-a)\,x+d\,x=0$ die beiden Lösungen $x=b$ und $x=0$. Unter der Annahme $-a+d\neq 0$ wäre diese Gleichung eindeutig lösbar, folglich $b=0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $-a+d=0$, $(-a)\,b+a\,b=0$.

Um die zweite Behauptung einzusehen, genügt es nunmehr zu zeigen, daß $(-a)\,b=-a\,b$ dann und nur dann gilt, wenn -1 zum assoziativen Zentrum gehört. Nach B. H. NEUMANN [*18*] folgt aus $(-1)\cdot\big((-1)\cdot a\big)=(-1)^2\cdot a$ die die Kommutativität der Addition nach sich ziehende Formel $(-1)\cdot a=-a$, aus der sich $(-a)\,b=\big((-1)\cdot a\big)\,b=(-1)\cdot a\,b=-a\,b$ folgern läßt. Umgekehrt ergibt sich aus $(-a)\,b=-a\,b$ und der Formel $a(-b)=-a\,b$, die bekanntlich bereits aus der Linksdistributivität folgt, $(-1)\cdot a=-a=a\cdot(-1)$. Dann multipliziert sich aber -1 stets assoziativ.

Die Formel $(-1)\cdot a=-a$ ist bekanntlich aus den Axiomen I 1–3, α, II 1, 2 nicht beweisbar[14]). Gilt diese Formel nicht, so gehört -1 nicht zum assoziativen Zentrum.

Weitere Modelle der fünften Stufe mit nichtassoziativer Multiplikation kann man aus solchen der vierten Stufe herleiten: Mittels eines Zahlensystems der vierten Stufe läßt sich eine affine Geometrie konstruieren, in der die Sätze δ und $\boldsymbol{d}^{\mathfrak{Y}}$ gelten. Im allgemeinen ist $\boldsymbol{d}^{\mathfrak{X}}$ dann nicht erfüllt. Durch Vertauschung der Scharen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gelangt man so zu einer Geometrie der fünften Stufe. Algebraisch stellt sich dieser Übergang folgendermaßen dar:

$$a\oplus b=b+a$$

$$\bar{a}\cdot(a\odot b)=b \quad \text{mit} \quad \bar{a}\cdot a=1 \quad (a\neq 0)$$

$$0\odot a=0.$$

HAUSSche Axiom „aus $\mu\,x=x$ und $x\neq 0$ folgt $\mu=1$" ergibt sich daraus, daß nach Iα aus $\mu\neq 1$ $x=0$ folgt. Umgekehrt genügt jeder endliche vollständige Fastkörper, für den zusätzlich $0\cdot a=0$ festgesetzt wird, den algebraischen Axiomen der fünften Stufe sowie dem assoziativen Gesetz der Multiplikation.

[14]) Gegenbeispiel hierfür bis auf multiplikative inverse Isomorphie im Zahlensystem U von M. HALL ([*10*] Anhang II).

§ 6. Über die Kommutativität der Addition und den affinen kleinen Desarguesschen Satz.

0. Wir beweisen in diesem Paragraphen die Kommutativität der Addition für ein Zahlensystem, das den Axiomen I 1–3, II 1, 2 und der Auflösbarkeitsforderung Iα genügt (§ 6.2). Den Beweis leiten wir aus unserem geometrischen Beweis des Satzes her, daß in der affinen Ebene aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für zwei ausgezeichnete Richtungen dieser Satz für jede Richtung folgt (§ 6.1)[15]).

Sodann konstruieren wir aus beliebigen nicht-Abelschen Gruppen Parallelgewebe mit unendlich vielen Parallelenscharen, in denen der affine kleine Desarguessche Satz ausschließlich für zwei Richtungen gilt (§ 6.3). Die Antwort auf die REIDEMEISTERsche Frage[16]), ob aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für zwei Richtungen dieser allgemein folgt, fällt also verschieden aus, je nachdem man sie für die affine Ebene oder für das Parallelgewebe formuliert.

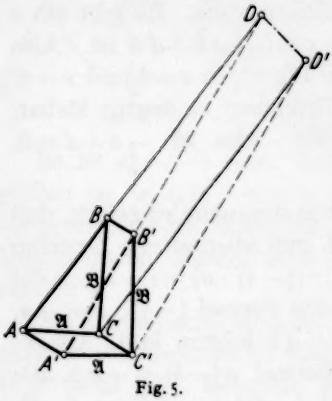

Fig. 5.

Es ist ein offenes Problem geblieben, ob das kommutative Gesetz der Addition aus den Axiomen I 1–3, II 1, 2 auch ohne die Auflösbarkeitsforderung Iα folgt. Unter Voraussetzung der Endlichkeit ist, wie in § 5 bemerkt wurde, das Axiom Iα und somit auch die Kommutativität der Addition beweisbar; wir führen noch einen zweiten, gruppentheoretischen Nachweis dieses Sachverhalts durch den Beweis, daß alle endlichen Gruppen mit transitiver Automorphismengruppe Abelsch sind (§ 6.4)[17]).

1. Satz 3. *Aus* $\delta_{\mathfrak{A}}$ *und* $\delta_{\mathfrak{B}}$ $(\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B})$ *folgt in der affinen Ebene* δ.

Es genügt der Nachweis von δ für den Spezialfall, daß ein Paar entsprechender Dreiecksseiten aus $\mathfrak{A}$-Geraden und ein zweites Paar aus $\mathfrak{B}$-Geraden besteht, da dieser Spezialfall bereits den allgemeinen Satz nach sich zieht[18]).

Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke und hierbei AC und $A'C'$ $\mathfrak{A}$-Geraden, BC und $B'C'$ $\mathfrak{B}$-Geraden und AA', BB' und CC' paarweise parallel (Fig. 5).

Annahme: $A'B'$ sei nicht parallel zu AB.

Dann haben die Geraden AB, $A'B'$ genau einen Schnittpunkt D und entsprechend die Parallele zu AB durch C und die Parallele zu $A'B'$ durch

[15]) Ein Beweis des geometrischen Satzes von § 6.1 findet sich auch bei W. KLINGENBERG [*13*] und ein Beweis des algebraischen Satzes von § 6.2 auch bei G. PICKERT [*19*]. Die hier gegebenen sehr kurzen Beweise sind unabhängig davon erfolgt.

[16]) K. REIDEMEISTER [*20*], S. 145.

[17]) Dieser gruppentheoretische Satz folgt auch unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 der 1951 veröffentlichten Arbeit [*5*] von R. H. BRUCK. Der in § 6.4 dieser Arbeit angegebene Beweis ist im gleichen Jahre vom Verf. unabhängig davon gefunden worden.

[18]) Man kann etwa zunächst durch zweimalige Anwendung des obigen Spezialfalles den etwas allgemeineren Satz herleiten, bei dem ein Paar entsprechender Dreiecksseiten aus $\mathfrak{A}$-Geraden besteht, und erhält hieraus in analoger Weise den Satz δ in voller Allgemeinheit.

C' genau einen Schnittpunkt D', und es ist $D \neq D'$. Nach $\delta_{\mathfrak{A}}$, angewandt auf die Dreiecke $AA'D$, $CC'D'$ ist DD' eine $\mathfrak{A}$-Gerade; andererseits ist $D\nu'$ nach $\delta_{\mathfrak{B}}$, angewandt auf die Dreiecke $BB'D$, $CC'D'$ eine $\mathfrak{B}$-Gerade, was einen Widerspruch enthält.

2. Satz 4. *Aus den algebraischen Axiomen* I 1–3, α, II 1, 2 *folgt die Kommutativität der Addition* II 3.

Annahme. Es gebe zwei additiv nicht vertauschbare Zahlen a und b.

Dann ist die Gleichung

$$-(a+b)\,x+(b+a)\,x=a$$

eindeutig nach x auflösbar. Die Lösung sei γ genannt. Nun ist

$$\begin{aligned}-(a+b)(\gamma+1)+(b+a)(\gamma+1) &= -(a+b)-(a+b)\gamma+(b+a)\gamma+(b+a)\\ &= -b-a+a+b+a\\ &= a,\end{aligned}$$

d.h. $\gamma+1$ ist ebenfalls Lösung der obigen Gleichung, und aus der Eindeutigkeit der Lösung im Falle der Richtigkeit der obigen Annahme folgt $\gamma+1=\gamma$, also $1=0$.

Dieser Beweis läßt sich auch aus dem Beweis des vorstehenden Satzes 3 herleiten:

Man setze in Fig. 5 speziell $C=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,a+b)$ und $B'=(1,a)$. Dann folgt $C'=(1,-b)$ und $A'=(2,-b)$. Es ergibt sich für die Gerade AB die Gleichung

$$y+(a+b)\,x=a+b$$

und für die Gerade $A'B'$

$$y+(b+a)\,x=a+b+a.$$

Somit entspricht der Parallelität von AB und $A'B'$ die Relation $a+b=b+a$. Die gegenteilige Annahme, daß die Geraden einen Schnittpunkt $D=(\gamma,\delta)$ bestimmen, besagt, daß sich das Gleichungssystem der betreffenden Geraden eindeutig nach x und y auflösen läßt, oder, indem man y eliminiert, daß die Gleichung

$$-(a+b)\,x+(b+a)\,x=a$$

eine eindeutige Lösung $x=\gamma$ hat.

Diese Ausführungen genügen, den inneren Zusammenhang beider Beweise deutlich zu machen.

Wir geben noch eine Variante des Beweises zu Satz 4, die an Stelle des distributiven Gesetzes ein Auflösbarkeitsaxiom benutzt, das (wegen $a+1-a\neq 0$) aus dem linksdistributiven Gesetz folgt und in Zahlensystemen mit Abelscher Additionsgruppe von selbst erfüllt ist:

Satz 4a. *Aus den algebraischen Axiomen* I 1–3, II 1 *und der Forderung, daß die Gleichung*

$$-a\,x+b\,x=c$$

für $a \neq b$ mindestens eine Lösung und die Gleichung

$$y\,a + y - y\,a = b$$

höchstens eine Lösung besitzt, folgt die Kommutativität der Addition II 3.

Annahme. Es sei $a+b \neq b+a$. Dann besitzt die Gleichung

$$-(a+b)\,x + (b+a)\,x = a$$

eine Lösung $x=\gamma$. Nun ist

$$\begin{aligned} -(a+b)\,\gamma + (b+a)\,\gamma &= a \\ &= a+b+a-a-b \\ &= (a+b) - (a+b)\,\gamma + (b+a)\,\gamma - (b+a), \end{aligned}$$

also

$$(a+b)\,\gamma + (a+b) - (a+b)\,\gamma = (b+a)\,\gamma + (b+a) - (b+a)\,\gamma,$$

im Widerspruch zur zweiten Auflösbarkeitsforderung.

3. Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe, additiv geschrieben. Wir bilden formale Potenzreihen einer Unbestimmten t

$$A = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i \qquad (n \text{ ganz rational}, \ a_i \in \mathfrak{G}) \tag{1}$$

und definieren

$$t^0 \cdot a = a \quad \text{für alle } a \in \mathfrak{G} \tag{2}$$

$$t^i \cdot 0 = 0 \quad \text{für } i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3}$$

Sei $A = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i$ und $B = \sum_{i=m}^{\infty} t^i b_i$. Durch Vorsetzen von Nullen kann man erreichen, daß $n=m$ wird. Dann definieren wir die Gleichheit zweier Potenzreihen als Koeffizientengleichheit, die Summe

$$A + B = \sum_{i=n}^{\infty} t^i (a_i + b_i) \tag{4}$$

und die Linksmultiplikation mit einer Potenz von t

$$t^k \cdot A = \sum_{i=n}^{\infty} t^{i+k} a_i, \tag{5}$$

$$t^k \cdot t^l = t^{k+l}. \tag{6}$$

Die A's bilden einen *Fastkörper*[19]). Denn die in (4) definierte Addition erfüllt die Gruppenpostulate, und es ist

$$t^l \cdot (t^k \cdot A) = t^l \sum t^{i+k} a_i = \sum t^{i+k+l} a_i = (t^l t^k) \cdot A,$$

aus $t^i A = A$ und $A \neq 0$ folgt $i=0$, und

$$t^k (A+B) = \sum t^{i+k} (a_i + b_i) = \sum t^{i+k} a_i + \sum t^{i+k} b_i = t^k A + t^k B.$$

[19]) Vgl. H. ZASSENHAUS [30].

Satz 5. *In dem durch die Definitionen* (1) *bis* (6) *definierten Fastkörper ist die Gleichung*

$$-t^k \cdot X + t^l \cdot X = A$$

für $k \neq l$ *eindeutig nach* X *lösbar.*

Es genügt wegen der Fastkörpereigenschaften die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung

$$-X + t^k \cdot X = A \quad \text{für} \quad k \neq 0$$

nachzuweisen.

Wir machen den vorläufigen Ansatz $X = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i x_i$ und erhalten

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i(-x_i) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^{i+k} x_i = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i(-x_i + x_{i-k}) = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i, \tag{7}$$

folglich

$$x_i = x_{i-k} \quad \text{für alle} \quad i < n. \tag{8}$$

Falls k positiv ist, so folgt hieraus $x_i = 0$ für alle $i < n$, denn im Falle $x_j = \xi \neq 0$ $(j < n)$ wäre $x_j = x_{j-k} = x_{j-2k} = \cdots$ (ad inf.) $\cdots = \xi$, im Widerspruch zur Definition (1). Sodann folgt aus (7)

$$x_i = x_{i-k} - a_i \quad \text{für} \quad i \geq n,\ k > 0, \tag{9}$$

und die x_i sind sukzessiv in eindeutiger Weise bestimmbar. Falls k negativ ist, so geht mit $k' = -k$ (8) über in

$$x_{i+k'} = x_i \quad \text{für alle} \quad i < n,$$

und es folgt $x_{i+k'} = 0$ für alle $i < n$. Endlich folgt aus (7)

$$x_{i+k'} = x_i + a_i \quad \text{für} \quad i \geq n,\ k' = -k > 0, \tag{10}$$

und auch in diesem Falle bestimmen sich die x_i sukzessiv in eindeutiger Weise.

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ abzählbar ist, kann man einen *abzählbaren* Fastkörper, in dem Satz 5 gilt, erhalten, indem man ihn aus den Gruppenelementen durch fortgesetzte Addition, Linksmultiplikation mit einer Potenz von t und Lösung einer Gleichung $-X + t^k X = A$ *konstruiert.*

Wir definieren nun mit diesem Fastkörper Punkte als geordnete Elementepaare (A, B) und sodann folgende Typen von Geraden:

$\mathfrak{X}$-Gerade: $Y = \text{Const.}$

$\mathfrak{Y}$-Gerade: $X = \text{Const.}$

$\mathfrak{Z}_k$-Gerade: $Y + t^k X = \text{Const.}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Satz 6. *Die vorstehend definierten Punkte und Geraden bilden ein Parallelgewebe, in dem die Sätze* $\delta_{\mathfrak{X}}$ *und* $\delta_{\mathfrak{Y}}$ *gültig sind.*

Zunächst inzidiert jeder Punkt (A, B) mit genau einer $\mathfrak{X}$-, einer $\mathfrak{Y}$- und, bei vorgegebenem ganzen rationalen k, einer $\mathfrak{Z}_k$-Geraden, nämlich mit $Y = B$, $X = A$ und $Y + t^k X = B + t^k A$. Verschiedene $\mathfrak{X}$-Geraden sind ersichtlich parallel, ebenso verschiedene $\mathfrak{Y}$-Geraden und verschiedene $\mathfrak{Z}_k$-Geraden mit gleichem k. Dagegen haben zwei Geraden verschiedener Scharen genau einen Schnittpunkt:

1. $Y = B, \quad X = A: \quad (A, B)$
2. $Y = A, \quad Y + t^k X = B: \quad (t^{-k}(-A + B), A)$
3. $X = A, \quad Y + t^k X = B: \quad (A, B - t^k A)$
4. $Y + t^k X = A, \quad Y + t^l X = B \quad$ mit $\quad k \neq l$:

Durch Elimination von Y ergibt sich für X die Gleichung

$$-t^k X + t^l X = -A + B,$$

die nach Satz 5 eindeutig lösbar ist; folglich ist der Schnittpunkt eindeutig bestimmt.

Aus dem assoziativen Gesetz der Addition und dem linksseitigen Distributivgesetz für die Multiplikation mit einem Richtungsfaktor t^k folgt die Existenz von transitiven Translationen $X' = X$, $Y' = C + Y$ längs $\mathfrak{Y}$-Geraden und von transitiven Translationen $X' = X + C$, $Y' = Y$ längs $\mathfrak{X}$-Geraden; daraus folgt $\delta_{\mathfrak{Y}}$ und $\delta_{\mathfrak{X}}$.

Wenn die zugrunde gelegte Gruppe $\mathfrak{G}$ Abelsch ist, dann läßt sich auf demselben Wege auch der affine kleine Desarguessche Satz δ für alle Richtungen des Gewebes beweisen. Ist sie nicht Abelsch, dann versagt der Beweis, und es kann dann δ auch für keine andere Richtung als $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gelten, da im Parallelgewebe aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für drei verschiedene Richtungen dieser allgemein folgt und sich dann alle THOMSENschen Dreiecke T schließen würden[20]), und $T_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}_0}$ würde nach THOMSEN [26] die Kommutativität von $\mathfrak{G}$ besagen (s. Fig. 6).

Unter Berücksichtigung der Resultate von THOMSEN [26] folgt

Satz 7. *Jedes 3-Gewebe, in dem T (und folglich auch R[21])) gilt, läßt sich zu einem Parallelgewebe erweitern, in dem δ allgemein gilt. Jedes 3-Gewebe, in dem R aber nicht T gilt, läßt sich zu einem Parallelgewebe erweitern, in dem δ für genau zwei verschiedene Translationsrichtungen gilt.*

Es ergibt sich als einfache Folgerung:

Satz 8. *Im Parallelgewebe ist aus $\delta_{\mathfrak{A}}$ und $\delta_{\mathfrak{B}}$ der Satz δ nicht beweisbar.*

4. Wir beweisen nun die Kommutativität der Addition für ein endliches Zahlensystem, das den Axiomen I 1–3, II 1, 2 genügt, auf gruppentheoretischem Wege.

---

[20]) Vgl. K. REIDEMEISTER [20], S. 106.

[21]) Die REIDEMEISTER-Figur R (Fig. 7) besagt für ein 3-Gewebe die Darstellbarkeit durch eine Gruppe; vgl. [20], [26], [4]. Wegen des Beweises von R aus T verweisen wir auf die genannte Literatur.

Die additive Gruppe des Zahlensystems hat die Eigenschaft: Zu zwei vom Einheitselement verschiedenen Elementen a, b gibt es stets einen Automorphismus, der a in b überführt. Das läßt sich auch so formulieren: Die Gruppe besitzt eine transitive Automorphismengruppe.

Beweis. Nach I 3 gibt es zu a, $b \neq 0$ ein von Null verschiedenes c, daß $c\,a = b$ ist. Durch $\mathfrak{A}(x) = c\,x$ ist für das Zahlensystem eine eineindeutige Abbildung definiert, die a in b überführt. $\mathfrak{A}(x)$ ist aber auch ein Automorphismus der additiven Gruppe[22]), denn

$$\mathfrak{A}(x+y) = c\cdot(x+y) = c\,x + c\,y = \mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}(y).$$

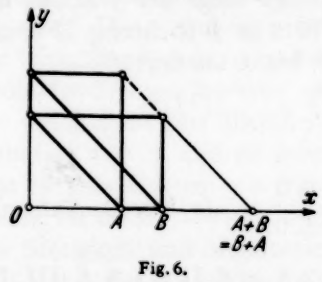

Fig. 6.

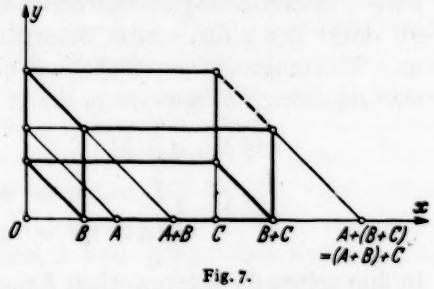

Fig. 7.

Um die Kommutativität der Addition für das gegebene Zahlensystem zu beweisen, genügt der Nachweis, daß alle endlichen Gruppen mit transitiver Automorphismengruppe Abelsch sind.

Satz 9. *Jede endliche Gruppe mit transitiver Automorphismengruppe ist eine Abelsche p-Gruppe vom Typus $(p, p, \ldots, p)$.*

Beweis. Zunächst haben alle vom Einheitselement verschiedenen Elemente gleiche Ordnung. Sodann muß diese Ordnung eine Primzahl p sein, da es sonst in der von einem Element erzeugten zyklischen Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ Elemente kleinerer Ordnung geben würde. Daraus folgt, da es zu jedem Primteiler p' der Gruppenordnung stets in der Gruppe ein Element von der Ordnung p' gibt, daß $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe ist. Nach einem bekannten Satz besitzt jede p-Gruppe ein vom Einheitselement e verschiedenes Zentrum[23]); andererseits ist das Zentrum eine charakteristische Untergruppe[24]) und folglich das Zentrum einer Gruppe mit transitiver Automorphismengruppe entweder das Einheitselement e oder die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{G}$ Abelsch, und da jedes von e verschiedene Element von $\mathfrak{G}$ die Ordnung p hat, so ist Satz 9 bewiesen.

Umgekehrt besitzen die Gruppen vom Typ $(p, p, \ldots, p)$ eine transitive Automorphismengruppe, und sie treten auch alle als additive Gruppe eines Zahlensystems, zumindest eines der ersten Stufe, auf; so ist die Gruppe $(\underbrace{p, p, \ldots, p}_{h\text{-mal}})$ isomorph der additiven Gruppe des Galois-Feldes $\Gamma(p, k)$.

[22]) Anmerkung. Die Menge dieser speziellen Automorphismen $\mathfrak{A}_c(x) = c\,x$ $(c \neq 0)$ besitzt nicht notwendig die Gruppeneigenschaft, da das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht gefordert ist.

[23]) Siehe etwa A. Speiser [23], S. 69.

[24]) Siehe etwa A. Speiser [23], S. 124f.

§ 7. Modelle zur sechsten Stufe.

1. Bisher haben wir die Modelle von der algebraischen Seite her entwickelt. Auf der sechsten Stufe steht uns ein geometrisches Modell unmittelbar zur Verfügung, nämlich das MOULTONsche Modell einer nicht-Desarguesschen Geometrie[25]), das sich anschaulich unter Bezugnahme auf die gewöhnliche kartesische Geometrie etwa folgendermaßen beschreiben läßt:

Die aus der linken Halbebene kommenden, die y-Achse spitz treffenden Geraden werden an der y-Achse im Verhältnis 1:2 zur Achse hin gebrochen; die übrigen Geraden bleiben unverändert.

Dieses Modell gestattet transitive Translationen längs der y-Achse, und es gilt daher der affine kleine Desarguessche Satz in $\mathfrak{y}$-Richtung. Für alle übrigen Richtungen gilt er nicht, wie man sich leicht überlegt.

Das zugehörige Zahlensystem lautet

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } a \text{ oder } b \geq 0 \\ \frac{1}{2} a\, b & \text{für } a \text{ und } b \leq 0. \end{cases} \qquad (a, b \text{ reelle Zahlen})$$

In ihm gelten die algebraischen Axiome I 1, 2, 3, α, β, II 1, 3, 5, 6, III, IV, d.h. alle Axiome der reellen Zahlen[26]) mit Ausnahme der distributiven Gesetze (z.B. ist $(-1)\odot(1-1)=(-1)\odot 0=0$, dagegen $(-1)\odot 1+(-1)\odot(-1)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$).

Das Zahlensystem der MOULTONschen Geometrie ist zugleich ein Beispiel für ein Zahlensystem, in dem kein Körper enthalten ist[27]). Denn jeder *Teilbereich* irgendeines Zahlensystems, der unter Beibehaltung der Verknüpfungen ebenfalls ein Zahlensystem ist, enthält die Null und die Eins und den hieraus durch fortgesetzte Addition, Subtraktion und Multiplikation erzeugten Ring. Dieser Ring ist in unserem Falle bereits nicht distributiv (s. obiges Gegenbeispiel)[28]). Alle im Zahlensystem der MOULTONschen Geometrie enthaltenen Zahlensysteme enthalten also diesen nichtdistributiven Ring, folglich kann sich unter ihnen kein Körper befinden.

2. Das MOULTONsche Modell läßt sich auf verschiedene Weise verallgemeinern. Zunächst nehmen wir eine geometrische Verallgemeinerung vor.

[25]) F. R. MOULTON [17]; D. HILBERT [11], § 23.

[26]) Wegen der Axiome III und IV s. D. HILBERT [11], Anhang VI. Das Vollständigkeitsaxiom IV 2 ist hier sinngemäß so zu verstehen: Die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Beziehungen und der Axiome I, II 1, 3, 5, 6, III, IV 1 keiner Erweiterung mehr fähig ist.

[27]) Dagegen enthält jedes Zahlensystem der ersten bis fünften Stufe einen Primkörper.

[28]) Die Definition eines „Ringes" ist hier natürlich allgemeiner zu fassen als üblich. Der hier speziell betrachtete Ring der „ganzen rationalen" Zahlen des Zahlensystems der MOULTON-Geometrie besteht nicht allein aus den positiven und negativen „ganzen" Zahlen 0, ± 1, ± 2, ...; dieser Bereich ist nur gegenüber der Addition und Subtraktion, nicht aber gegenüber der Multiplikation abgeschlossen. Der betreffende Ring besteht vielmehr aus den Zahlen $\pm \frac{a}{2^k}$, wo a und k natürliche Zahlen oder Null sind.

In einem gewöhnlichen ebenen kartesischen Koordinatensystem sei ein Kurven-3-Gewebe gegeben (d.h. drei Scharen stetiger Kurven mit der Eigenschaft, daß zwei beliebige Kurven von verschiedenen Scharen sich in höchstens einem Punkt treffen)[29]. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß zwei der Scharen die der Achsenparallelen, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, sind. Dann wird also jede Kurve der dritten Schar durch eine stetige, streng monotone Funktion $y=f(x)$ dargestellt.

Einschränkend verlangen wir für die dritte Schar: Die Kurven der dritten Schar überdecken die gesamte (x, y)-Ebene mit Ausnahme des Ursprungs einfach und lückenlos. Alle Kurven der Schar gehen durch den Koordinatenursprung. Die x- und die y-Achse gehören zur dritten Schar. (Für die Punkte der Koordinatenachsen gelten also die Gewebeeigenschaften nicht.) Die Ordinaten*differenz* je zweier verschiedener Kurven der dritten Schar (exklusive der y-Achse) ist eine überall stetige *streng monotone* beiderseits unbeschränkte Funktion von x, und zu jedem Intervall $\langle a, b\rangle$ und jeder positiven Zahl H gibt es stets Kurven $y=f(x)$ der dritten Schar, für die $f(b)-f(a)>H$ und solche, für die $f(b)-f(a)<-H$ ist. (Dann gibt es in dieser Schar aus Gründen der Stetigkeit und Monotonie zu jedem h auch genau eine Kurve $y=f(x)$, daß $f(b)-f(a)=h$ ist.)

Dieses Kurvengewebe läßt sich zu einer zweiparametrigen Kurvenschar erweitern, indem man zu den Kurven des 3-Gewebes die Kurven hinzufügt, die aus der dritten Schar (unter Ausschluß der x- und y-Achse) durch Translation in $\mathfrak{Y}$-Richtung hervorgehen.

In der so erhaltenen zweiparametrigen Kurvenschar gelten die HILBERTschen Axiome I 1—3, IV*, wie wir im folgenden zeigen.

Zu zwei verschiedenen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) der kartesischen Ebene gibt es genau eine Verbindungskurve aus der zweiparametrigen Schar; denn für $x_1=x_2$ ist es eine Gerade $x=c$ und für $y_1=y_2$ eine Gerade $y=c$; für $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$ gibt es auf Grund der Voraussetzungen, wenn man $y_2-y_1=h$ setzt, genau eine Kurve aus der Schar durch O, für die $f(x_2)-f(x_1)=h$ ist, und die Parallelkurve durch (x_1, y_1) geht auch durch (x_2, y_2) und ist die einzige Kurve dieser Art.

Zwei Kurven der zweiparametrigen Schar, die nicht parallel zur y-Achse sind und nicht durch Translation in $\mathfrak{Y}$-Richtung aus derselben Kurve hervorgegangen sind, haben genau einen gemeinsamen Punkt, denn ihre Ordinatendifferenz ist bis auf eine additive Konstante nach Voraussetzung eine überall stetige, streng monotone, beiderseits unbeschränkte Funktion von x; die Ordinatendifferenz ist daher selbst eine Funktion dieser Art und hat folglich genau eine Nullstelle. Da durch Translation in $\mathfrak{Y}$-Richtung auseinander hervorgegangene Parallelkurven konstante Ordinatendifferenz haben und sie durch eine eindeutige Funktion von x dargestellt werden, so sind sie entweder miteinander identisch oder können sich nicht überschneiden, sind punktfremd, d.h. parallel. Da schließlich die Parallelen zu einer festen Kurve

[29] Vgl. W. BLASCHKE u. G. BOL [4], §§ 1—2.

(einschließlich der $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden) die kartesische Ebene lückenlos überdecken, so gilt für die behandelte zweiparametrige Kurvenschar das Parallelenaxiom in seiner verschärften Form. Ersichtlich ist auch das Existenzaxiom I 3 erfüllt.

Da dieses Modell transitive Translationen längs $\mathfrak{Y}$-Geraden gestattet, so ist in ihm der spezielle kleine Desarguessche Satz $\delta_{\mathfrak{Y}}$ gültig.

Gilt in dem Modell dann noch $\delta_{\mathfrak{X}}$, so erweist es sich, da alle die Axiome der fünften Stufe erfüllenden archimedisch anordenbaren Modelle Modelle der ersten Stufe sind ([*20*], S. 108), inzidentiell isomorph der ebenen kartesischen Geometrie und schließlich, wegen der Stetigkeit, als ihr topologisches Abbild.

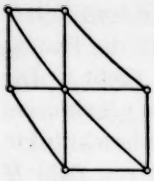

Fig. 8.

Abgesehen von diesem Sonderfall ist jedes Modell der betrachteten Art ein Modell der sechsten Stufe[30]).

Umgekehrt läßt sich übrigens jede stetige affine Ebene, die transitive Translationen längs einer Richtung gestattet, auf ein derartiges Modell zurückführen.

In den Zahlensystemen dieser stetigen Geometrien der sechsten Stufe ist auf Grund des BLASCHKEschen Hauptsatzes über Sechseckgewebe das kommutative Gesetz der Addition II 3 eine Folge der Axiome der sechsten Stufe und der Stetigkeit. In dem Kurven-3-Gewebe, das aus den Punkten der Ebene und den Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$[31]) besteht, schließen sich als Folge des Satzes $\delta_{\mathfrak{Y}}$ alle REIDEMEISTER-Figuren ([*20*], S. 96). Dann schließen sich speziell auch alle „BRIANCHON-Sechsecke"[32]), das sind Sechsecke, deren sämtliche Seiten und Diagonalen (letztere durch einen Punkt gehend) Kurven des 3-Gewebes sind (vgl. Fig. 8). Ein Kurvengewebe, in dem sämtliche BRIANCHON-Sechsecke sich schließen, nennt man ein „Sechseckgewebe". Nach dem Hauptsatz über Sechseckgewebe[33]) lassen sich alle aus stetigen Kurven gebildeten Sechseckgewebe auf drei Scharen paralleler Geraden (der euklidischen Geometrie) topologisch abbilden, etwa auf die Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ der gewöhnlichen ebenen kartesischen Geometrie. Da durch diese drei Scharen die Addition beschrieben wird, so ist damit die Isomorphie der additiven Gruppe des Zahlensystems, das die zweiparametrige Kurvenschar analytisch beschreibt, mit der additiven Gruppe der reellen Zahlen gezeigt. Insbesondere gilt daher in jedem Zahlensystem der betrachteten Art das kommutative Gesetz der Addition[34]).

---

[30]) Die von OSWALD WYLER [*29*] angegebene projektive Modifikation der MOULTONschen Geometrie mit zwei „Achsen" und die von KENNETH LEVENBERG [*14*] untersuchten verallgemeinerten MOULTON-Geometrien sind spezielle Fälle der oben konstruierten Klasse von Geometrien der sechsten Stufe.

[31]) $\mathfrak{E}$ ist nach § 2 unter den von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ verschiedenen Scharen von Parallelkurven beliebig wählbar.

[32]) W. BLASCHKE u. G. BOL [*4*], § 2.

[33]) W. BLASCHKE u. G. BOL [*4*], § 2 (insbesondere S. 10).

[34]) Zahlensysteme der sechsten Stufe, in denen das kommutative Gesetz der Addition nicht gilt, wurden von G. PICKERT [*19*] konstruiert.

Es wäre zu untersuchen, ob auch die Isomorphie der multiplikativen Gruppe des Zahlensystems mit der multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen allein aus dem assoziativen Gesetz der Multiplikation und den Stetigkeitsvoraussetzungen folgt. (Für das Zahlensystem der MOULTONschen Geometrie ist diese multiplikative Isomorphie nach Ausführung der eineindeutigen Abbildung $a \to a$ bei positivem a und $a \to \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ bei negativem a offenbar.)

Als Beispiel für ein Zahlensystem der besprochenen Art, in dem von den Rechengesetzen (Axiome der Gruppe II) nur das assoziative und kommutative Gesetz der Addition erfüllt sind, geben wir ohne Beweis das folgende an:

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } a \geq 0 \\ a \cdot b & \\ a \cdot \frac{b(b+1)}{2} & \text{für } a \leq 0, \\ \frac{1}{2} a\, b & \end{cases} \quad \begin{cases} b \geq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \\ b \leq 0. \end{cases} \qquad (a, b \text{ reelle Zahlen})$$

3. Zu weiteren Modellen der sechsten Stufe gelangt man durch algebraische Verallgemeinerung der MOULTON-Geometrie. In ihrem Zahlensystem läßt sich der zugrunde gelegte Körper der reellen Zahlen ohne weiteres durch einen beliebigen angeordneten Körper oder Schiefkörper ersetzen, sodann auch die Anordnung durch eine beliebige Bewertung:

Gegeben sei ein Zahlensystem $\mathfrak{Z}$, das bei den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ den Axiomen der vierten Stufe genügt. In diesem Zahlensystem existiere eine nichttriviale Bewertung w. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien echte Teilmengen der Menge der durch die Funktion w in $\mathfrak{Z}$ angenommenen (reellen) Funktionswerte; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sollen 0 und ∞ nicht enthalten. Ferner sei φ eine von Null und Eins verschiedene Zahl mit $w(\varphi) = 0$, wobei für alle a, b aus $\mathfrak{Z}$ $(a\,\varphi)\, b = a\,(\varphi\, b) = a\,\varphi\, b$ gelten soll.

Dann läßt sich ein Zahlensystem $\mathfrak{Z}^\circ$ mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ durch folgende Vorschrift erklären:

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } w(a) \notin \mathfrak{A} \text{ oder } w(b) \notin \mathfrak{B} \\ a\,\varphi\, b & \text{für } w(a) \in \mathfrak{A} \text{ und } w(b) \in \mathfrak{B} \end{cases} \qquad (a, b \in \mathfrak{Z}).$$

Für das Zahlensystem $\mathfrak{Z}^\circ$ beweisen wir die Axiome der sechsten Stufe. Die Axiome I 1–3, II 1, 3 gelten offensichtlich. Daß die Gleichung $-(a \odot x) + (b \odot x) = c$ für $a \neq b$ genau eine Lösung hat, erkennt man folgendermaßen:

Zunächst ergibt sich $w(x) = w(c) - w(-a + b)$.

Für $w(a) = w(b)$ folgt dies aus $-(a \odot x) + (b \odot x) = c$, $-a\,\psi\, x + b\,\psi\, x = (-a + b)\,\psi\, x = c$, wo ψ gleich 1 oder φ, also $w(\psi) = 0$ ist.

Für $w(a) \neq w(b)$ ist $-a\,\psi_1\, x + b\,\psi_2\, x = (-a\,\psi_1 + b\,\psi_2)\, x = c$ mit $w(\psi_1) = w(\psi_2) = 0$, folglich $w(a\,\psi_1) \neq w(b\,\psi_2)$ und somit nach der verschärften Summenregel

$$w(-a\,\psi_1 + b\,\psi_2) = \min\big(w(-a\,\psi_1), w(b\,\psi_2)\big) = \min\big(w(-a), w(b)\big) = w(-a + b),$$

also

$$w(-a+b)+w(x)=w(c).$$

Damit ist $w(x)$ festgelegt, und die Faktoren ψ bzw. ψ_1 und ψ_2 lassen sich bestimmen. Sodann ist im ursprünglichen Zahlensystem die Gleichung

$$-(a\psi)\,x+(b\psi)\,x=c \quad \text{für} \quad a\neq b,\ w(a)=w(b)$$

bzw.

$$-(a\psi_1)\,x+(b\psi_2)\,x=c \quad \text{für} \quad w(a)\neq w(b)$$

eindeutig nach x lösbar. Damit ist Iα für das System $\mathfrak{Z}^\circ$ bewiesen. Iβ läßt sich entsprechend beweisen.

$\mathfrak{Z}^\circ$ ist beiderseits nichtdistributiv; so ist bei $w(a)\in\mathfrak{A}$ und $w(b)\in\mathfrak{B}$ stets

$$a\odot b+1\odot b\neq(a+1)\odot b \quad \text{und} \quad a\odot b+a\odot 1\neq a\odot(b+1).$$

Ist speziell $\mathfrak{Z}$ der Körper der rationalen Zahlen, w eine p-adische Bewertung und $\varphi>0$, so gelten in $\mathfrak{Z}^\circ$ außer den obigen Axiomen noch III 1–3, IV 1. Das Anordnungsaxiom III 4 gilt hier nicht: Für $0<\varphi<1$ wähle man ein beliebiges positives c mit $w(c)\in\mathfrak{A}$ und ein beliebiges positives a mit $w(a)\in\mathfrak{B}$; dann gibt es stets ein b mit $\varphi\,a<b<a$ und $w(b)=0$, also

$$a>b,\quad c>0,$$

$$c\odot a=c\varphi\,a<c\,b=c\odot b.$$

Bei $\varphi>1$ hat man ähnliches. Jedoch gilt die Abschwächung

III 4*: Wenn $a\geqslant 0$ und $b>0$ ist, so ist auch stets $a\odot b>0$.

Die zugehörigen Geometrien gestatten eine lineare Anordnung der Punkte ihrer Geraden; denn die Anordnung der Punkte auf der x-Achse und der y-Achse und deren Parallelen kann man in Übereinstimmung mit der Anordnung derjenigen Zahlen wählen, die die Abszissen bzw. Ordinaten repräsentieren, und die Anordnung der Punkte auf den übrigen Geraden läßt sich sodann etwa durch Anordnung der Abszissen definieren. Dann aber ist in der Geometrie das PASCH-Axiom verletzt, wie mit den Zahlen a, b, c des obigen Gegenbeispiels gegen das Axiom III 4 das Beispiel des Dreiecks $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,c\odot a)$ und der Geraden $y=(c\odot a)-(c\odot b)$ zeigt.

§ 8. Modelle zur siebenten Stufe.

Unter Verwendung der in § 7.1 benutzten anschaulichen Ausdrucksweise definieren wir folgende Modifikation der MOULTON-Geometrie:

Gegeben sei eine gewöhnliche ebene kartesische Geometrie. Die vier Koordinatenhalbachsen denke man sich alle von 0 ausgehend orientiert, so daß z. B. die Richtung der negativen x-Halbachse der der positiven x-Halbachse entgegengesetzt ist. Nun werden die aus der unteren Halbebene kommenden Geraden, die die positive oder die negative x-Halbachse *stumpf* treffen, im Verhältnis 1:2 zur Achse hin gebrochen und dann schließlich an ihrem Schnittpunkt mit der *positiven* y-Halbachse ebenfalls im Verhältnis 1:2

zur y-Achse hin gebrochen; die übrigen Geraden bleiben unverändert. In Fig. 9 sind zur Veranschaulichung des Modells einige Geraden der Schar $\mathfrak{E}$ der neuen Geometrie und die dazu an der y-Achse spiegelbildlichen Geraden eingezeichnet.

Man bestätigt für dieses Modell leicht die ebenen affinen Axiome. Der Satz $\delta_y^{\mathfrak{A}}$ ist für Dreiecke, deren auf der y-Achse befindlichen Spitzen unterhalb ihrer Grundseite liegen, evident; um ihn auch für Dreiecke einzusehen, deren Spitzen nach oben weisen, strecke man alle Ordinaten der oberen Halbebene um den Faktor 2, was an den Inzidenzverhältnissen nichts ändert. Der Satz $\delta_{\mathfrak{B}}$ gilt jedoch nicht. Wie bei der MOULTONschen Geometrie lassen sich Anordnung und Kongruenz definieren, so daß die HILBERTschen Axiome I 1—3, II, III 1—4, IV*, V erfüllt sind. Das Modell gestattet keine Translationen.

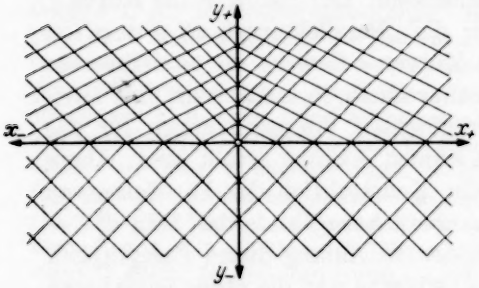

Fig. 9.

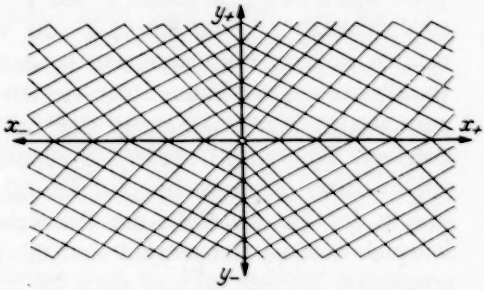

Fig. 10.

In dem entsprechenden Zahlensystem

$$a \oplus b = \begin{cases} a+b \\ a+2b \\ \frac{a}{2}+b \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} a \leq 0 \text{ oder } b \geq 0 \\ a \geq 0,\ b \leq 0,\ \begin{cases} |a| \geq |2b| \\ |a| \leq |2b| \end{cases} \end{cases} \qquad (a, b \text{ reell})$$

$$a \odot b = a \cdot b$$

gelten die algebraischen Axiome I 1—3, α^*, β^*, II 5, 6, III, IV; das assoziative und das kommutative Gesetz der Addition und die beiden distributiven Gesetze gelten nicht.

Ein anderes Modell ergibt sich, wenn man, von der gewöhnlichen Geometrie ausgehend, festsetzt, daß alle die positive oder negative x-Halbachse stumpf treffenden und alle die positive oder negative y-Halbachse spitz treffenden Geraden im Verhältnis 1:2 zur x- bzw. y-Achse hin gebrochen werden; lediglich die Geraden durch O und die achsenparallelen Geraden bleiben unverändert (Fig. 10).

In dieser Geometrie gelten außer den ebenen affinen Axiomen die Sätze $\delta_y^{\mathfrak{A}}$ und $\delta_x^{\mathfrak{B}}$. In dem entsprechenden Zahlensystem, dessen Multiplikation wie bei dem vorigen Modell isomorph der Multiplikation der reellen Zahlen ist, gelten die Axiome I 1—3, α^*, β^*, II 2, 4—6, III, IV, während II 1 und II 3 nicht gelten. Es sind also das assoziative Gesetz und das kommutative Gesetz der Addition von den restlichen Axiomen der reellen Zahlen unabhängig.

Es sei noch kurz auf eine Verallgemeinerung dieser Beispiele hingewiesen. Gegeben sei ein ebenes Kurven-4-Gewebe. Drei der Scharen seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ genannt, und jede von ihnen überdecke die gesamte Ebene einfach und lückenlos. Alle Kurven der vierten Schar mögen durch einen Punkt O gehen und die übrige Ebene einfach und lückenlos überdecken. Die $\mathfrak{X}$-, $\mathfrak{Y}$- und $\mathfrak{E}$-Kurve durch O mögen auch der vierten Schar angehören und seien der Reihe nach x, y und e genannt.

Sei nun g eine von x, y und e verschiedene Kurve der vierten Schar und P ein beliebiger Punkt auf ihr. A sei ein von O verschiedener Punkt von y. Die $\mathfrak{X}$-Gerade durch P habe mit e einen Schnittpunkt, und die durch diesen Punkt gezogene $\mathfrak{Y}$-Gerade treffe die $\mathfrak{E}$-Gerade durch A in einem weiteren Punkt. Sodann mögen sich die $\mathfrak{X}$-Gerade durch den erhaltenen Punkt und die $\mathfrak{Y}$-Gerade durch P in einem Punkt P' schneiden. Durchläuft P die Kurve g, so durchläuft P' eine Kurve g', die wir die „Parallelkurve" zu g durch A nennen wollen. Fügt man nun zu dem Kurven-4-Gewebe die so definierten Parallelkurven der Kurven der vierten Schar hinzu, so erhält man eine zweiparametrige Kurvenschar, in der unter gewissen Voraussetzungen für das gegebene Kurven-4-Gewebe die ebenen affinen Axiome erfüllt sind. Dann gilt in dieser Kurvenschar auf Grund der Konstruktion der Parallelkurven (die in der Tat die Rolle der Parallelen übernehmen) stets der Satz $\delta_y^{\mathfrak{X}}$. — Beispiele solcher Geometrien sind die beiden zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Modelle, sodann auch die MOULTONsche und die ebene euklidische Geometrie.

Eine derartige affine Geometrie ist dann und nur dann ein Modell der siebenten Stufe, wenn die drei Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ *kein Sechseckgewebe* bilden. Denn wenn sich in dem $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{E}$-Gewebe nicht alle Sechsecke schließen, dann können sich erst recht nicht alle REIDEMEISTER-Figuren schließen; folglich genügt dann diese Geometrie nicht den Axiomen der sechsten Stufe, sondern nur denen der siebenten Stufe. Ist andererseits das Gewebe ein Sechseckgewebe, dann läßt sich nach dem Hauptsatz über Sechseckgewebe dieses auf drei Scharen paralleler Geraden topologisch abbilden, es schließen sich also in ihm alle REIDEMEISTER-Figuren und alle THOMSENschen Dreiecke, und es folgt aus $R_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{E}}$ und $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ der Satz $\delta_{\mathfrak{Y}}$; es ergeben sich in diesem Falle im wesentlichen (d.h. bis auf topologische Abbildungen) die Geometrien von § 7.2.

Literatur.

[1] ALBERT, A. A.: On right alternative algebras. Ann. of Math. (2) **50**, 318—328 (1949). — [2] ALBERT, A. A.: On nonassociative division algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 296—309 (1952). — [3] ARTIN, E.: Coordinates in affine geometry. Rep. Math. Colloq., Ser. II **2**, 15—20 (Notre Dame 1940). — [4] BLASCHKE, W., u. G. BOL: Geometrie der Gewebe. Berlin 1938. — [5] BRUCK, R. H.: Loops with transitive automorphism groups. Pacific J. Math. **1**, 481—483 (1951). — [6] BRUCK, R. H., and E. KLEINFELD: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 878—890 (1951). — [7] BRUCK, R. H., and H. J. RYSER: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1**, 88—93 (1949). — [8] DICKSON, L. E.: Linear algebras. Cambridge 1914. — [9] DICKSON, L. E.: Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich 1927. — [10] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — Correction to

„Projective planes". Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 473—474 (1949). — [*11*] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig u. Berlin 1930. — [*12*] KLEINFELD E.: Alternative division rings of characteristic 2. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 818—820 (1951). — [*13*] KLINGENBERG, W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. Abh. Math. Sem. Hbg. **18**, 120—143 (1952). — [*14*] LEVENBERG, K.: A class of non-Desarguesian plane geometries. Amer. Math. Monthly **57**, 381—387 (1950). — [*15*] MOUFANG, R.: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecksnetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander. Math. Ann. **106**, 755—795 (1932). — [*16*] MOUFANG, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit. Abh. Math. Sem. Hbg. **9**, 207—222 (1932). — [*17*] MOULTON, F. R.: A simple non-desarguesian plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192—195 (1902). — [*18*] NEUMANN, B. H.: On the commutativity of addition. J. London Math. Soc. **15**, 203—208 (1940). — [*19*] PICKERT, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. d. Math. **3**, 335—342 (1952). — [*20*] REIDEMEISTER, K.: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. — [*21*] SKORNIAKOW, L. A.: Alternativkörper. Ukrain. Mat. J. **2**, No. 1, 70—85 (1950) (Russisch). — [*22*] SKORNIAKOW, L. A.: Rechtsalternativ-Körper. Iswestija Akad. Nauk SSSR., Ser. Mat. **15**, 177—184 (1951) (Russisch). — [*23*] SPEISER, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937. — [*24*] STETTLER, R.: Über endliche Geometrien. Ann. Acad. Sci. fenn., Ser. A, I. Math.-Phys. **72** (1950). — [*25*] TARRY, G.: Le problème des 36 officiers. C. R. Assoc. franc. Avancement Sci. **1900**, partie 1, 122—123 (1900), partie 2, 170—203 (1901). — [*26*] THOMSEN, G.: Schnittpunktssätze in ebenen Geweben. Abh. Math. Sem. Hbg. **7**, 99—106 (1929). — [*27*] VEBLEN, O., and J. H. M. WEDDERBURN: Non-desarguesian and non-pascalian geometries. Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 379—388 (1907). — [*28*] WITT, E.: Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper. Abh. Math. Sem. Hbg. **8**, 413 (1931). — [*29*] WYLER, O.: Order and topology in projective planes. Amer. J. Math. **74**, 656—666 (1952). — [*30*] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Hbg. **11**, 187—220 (1936).

Marburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 16. Dezember 1953.)

RAJAGOPAL, C. T.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 142—147 (1954)

A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants (II).

By
C. T. RAJAGOPAI.

Notation. In the first part of this paper [5] I obtained from certain general considerations an important special case of a theorem of H. DELANGE, for a series-to-function transform $\Phi_\lambda^*(x)$ in which λ denotes a sequence such that

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \qquad \lim \lambda_n = \infty, \tag{1}$$

and $\lim \lambda_n/\lambda_{n-1} = 1$ additionally. Both the theorem of DELANGE ([2], Théorème 4) and its special case considered by me ([5], Theorem 2b) leave out of consideration the interesting case of "high indices" λ_n which satisfy the condition $\underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} > 1$. The object of this note is to cover the case of high indices by a result (Theorem 2) which is applicable not only to $\Phi_\lambda^*(x)$ but also to DELANGE's more general transform $\Phi_\lambda(x)$ whose kernel $K(u)$ is defined in terms of a function $N(x)$ such that

$$\begin{cases} N(x) \in L(0, \infty), \qquad N(x) \log x \in L(0, \infty), \\ K(u) \equiv \int_u^\infty N(x)\, dx, \qquad K(0) = \int_0^\infty N(x)\, dx = 1. \end{cases} \tag{2}$$

The function transformed is the λ-step function:

$$A(u) = \begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_n & \text{for } \lambda_n \le u < \lambda_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{for } 0 \le u < \lambda_1, \end{cases} \tag{3}$$

its transform being

$$\Phi_\lambda(x) = \sum_1^\infty a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right), \qquad x > 0, \tag{4}$$

a function supposed to represent a convergent series.

A high-indices theorem. Before stating such a theorem another theorem which invites comparison with it may be mentioned. This latter theorem (given below without proof) is, in fact, a version of a recent result of R. P. AGNEW ([1], Theorem 3.1), with the step function $A(u)$ of (3) taking the place of AGNEW's absolutely continuous function.

Theorem 1. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$ *are as in* (1), (3) *respectively, and if also*

$$\lim \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1, \qquad \frac{a_n \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = O(1),$$

as $n \to \infty$, *and* x *is related to* n *so that*

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{x} = \alpha < \infty, \qquad \underline{\lim} \frac{\lambda_n}{x} = \underline{\lim} \frac{\lambda_{n+1}}{x} = \beta > 0,$$

then $\Phi_\lambda(x)$ *in* (4) *satisfies the inequality*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leq \max\{\tau(\alpha), \tau(\beta)\} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n| \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \tag{5}$$

where $\tau(\alpha)$, $\tau(\beta)$ *are values of the function* $\tau(\xi)$, *defined for* $\xi > 0$ *by*

$$\tau(\xi) = \int_0^\xi \frac{|1 - K(u)|}{u}\, du + \int_\xi^\infty \frac{|K(u)|}{u}\, du,$$

and assumed to have a unique turning value (which is of course the least value).

The conclusion (5) *is the best possible in the sense that there is a series* $\sum a_n$ *for which* $0 < \overline{\lim} |a_n| \lambda_n/(\lambda_n - \lambda_{n-1}) < \infty$ *and equality prevails in* (5).

The Tauberian constant in (5) is

$$\left\{ \begin{aligned} \max\{\tau(\alpha), \tau(\beta)\} &\leq \int_0^\alpha \frac{|1 - K(u)|}{u}\, du + \int_\beta^\infty \frac{|K(u)|}{u}\, du \\ &\leq \int_0^\alpha |N(u)| \log \frac{\alpha}{u}\, du + \int_\beta^\infty |N(u)| \log \frac{u}{\beta}\, du \equiv T(\alpha, \beta). \end{aligned} \right. \tag{6}$$

The last-mentioned constant, $T(\alpha, \beta)$, figures also in the following high-indices theorem.

Theorem 2. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$ *are defined by* (1), (3) *respectively, and if*

$$\underline{\lim} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = l > 1, \qquad a_n = O(1),$$

and x *is related to* n *so that, as* $n \to \infty$,

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{x} = \alpha \qquad \underline{\lim} \frac{\lambda_{n+1}}{x} = \beta,$$

where α, β *are finite positive constants such that* $\beta \leq \alpha l$ [1]), *then* $\Phi_\lambda(x)$ *defined by* (4) *satisfies the inequality*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leq \left\{ \int_0^\alpha |N(u)|\, du + \int_\beta^\infty |N(u)|\, du + \frac{T(\alpha, \beta)}{\log l} \right\} \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \tag{7}$$

where $T(\alpha, \beta)$ *is the constant defined in* (6).

[1]) When $\beta > \alpha l$, we cannot find x related to n as stated, for values of n which bring λ_{n+1}/λ_n arbitrarily close to l.

Proof. We may write

$$\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n) = \int_0^\infty \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du - A(\lambda_n)\ ^{2})$$

$$= \int_0^{\lambda_n} \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) \{A(u) - A(\lambda_n)\}\, du + \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \cdots + \int_{\lambda_n+1}^{\infty} \cdots$$

where $A(u) - A(\lambda_n) = 0$ in the second integral on the right. Consequently

$$\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n) = \int_0^{\lambda_n/x} N(u)\, \{A(u\,x) - A(\lambda_n)\}\, du + \int_{\lambda_n+1/x}^{\infty} \cdots,$$

$$|\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leq J_1 + J_2 \tag{8}$$

where

$$J_1 = \int_0^{\lambda_n/x} |N(u)|\, |A(u\,x) - A(\lambda_n)|\, du, \qquad J_2 = \int_{\lambda_n+1/x}^{\infty} |N(u)|\, |A(u\,x) - A(\lambda_n)|\, du.$$

Now, in J_2, $u\,x \geq \lambda_{n+1}$. If $\lambda_m \leq u\,x < \lambda_{m+1}$, $m \geq n+1$, then

$$|A(u\,x) - A(\lambda_n)| \leq |a_{n+1}| + \sum_{n+2 \leq \nu \leq m} |a_\nu| \leq |a_{n+1}| + (m-n-1) \max_{n+2 \leq \nu \leq m} |a_\nu|.$$

Further, if $\min \lambda_\nu/\lambda_{\nu-1} = \mu$ for $n+2 \leq \nu \leq m$, then

$$u\,x \geq \lambda_m \geq \mu^{m-n-1}\, \lambda_{n+1}, \quad \text{or} \quad m - n - 1 \leq \frac{\log (u\,x/\lambda_{n+1})}{\log \mu}.$$

---

[2]) The justification for writing

(i) $$\Phi_\lambda(x) \equiv \sum_1^\infty a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du$$

is as follows. From the definition of $A(u)$ in (3) we obtain

(ii) $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\lambda_r} \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du = \sum_1^{r-1} A(\lambda_n) \left\{K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) - K\left(\frac{\lambda_{n+1}}{x}\right)\right\} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_0^{r-1} a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) - A(\lambda_{r-1})\, K\left(\frac{\lambda_r}{x}\right), \end{cases}$$

while, from the hypotheses $a_n = O(1)$, $\underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} > 1$, we get first $a_n = O\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})/\lambda_n\}$ and thence

(iii) $$A(\lambda_{r-1}) \equiv \sum_1^{r-1} a_n = O(\log \lambda_{r-1}), \quad r \to \infty.$$

Now it is known ([2], Lemme 3) that the assumption $N(u) \log u \in L(0, \infty)$ involves $K(u) \log u = o(1)$ as $u \to \infty$. Consequently (iii) gives

(iv) $$A(\lambda_{r-1})\, K\left(\frac{\lambda_r}{x}\right) = O(\log \lambda_r)\, K\left(\frac{\lambda_r}{x}\right) = o(1), \quad r \to \infty.$$

Letting $r \to \infty$ in (ii) and using (iv), we are led at once to (i).

Hence

$$|A(u\,x) - A(\lambda_n)| \leq |a_{n+1}| + \frac{\log(u\,x/\lambda_{n+1})}{\log \mu} \max_{n+2 \leq \nu \leq m} |a_\nu|$$

$$\leq \left\{1 + \frac{\log(u\,x/\lambda_{n+1})}{\log \mu}\right\} \max_{n+1 \leq \nu \leq m} |a_\nu|.$$

Thus, when u is fixed and n tends to ∞ ensuring $\underline{\lim}\, \lambda_{n+1}/x = \beta$, we get

$$\overline{\lim}\, |A(u\,x) - A(\lambda_n)| \leq \left\{1 + \frac{\log(u/\beta)}{\log l}\right\} \overline{\lim}\, |a_n|.$$

Therefore, by a special form of a theorem of LEBESGUE for taking limits under integral signs (e.g. [2], Lemme 2), we have

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, J_2 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n| \int_\beta^\infty |N(u)| \left\{1 + \frac{\log(u/\beta)}{\log l}\right\} du \quad \left(\beta = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\lambda_{n+1}}{x}\right). \tag{9}$$

Similarly

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, J_1 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n| \int_0^\alpha |N(u)| \left\{1 + \frac{\log(\alpha/u)}{\log l}\right\} du \quad \left(\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\lambda_n}{x}\right). \tag{10}$$

The conclusion of Theorem 2 follows at once when we use (9) and (10) in (8).

Remark. *If* $1 < \underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} = l < \infty$, *then*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, |\Phi_\lambda(x) - \sum_{\lambda_\nu \leq x} a_\nu| \leq \left\{\int_0^\infty |N(u)|\, du + \frac{T(1,1)}{\log l}\right\} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n|. \tag{7'}$$

For, if $\lambda_n \leq x < \lambda_{n+1}$, then $\sum_{\lambda_\nu \leq x} a_\nu = A(\lambda_n)$ and $\overline{\lim}\, \lambda_n/x \leq 1$, $\underline{\lim}\, \lambda_{n+1}/x \geq 1$, as $x \to \infty$, so that (7') follows from arguments exactly similar to those used to prove (7).

Three corollaries of Theorem 2 are stated below. The first corollary in the case $N(u) = e^{-u}$ is the "high-indices" counterpart of a theorem of T. VIJAYARAGHAVAN ([6], Theorem 1), while the second in the same case contains the analogous counterpart of one of TAUBER's original theorems. The last corollary is an alternative statement of a theorem of N. LEVINSON ([4], p. 191, Theorem LIV).

Corollary 2.1. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$, $\Phi_\lambda(x)$ *are defined by* (1), (3), (4) *respectively and if*

$$\underline{\lim}\, \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} > 1, \qquad a_n = O(1),$$

then

$$\Phi_\lambda(x) \to \infty \quad as \quad x \to \infty,$$

implies

$$A(\lambda_n) \to \infty \quad as \quad n \to \infty.$$

Corollary 2.2. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$, $\Phi_\lambda(x)$ *are as in* (1), (3), (4) *respectively and if* $\underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} = l > 1$, *then either the assumption* $\lim a_n = 0$ *and* $l < \infty$ *or the assumption* $0 < \overline{\lim}\, |a_n| < \infty$ *and* $l = \infty$ *implies that every limit point of* $A(\lambda_n)$

as $n \to \infty$ is a limit point of $\Phi_\lambda(x)$ as $x \to \infty$, the first assumption implying more in fact, viz. that every limit point of $\Phi_\lambda(x)$ is a limit point of $A(\lambda_n)$.

In particular, on either assumption, a unique finite limit point of $\Phi_\lambda(x)$, whenever it exists, is also that of $A(\lambda_n)$.

Corollary 2.2 is obvious from (7′) in the case of the first assumption. In the case of the second assumption it is established by observing that, in (7), we can choose x (e.g. $x = \lambda_n^{\vartheta} \lambda_{n+1}^{1-\vartheta}$ where ϑ is a positive proper fraction) so that $\alpha \to 0$, $\beta \to \infty$ as $l \to \infty$ and so $T(\alpha, \beta)/\log l \leq T(1, 1)/\log l = 0$.

LEVINSON ([4], pp. 188—189, Theorem LI) has discussed an interesting sub-class of the class of kernels $N(x)$ satisfying (2), whose Fourier transform

$$k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty N(x)\, x^{-iu}\, dx, \qquad u \text{ real},$$

is subject to certain restrictions involving $c = 2\pi/L$ where we define $L = \min_{n \geq 1} \log(\lambda_{n+1}/\lambda_n)$ on the assumption $\underline{\lim}\, \lambda_{n+1}/\lambda_n > 1$. For this sub-class of $N(x)$, the hypothesis that the series $\Phi_\lambda(x)$ defined by (4) is uniformly convergent for $0 < x \leq X$ implies the conclusion

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n| \leq C_0 \overline{\lim_{x \to \infty}} |\Phi_\lambda(x)| \tag{11}$$

where C_0 is a constant depending only on $N(x)$ and L[3]). Combining (11) with (7) we obtain the next corollary.

Corollary 2.3. *Let $\{\lambda_n\}$ in (1) satisfy the additional condition $\underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} = l > 1$. Let $N(x)$ belong to the* LEVINSON *sub-class of the class of kernels satisfying (2). Let $A(u)$ and $\Phi_\lambda(x)$ be defined as in (3) and (4). Then the hypotheses:*

(i) $\Phi_\lambda(x)$ is uniformly convergent for $0 < x \leq X$ (for every X), (ii) $\Phi_\lambda(x) = O(1)$ as $x \to \infty$, together imply the conclusion:

$$\begin{cases} \overline{\lim_{n \to \infty}} |\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \\ \qquad \leq \left\{ \int_0^\alpha |N(u)|\, du + \int_\beta^\infty |N(u)|\, du + \dfrac{T(\alpha, \beta)}{\log l} \right\} C_0 \overline{\lim_{x \to \infty}} |\Phi_\lambda(x)| \end{cases} \tag{12}$$

where x is related to n as in (7) and C_0 is the constant in (11).

(a) *When the hypothesis* (ii) *assumes the special form*

$$\Phi_\lambda(x) = o(1) \qquad [\text{or, } s + o(1)] \quad \text{as} \quad x \to \infty,$$

(12) *becomes*

$$A(\lambda_n) = o(1) \qquad [\text{or, } s + o(1)] \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

---

[3]) LEVINSON's result is for the interval $(-\infty, \infty)$ which has been converted here into the interval $(0, \infty)$ by changing the variable x. Hence the restrictions on the $k(u)$ defined here are the same as those on LEVINSON's $k(u)$ in [4], p. 189, with the difference that the L defined here is not his L which is given, in terms of his $\{\lambda_n\}$, by $L = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$. In his proof of the result corresponding to (11), LEVINSON actually dispenses with the condition corresponding to $N(x) \log x \in L(0, \infty)$ although he requires this condition for his applications.

(b) *In the special case* $l = \infty$, (12) *shows that all the limit points of* $A(\lambda_n)$ *as* $n \to \infty$ *are limit points of* $\Phi_\lambda(x)$ *as* $x \to \infty$.

The kernels of RIESZ, LAPLACE-ABEL and LAMBERT ([5], p. 413) are familiar examples of $N(u)$ for which all the results of this note, including Corollary 2.3, are valid. The generalized LAMBERT kernel

$$N(u) = -\frac{d}{du}\left(\frac{\alpha u e^{-u}}{1-e^{-\alpha u}}\right), \qquad \alpha > 0,$$

for which Tauberian theorems have been given by IYER [3] is a less familiar example of $N(u)$ to which Theorems 1, 2 and Corollaries 2.1, 2.2 are applicable.

References.

[1] AGNEW, R. P.: Integral transformations and Tauberian constants. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 501—518 (1952). — [2] DELANGE, H.: Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergents (Premier mémoir). Ann. Sci. École. Norm. Sup. (3) **67**, 99—160 (1950). — [3] IYER, V. G.: Tauberian theorems on generalised Lambert's series. J. Indian Math. Soc. (New Series) **1**, 73—87 (1934). — [4] LEVINSON, N.: Gap and density theorems. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **26** (1940). — [5] RAJAGOPAL, C. T.: A generalization of Tauber's theorem and some Tauberian constants. Math. Z. **57**, 405—414 (1953). — [6] VIJAYARAGHAVAN, T.: Converse theorems of summability. J. London Math. Soc. **2**, 215—222 (1927).

Ramanujan Institute of Mathematics, Madras (India).

(Eingegangen am 26. November 1953.)

HERRMANN, O.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 148—155 (1954)

Eine metrische Charakterisierung eines Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppen.

Von
OSKAR HERRMANN.

Für zahlentheoretische Anwendungen ist häufig eine möglichst genaue Kenntnis eines Fundamentalbereichs der HILBERTschen Modulgruppe erforderlich. So wurde z.B. von GÖTZKY [1][1]) der Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe zum quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$ für zahlentheoretische Anwendungen bestimmt. Allgemein hat MAASS [2] einen Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe zu einem beliebigen total-reellen Zahlkörper angegeben[2]). Da die Randhyperflächen des durch MAASS angegebenen Fundamentalbereichs zum Teil durch nur sehr wenig überschaubare transzendente Gleichungen beschrieben werden, dürfte der hier angegebene Fundamentalbereich, der einfachere Randhyperflächen besitzt, Interesse finden. Die Methode, mit welcher hier ein Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe konstruiert wird, läßt sich ohne weiteres auch auf andere Gruppen hyperabelscher Substitutionen übertragen, etwa auf die Gruppen, die vom Verfasser an anderer Stelle [4] als HILBERTsche Modulgruppen zu einer Klasse idealer Zahlen über einem total-reellen algebraischen Zahlkörper bezeichnet wurden.

Die verwendeten Bezeichnungen sind die in der Theorie der HILBERTschen Modulgruppen üblichen: K ist ein fester total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n mit der Idealklassenzahl h. $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ seien seine Konjugierten. Jedem dieser Zahlkörper ist eine komplexe Variable $\tau^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) zugeordnet. Wir treffen die Vereinbarung, daß eine Gleichung oder Ungleichung zwischen Größen, die ihrer Natur nach einen Konjugiertenindex tragen müssen, für alle Konjugierten gilt, wenn dieser Konjugiertenindex fehlt. Unter der Spur S bzw. Norm N eines Ausdrucks versteht man die Summe bzw. das Produkt aller Konjugierten dieses Ausdrucks.

Eine HILBERTsche Modulsubstitution ist eine hyperabelsche Substitution

$$\tau \to \tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen aus K sind, die der Nebenbedingung, $\varepsilon_0 = \alpha\delta - \beta\gamma$ ist eine total-positive Einheit, genügen. Eine

[1]) Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf S. 155.
[2]) Die diesbezüglichen Untersuchungen bei BLUMENTHAL [3] enthalten einen Irrtum, auf den MAASS [2] aufmerksam machte.

HILBERTsche Modulgruppe Γ ist dann die Gruppe aller HILBERTschen Modulsubstitutionen, deren Determinanten ε_0 einer gewissen Einheitengruppe $\mathfrak{G}$ angehören. Wir können offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\mathfrak{G}$ alle Quadrate von Einheiten enthält. Bekanntlich sind die HILBERTschen Modulgruppen in dem Raum $\mathfrak{T}$, dem Produkt der n Halbebenen $\mathfrak{Im}\,\tau^{(\nu)} > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ eigentlich diskontinuierlich.

In dem Spezialfall, daß die Idealklassenzahl h des Körpers K gleich 1 ist, lassen sich die Methoden und die Resultate der vorliegenden Untersuchungen kurz skizzieren: Es sei $N > 1$ eine natürliche Zahl. Zu dem Punkt $\tau_1(N) = iN$ [3]) gibt es ein Normalpolyeder $\mathfrak{P}(N)$ im Sinne von KLEIN und FRICKE [5] bezüglich der von MAASS [2] angegebenen Metrik. Dieses Normalpolyeder ist ein Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe. Bildet man nun die Vereinigungsmengen $\mathfrak{B}_t = \bigcup_{N=t}^{\infty} \mathfrak{P}(N)$, so ist die abgeschlossene Hülle des Durchschnitts aller $\mathfrak{B}_t$:

$$\mathfrak{P} = \overline{\bigcap_{t=2}^{\infty} \bigcup_{N=t}^{\infty} \mathfrak{P}(N)}$$

wieder ein Fundamentalbereich von Γ. Dieser genügt den Ungleichungen

$$\text{(2)} \qquad \mathsf{N}\,|\gamma\tau + \delta|^2 \geq 1 \quad \begin{cases} \text{für alle Paare } \gamma, \delta \text{ von teiler-} \\ \text{fremden ganzen Zahlen aus } K; \end{cases}$$

$$\text{(3)} \qquad \mathsf{S} \log \varepsilon\,(\log \varepsilon + 2 \log \mathfrak{Im}\,\tau) \geq 0 \qquad \text{für alle Einheiten } \varepsilon \in \mathfrak{G};$$

$$\text{(4)} \qquad \mathsf{S}\,\mu\,(\mu + 2\,\mathfrak{Re}\,\tau) \geq 0 \qquad \text{für alle ganzen Zahlen } \mu \in K.$$

Endlich viele dieser Ungleichungen genügen zur Beschreibung von $\mathfrak{P}$ [4]). Für die rationale Modulgruppe sind die Bereiche $\mathfrak{P}(N)$ sämtlich gleich $\mathfrak{P}$. Man könnte also fragen, ob dies auch allgemein der Fall ist. Diese Frage muß aber verneint werden, wie man durch Verschärfung der hier durchgeführten Abschätzungen zeigen kann.

Falls die Klassenzahl $h > 1$ ist erhält man einen Fundamentalbereich, der aus h Teilen besteht, die von dem durch die Ungleichungen (2), (3), (4) beschriebenen Typus sind.

Die hier dargestellte Methode zur Konstruktion eines Fundamentalbereichs läßt sich auch auf die SIEGELsche Modulgruppe übertragen. Hierauf soll in einer späteren Mitteilung eingegangen werden.

Aus jeder der h Idealklassen des Körpers K wähle man ein ganzes Ideal (α_j', γ_j') $(j = 1, 2, \ldots, h)$ mit minimaler Norm als Repräsentanten. Hierzu gibt es zwei Zahlen β_j', δ_j' mit $\alpha_j'\,\delta_j' - \beta_j'\,\gamma_j' = 1$. Nach einem bekannten Satz über die Lösbarkeit von linearen Kongruenzen in einem algebraischen Zahlkörper können die beiden Zahlen β_j', δ_j' so gewählt werden, daß die Idealgleichungen

$$(\alpha_j', \gamma_j')\,(\beta_j', \delta_j') = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, h)$$

[3]) Es sind also alle Konjugierten von $\tau_1(N)$ gleich.

[4]) Hieraus folgt die endliche Erzeugbarkeit von Γ.

gelten. Das Ideal $(\alpha_j'^{2h}, \gamma_j'^{2h})$ ist Quadrat eines Hauptideals; folglich gibt es eine total-positive Zahl $\omega_j \in K$, so daß $\omega_j = (\alpha_j'^{2h}, \gamma_j'^{2h})$ gilt. Dann sei

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\alpha_j' & \sqrt[2h]{\omega_j}\,\beta_j' \\ \frac{1}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\gamma_j' & \sqrt[2h]{\omega_j}\,\delta_j' \end{pmatrix},$$

wobei $\sqrt[2h]{\omega_j}$ reell und positiv gewählt sei. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ annehmen.

N sei eine natürliche Zahl. Auf den Punkt

$$\tau_1 = \tau_1(N) = i\,N$$

übe man die h Substitutionen A_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$ aus. Hierbei erhält man die h Punkte

$$\tau_j = \tau_j(N) = A_j\,\tau_j(N).$$

Übt man auf diese alle Substitutionen $L \in \Gamma$ aus, so erhält man das Punktsystem $\mathfrak{S}(N)$. Die Menge aller der Punkte $\tau \in \mathfrak{T}$, die keinem Punkt des Systems $\mathfrak{S}(N)$ näher liegen als dem Punkt $\tau_j(N)$, werde mit $\mathfrak{P}_j(N)$ bezeichnet. Die Vereinigungsmenge

$$\mathfrak{P}(N) = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{P}_j(N)$$

ist offenbar genau dann ein Fundamentalbereich der Gruppe Γ, wenn aus

$$L\,\tau_j = \tau_k \quad \text{mit} \quad 1 \leq j, k \leq h,\ L \in \Gamma \tag{5}$$

$j = k$ und $L = E$ folgt. Diese Bedingung ist aber sicher dann erfüllt, wenn $N > N_0$ ist, wobei N_0 eine geeignete natürliche Zahl ist. Aus (5) folgt nämlich

$$L_{kj}\,\tau_1 = \tau_1 \quad \text{mit} \quad L_{kj} = A_k^{-1}\,L\,A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{kj} & \beta_{kj} \\ \gamma_{kj} & \delta_{kj} \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\mathsf{N}(\gamma_{kj}\,N) \leq 1$$

und

$$\mathsf{N}\left(\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\gamma_{kj}\right) \leq C_1\,N^{-n},$$

wobei $C_1 = \underset{1 \leq k \leq h}{\mathrm{Max}}\left(\sqrt[2h]{\omega_k}\right)$ eine nur von K abhängige Schranke ist. Aus $N > \sqrt[n]{C_1}$ folgt $\gamma_{kj} = 0$, da $\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\gamma_{kj}$ eine ganze algebraiche Zahl $\in K$ ist. Dann ist aber

$$L\,A_j\,\infty = A_k\,\infty;$$

d.h. $A_k\,\infty$ und $A_j\,\infty$ sind äquivalente parabolische Fixpunkte. Hieraus folgt $k = j$ und es ist ein Leichtes, auch noch $L = E$ zu beweisen. Übrigens ist sofort festzustellen, daß im Falle $h = 1$ die Schranken $N_0 = C_1 = 1$ gewählt werden können.

Um die Bereiche $\mathfrak{P}_j(N)$ für wachsende N untersuchen zu können, gehen wir von der Abstandsformel

$$\mathsf{E}^2(\zeta, iN) = \mathsf{S}\log^2 \frac{\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right| + \left|1-\frac{\zeta}{iN}\right|}{\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right| - \left|1-\frac{\zeta}{iN}\right|}$$

aus. Variiert $\zeta = \xi + i\eta$ in einem kompakten Bereich $\in \mathfrak{T}$, so ist

$$\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right| = \left(1+\frac{\eta}{N}\right)\sqrt{1+\frac{\xi^2}{(N+\eta)^2}} = 1+\frac{\eta}{N}+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}-\frac{1}{2}\frac{\xi^2\eta}{N^3}+O(N^{-4})$$

bzw.

$$\left|1-\frac{\xi}{iN}\right| = 1-\frac{\eta}{N}+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}-\frac{1}{2}\frac{\xi^2\eta}{N^3}+O(N^{-4}).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right| + \left|1-\frac{\zeta}{iN}\right|}{\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right| - \left|1-\frac{\zeta}{iN}\right|} = \frac{N}{\eta}\,\frac{1+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}+O(N^{-4})}{1-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}+O(N^{-3})} = \frac{N}{\eta}\left(1+\frac{\xi^2}{N^2}\right)(1+O(N^{-3}))$$

und man erhält schließlich

$$\mathsf{E}^2(\zeta, iN) = \mathsf{S}\left(\log N - \log \mathfrak{Im}\,\zeta + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{Re}^2\zeta}{N^2} + O(N^{-3})\right)^2. \tag{6}$$

Für einige Anwendungen kann man (6) abschwächen zu

$$\mathsf{E}^2(\zeta, iN) = \mathsf{S}(\log N - \log \mathfrak{Im}\,\zeta + O(N^{-2}))^2. \tag{7}$$

Der Bereich $\mathfrak{P}_j(N)$ ist durch die folgenden Ungleichungen definiert:

$$\mathsf{E}(\tau, L^{-1}A_k\tau_1) \geq \mathsf{E}(\tau, \tau_j) \quad \text{für alle} \quad L \in \Gamma \text{ und } k = 1, 2, \ldots, h.$$

Mit diesen sind — wie eine einfache Rechnung zeigt — die folgenden Ungleichungen gleichwertig:

$$\mathsf{E}^2(L_{kj}\zeta_j, iN) - \mathsf{E}^2(\zeta_j, iN) \geq 0, \tag{8}$$

wobei zur Abkürzung $\zeta_j = \zeta_j(\tau) = A_j^{-1}\tau$ gesetzt wurde. Hier tragen wir (7) ein und erhalten

$$\mathsf{S}\left\{2\log N \log\frac{\mathfrak{Im}\,\zeta_j}{\mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j} + \log^2 \mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j - \log^2 \mathfrak{Im}\,\zeta_j + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right)\right\} \geq 0. \tag{9}$$

Beachtet man $\mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j = \varepsilon\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^{-2}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j$ und $\mathsf{S}\log\varepsilon = 0$, so folgt hieraus bei distributiver Spurbildung

$$2\log N\,\mathsf{S}\log|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}|^2 + \mathsf{S}\{\log^2 \mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j - \log^2 \mathfrak{Im}\,\zeta_j\} + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right) \geq 0. \tag{10}$$

Diese Ungleichung kann man abschwächen zu

$$2\log N\,\mathsf{S}\log|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}|^2 + O(1) \geq 0,$$

wofür man auch

$$N\,|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}|^2 - 1 + O\left(\frac{1}{\log N}\right) \geq 0 \tag{11}$$

schreiben kann. Ist $\gamma_{kj}=0$, so ist — wie bereits früher festgestellt wurde — $k=j$ und man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$L_{jj}=\begin{pmatrix}\varepsilon & \mu_j\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{mit } \mu_j \text{ ganz algebraisch und } \left(\sqrt[2h]{\omega_j}\right)^{-2}\mu_j\in K$$

annehmen. Dann ist aber (11) für die weiteren Untersuchungen zu schwach. In diesem Falle folgt aber direkt aus (10):

$$\mathsf{S}\left\{\log^2\varepsilon\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j-\log^2\mathfrak{Im}\,\zeta_j+O\left(\frac{\log N}{N^2}\right)\right\}\geq 0.$$

Hiermit ist gleichwertig:

$$\mathsf{S}\log\varepsilon(\log\varepsilon+2\log\mathfrak{Im}\,\zeta_j)+O\left(\frac{\log N}{N^2}\right)\geq 0. \tag{12}$$

Im Falle $\varepsilon=1$ ist dieses Resultat wieder zu ungenau. In diesem Fall ist auf die genauere asymptotische Abstandsformel (6) zurückzugreifen. Trägt man diese in (8) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\mathsf{S}\mu(\mu+2\mathfrak{Re}\,\zeta)+O\left(\frac{1}{\log N}\right)\geq 0. \tag{13}$$

Aus den Ungleichungen (11), (12) und (13) erkennt man, daß der Bereich

$$\mathfrak{P}_j=\overline{\bigcap_{t>N_0}\bigcup_{N=t}^{\infty}\mathfrak{P}_j(N)}$$

den folgenden Ungleichungen genügt:

$$\mathsf{N}\left|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}\right|\geq 1, \tag{14}$$

$$\mathsf{S}\log\varepsilon(\log\varepsilon+2\log\mathfrak{Im}\,\zeta_j)\geq 0 \quad \text{mit } \zeta_j=A_j^{-1}\tau, \tag{15}$$

$$\mathsf{S}\mu_j(\mu_j+2\mathfrak{Re}\,\zeta_j)\geq 0. \tag{16}$$

In Ungleichung (14) durchläuft k bei festem j die Zahlen $1, 2, \ldots, h$ und bei festem k durchläuft das Paar γ_{kj}, δ_{kj} alle Paare teilerfremder ganzer algebraischer Zahlen, die den Nebenbedingungen $\sqrt[2h]{\omega_k\omega_j}\,\gamma_{kj}$, $\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\delta_{kj}\in K$ genügen. In Ungleichung (15) durchläuft ε alle total-positiven Einheiten aus $\mathfrak{G}$ und in (16) durchläuft μ_j alle ganzen algebraischen Zahlen, die der Nebenbedingung $\frac{1}{\left(\sqrt[2h]{\omega_j}\right)^2}\mu_j\in K$ genügen.

Es ist nun noch zu zeigen, daß jede der genannten Ungleichungen tatsächlich auf die beschriebene Weise erhalten wird. Sei z.B. γ_{kj}, δ_{kj} ein Paar von algebraischen Zahlen, das den Nebenbedingungen von Ungleichung (14) genügt. Dann setze man $\gamma'_{kj}=\sqrt[2h]{\omega_k}\sqrt[2h]{\omega_j}\,\gamma_{kj}$, $\delta'_{kj}=\frac{\sqrt[2h]{\omega_k}}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\,\delta_{kj}$; hierzu gibt es algebraische Zahlen $\alpha'_{kj}, \beta'_{kj}\in K$, so daß $\alpha'_{kj}\,\delta'_{kj}-\beta'_{kj}\,\gamma'_{kj}=1$ ist und die Idealgleichung $(\alpha'_{kj}, \beta'_{kj})\,(\gamma'_{kj}, \delta'_{kj})=(1)$ gilt. Setzt man nun $\alpha_{kj}=\frac{\sqrt[2h]{\omega_k}}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\,\alpha'_{kj}$, $\beta_{kj}=$

$\sqrt[2h]{\omega_k}\sqrt[2h]{\omega_j}\beta'_{kj}$ und $L_{kj}=\begin{pmatrix}\alpha_{kj} & \beta_{kj}\\ \gamma_{kj} & \delta_{kj}\end{pmatrix}$, so ist $L=A_k L_{kj} A_j^{-1}\in\Gamma$. Damit ist gezeigt, daß der Bereich $\mathfrak{P}_j$ allen Ungleichungen (14) genügt. In den beiden anderen Fällen schließt man entsprechend.

Ehe wir zeigen, daß $\mathfrak{P}=\bigcup_{j=1}^{k}\mathfrak{P}_j$ einen Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe darstellt, untersuchen wir die Bereiche $\mathfrak{P}_j$ näher. Die Ungleichungen (16) beschreiben ein Normalpolyeder der Translationsgruppe

$$\xi_j=\Re\mathfrak{e}\,\zeta_j\to\xi_j+\mu_j$$

im euklidischen $\Re^n$. Ebenso beschreiben die Ungleichungen (15) ein Normalpolyeder der Translationsgruppe

$$l_j=\log\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j\to l_j+\log\varepsilon.$$

Damit ist evident, daß endlich viele der Ungleichungen (15) und (16) zusammen mit den Ungleichungen (14) bereits zur Kennzeichnung von $\mathfrak{P}_j$ ausreichen. Die genaue Anzahl der Ungleichungen (16), die zur Kennzeichnung von $\mathfrak{P}_j$ erforderlich sind, hängt vom Körper K ab und ist mindestens $2n$, aber höchstens $2^{n+1}-2$, wie ohne Beweis angemerkt sei. Die entsprechenden Ungleichungen für die Anzahl der Ungleichungen (15) erhält man hieraus durch Ersetzen von n durch $n-1$.

In $\mathfrak{P}_j$ gilt

(17) $$\mathsf{N}\,\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j\geq C_2$$

mit einer gewissen Zahl C_2, die nur von K abhängt. In der Tat: Die Ungleichungen

$$|\gamma\sqrt[2h]{\omega_j}\,\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j|<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{C_1}}$$

$$\left|\gamma'\sqrt[2h]{\omega_j}\,\Re\mathfrak{e}\,\zeta_j+\frac{1}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\delta'\right|<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{C_1}}$$

sind mit Zahlen $\gamma',\delta'\in K$, die der Nebenbedingung $\frac{1}{\sqrt{\omega_j}}\Big/\gamma,\ \sqrt{\omega_j}/\delta$ genügen, nicht-trivial lösbar[5]), wenn nur $\mathsf{N}\,\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j<C_2$ gilt, wobei C_2 eine gewisse nur von K abhängige Schranke ist. Dann ist

$$\mathsf{N}\left|\gamma'\sqrt[2h]{\omega_j}\,\zeta_j+\frac{1}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\delta'\right|^2<\frac{1}{C_1^2}$$

und für alle k gilt auch

$$\mathsf{N}\left|\sqrt[2h]{\omega_j\omega_k}\,\gamma'\zeta_j+\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\delta'\right|^2<1.$$

[5]) Man stelle γ' und δ' durch Linearkombinationen einer Basis der durch die Nebenbedingungen charakterisierten Ideale mit unbestimmten Koeffizienten dar und wende den bekannten Satz von MINKOWSKI über Systeme linearer Ungleichungen an.

Für genau ein k besitzt das Paar ganzer algebraischer Zahlen $\sqrt[2\lambda]{\omega_j \omega_k}\,\gamma'$, $\sqrt[2\lambda]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\gamma'$ einen größten gemeinsamen Teiler $\vartheta \in K$. Für dieses k setze man $\gamma_{kj} = \sqrt[2\lambda]{\omega_j \omega_k}\,\frac{\gamma'}{\vartheta}$, $\delta_{kj} = \sqrt[2\lambda]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\frac{\delta'}{\vartheta}$ und es gilt

$$\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 < 1$$

d.h. ζ genügt einer der Ungleichungen (14) nicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

Der durch die Ungleichungen (15), (16) und (17) dargestellte Bereich wird nur durch endlich viele der Hyperflächen

$$\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 = 1 \tag{18}$$

geschnitten. Ist nämlich $|\mathsf{N}\,\gamma_{kj}| > C_2^{-1}$, so ist sicher $\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 \geq \mathsf{N}\,(\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j)^2 > 1$. Da man außerdem

$$\mathsf{S}\log|\varepsilon|\log|\varepsilon\,\gamma_{kj}^2| \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad \varepsilon \in K$$

annehmen darf, kommen in (18) nur endlich viele γ_{kj} in Frage. Wegen

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 &= \mathsf{N}\,\{(\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j)^2 + (\gamma_{kj}\,\mathfrak{Re}\,\zeta_j + \delta_j)^2\}\\ &\geq N\,(\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j)^2\,\mathsf{S}\,\frac{|\gamma_{kj}\,\mathfrak{Re}\,\zeta_j + \delta_{kj}|^2}{|\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j|^2}\end{aligned}$$

braucht man bei festem γ_{kj} auch nur endlich viele δ_{kj} zu beachten. Daraus folgt, daß $\mathfrak{P}_j$ durch nur endlich viele der Gln. (14), (15) und (16) beschrieben wird.

Ist $\tau \in \mathfrak{P}_j^*$, $\tau' \in \mathfrak{P}_k^*$ und $\tau' = L\,\tau$ mit $L \in \Gamma$, so folgt im Falle $\gamma_{kj} \neq 0$ $\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 \geq 1$, also $\mathsf{N}\,\eta_j \geq \mathsf{N}\,\eta_k'$. Aus Symmetriegründen ist dann $\mathsf{N}\,\eta_j = \mathsf{N}\,\eta_k'$, also $\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 = 1$. Im Falle $\gamma_{kj} = 0$ schließt man analog und findet, daß innere Punkte von $\mathfrak{P}_j^*$ und $\mathfrak{P}_k^*$ nicht äquivalent sind.

Sei τ vorgegeben, zu jedem $N > N_0$ gibt es dann ein L_N und ein j_N, so daß

$$\tau_N = L_N\,\tau \in \mathfrak{P}_{j_N}$$

ist. Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge kann man j_N als von N unabhängig ansehen. Nun ist

$$\mathsf{N}\,\mathfrak{Im}\,A_j^{-1}\,L\,\tau = \mathsf{N}\,\mathfrak{Im}\,L_{jj}\zeta_j \leq C_3$$

mit einer von τ abhängigen Schranke C_3. Es gibt einen kompakten Bereich $\mathfrak{B}$, der den Durchschnitt von $\mathfrak{P}_j$ mit dem durch $\mathsf{N}\,\mathfrak{Im}\,\tau \leq C_3$ definierten Bereich $\mathfrak{B}_0$ ganz im Innern enthält. Dieser Bereich $\mathfrak{B}$ enthält auch den Durchschnitt von $\mathfrak{P}_j(N)$ mit $\mathfrak{B}_0$ für fast alle N. Beim Beweis ersetze man die Ungleichungen (11), (12), (13) durch ein solches endliches Teilsystem, daß durch den Grenzübergang $N \to \infty$ gerade die endlich vielen Ungleichungen, die zur Kennzeichnung des Bereiches $\mathfrak{P}_j$ ausreichen, erhalten werden. Hierbei wird $\mathfrak{P}_j(N)$ durch einen umfassenderen Bereich ersetzt, für den die Behauptung

noch gilt, und man hat erreicht, daß die Restglieder der Ungleichungen (11), (12) und (13) gleichmäßig abgeschätzt werden können. Die oben bestimmte Teilfolge der τ_N hat dann mindestens einen Häufungspunkt in $\mathfrak{B}$. Wir dürfen annehmen, daß τ_N gegen τ_0 konvergiert. Da die HILBERTsche Modulgruppe in $\mathfrak{T}$ eigentlich diskontinuierlich ist, ist jede konvergente Folge von äquivalenten Punkten von einer gewissen Stelle an konstant. Ferner kann man annehmen, daß auch L_N von einer gewissen Stelle an konstant und gleich L ist — andernfalls gehe man nochmals zu einer Teilfolge über. Der Punkt τ_0 ist dann zu τ äquivalent und offenbar in $\mathfrak{P}_j$ enthalten. Damit ist gezeigt, daß es zu jedem Punkt $\tau \in \mathfrak{T}$ einen äquivalente Punnkt in $L\,\tau \in \mathfrak{P}$ gibt. Hieraus folgt $\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j^*$ und $\mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{P}_j$ ist ein Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe.

Literatur.

[1] GÖTZKY, FR.: Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. **100**, 411—437 (1928). — [2] MAASS, H.: Über Gruppen hyperabelscher Substitutionen. Sitzgsber. Heidelb. Akad. Wiss. **1940**, 2. Abh. (1940). — [3] BLUMENTHAL, O.: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. (Erste Hälfte.) Math. Ann. **56**, 509—548 (1903). — [4] HERRMANN, O.: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954). —, [5] FRICKE, R., u. F. KLEIN: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I: Die Gruppentheoretischen Grundlagen. Leipzig 1897.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 2. Dezember 1953.)

ANDRÉ, J.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 156—186 (1954)

Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe.

Von
JOHANNES ANDRÉ.

Einleitung.

1. Eine abstrakte projektive Ebene wird bekanntlich genau dann zu einem projektiven zweidimensionalen Raum über einem Schiefkörper, wenn in ihr der Schließungssatz von DESARGUES ausnahmslos gültig ist. Über projektive Ebenen, in denen dieser Schließungssatz nicht gefordert wird, ist jedoch nur sehr wenig bekannt. Es gibt keine allgemeine Klassifikation solcher „nicht-DESARGUESscher Ebenen".

Man kann bis jetzt befriedigende Strukturaussagen nur über projektive Ebenen machen, in denen noch zusätzliche Eigenschaften (neben dem Axiomensystem der projektiven Ebene) gefordert werden. Dies kann etwa dadurch geschehen, daß man die Gültigkeit von Schließungssätzen annimmt, die schwächer sind als der des DESARGUES. Den ersten Schritt in dieser Richtung tat R. MOUFANG in [*13*]. Sie forderte den „Satz vom vollständigen Vierseit", der im wesentlichen äquivalent ist mit der Gültigkeit der kleinen DESARGUESschen Konfiguration bezüglich jeder Geraden. Diese besagt: Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte zweier Dreiecke durch einen Punkt — das Zentrum —, und geht die Verbindungsgerade der Schnitte zweier entsprechender Dreiecksseiten — die Achse — durch dieses Zentrum, so liegt der Schnittpunkt des dritten Paares entsprechender Dreiecksseiten auf dieser Achse[1]).

MOUFANG zeigte in [*13*], daß genau die Ebenen über einem *Alternativkörper* diese Eigenschaft haben.

MARSHALL HALL verallgemeinerte in [*8*] die Ergebnisse von MOUFANG. Er setzte den kleinen Schließungssatz von DESARGUES lediglich bezüglich *einer* Geraden voraus (die dann zweckmäßig als *uneigentlich* angenommen wird). HALL kennzeichnete in [*8*], Thm. 6.3 diese Ebenen als solche, zu denen ein Koordinatensystem angegeben werden kann, dessen Koordinaten einem *Quasikörper*[2]) angehören. Ein Quasikörper (Definition 10) ist dabei eine algebraische Struktur, in der alle Schiefkörperaxiome mit Ausnahme des Assoziativgesetzes der Multiplikation und des rechtsseitigen Distributivgesetzes gelten. Die oben erwähnten Alternativkörper sind spezielle Quasikörper.

[1]) Vgl. auch [*8*], S. 264, Thm. L. Diese Bedingung L ist gerade die des kleinen DESARGUESschen Satzes. Dort bedeuten A das Zentrum, die Gerade AB (die beliebig liegen darf) die Achse und die entsprechenden Dreiecke sind die Dreiecke RST und XYZ. Die etwas andere Formulierung des Thm. L. ist mit unserer gleichbedeutend.

[2]) In [*8*] „VEBLEN-WEDDERBURN-System" genannt.

2. Man kann auch andere Annahmen statt solcher über die Gültigkeit gewisser Schließungssätze machen. So führte R. BAER gruppentheoretische Annahmen ein. Er forderte die Transitivität gewisser Untergruppen der Gruppe aller Kollineationen der Ebene. Unter anderem zeigte er in [*3*] (Thm. 6.2), daß der kleine DESARGUESsche Schließungssatz bezüglich der uneigentlichen Geraden genau dann gilt, wenn die Translationsgruppe transitiv in den eigentlichen Punkten der Ebene ist (Satz 4 dieser Arbeit).

3. Die weitere Untersuchung dieser „Ebenen mit transitiver Translationsgruppe" — im folgenden *Translationsebenen* genannt (Definition 6) — ist der Inhalt dieser Abhandlung. Durch die oben genannten Untersuchungen von BAER und HALL ist zwar manches über diese Ebenen bekannt geworden. Es sind aber noch viele Fragen offen. So ist noch keine vollständige Klassifikation durchgeführt, nicht einmal für die Translationsebenen mit nur endlich vielen Punkten und Geraden. Denn zunächst weiß man noch wenig über die Struktur der Quasikörper: Nur die endlichen Quasikörper mit dem Assoziativgesetz für die Multiplikation (in [*19*]) und die Alternativkörper (in [*7*] und [*11*]) sind bis jetzt vollständig klassifiziert.

Außerdem tritt aber hier noch eine Erscheinung auf, die bei Ebenen über Schiefkörpern nicht vorkommt: Es kommt vor, daß zwei nichtisomorphe Quasikörper isomorphe Translationsebenen erzeugen[3]).

In dieser Arbeit wird ein anderer Weg eingeschlagen, die Translationsebenen zu kennzeichnen. Diese Charakterisierung geschieht durch eine spezielle Art der von J. W. YOUNG in [*18*] eingeführten Gruppenpartitionen, den sog. *Kongruenzen*. Diese sind im wesentlichen Überdeckungen eines projektiven Raumes durch eine Menge paarweise fremder linearer Unterräume, von denen je zwei verschiedene den Gesamtraum aufspannen.

4. Der erste Paragraph ist vorbereitender Natur. Er stellt im wesentlichen schon bekannte Dinge über Ebenen und Kollineationen zusammen. In § 2 werden die Begriffe „Partition" und „Kongruenz" einer Gruppe eingeführt (Definitionen 7 und 8). Eine Überdeckung einer Gruppe („Trägergruppe") durch Untergruppen heißt *Partition*, wenn je zwei verschiedene dieser Untergruppen nur das neutrale Element 0 gemeinsam haben (die Verknüpfung dieser Gruppe wird im folgenden stets additiv geschrieben). Eine Partition wird *Kongruenz* genannt, wenn sich außerdem die Gruppe als Summe irgend zweier voneinander verschiedener Untergruppen dieser Überdeckungsmenge darstellen läßt. Das ist eine sehr wesentliche Einschränkung, denn aus ihr folgt unter anderem, daß eine Gruppe mit einer Kongruenz abelsch ist und daß die Untergruppen der Kongruenz (ihre *Komponenten*) alle einander isomorph sind (Sätze 7 und 8). Deutet man die Elemente einer Gruppe mit Kongruenz als Punkte und die Restklassen der Untergruppen dieser Kongruenz als Geraden, so ergibt sich auf diese Weise eine (affine) Translationsebene, deren Translationsgruppe isomorph ist zur Gruppe, von der ausgegangen wurde.

[3]) Vgl. etwa [*8*] Thm. 5.8, insbesondere (5.5).

In § 3 wird gezeigt, daß sich umgekehrt jede Translationsebene auf die eben beschriebene Art darstellen läßt. Die Trägergruppe der zu konstruierenden Kongruenz ist dabei isomorph zur Translationsgruppe der Ebene. Genau jede Untergruppe U (dieser Translationsgruppe) mit der folgenden Beschaffenheit gehört zur Kongruenz: U besteht aus denjenigen Translationen, die eine feste Gerade (und damit alle zu ihr parallelen) in sich überführen. Wir erhalten so eine eineindeutige Abbildung zwischen den Kongruenzen einerseits und den Translationsebenen andererseits (Satz 9).

5. Nachdem nunmehr diese grundlegende Beziehung hergestellt ist, gelingt es leicht, weitere Eigenschaften der Translationsebenen herzuleiten. So wird in § 4 der *Kern* einer Kongruenz oder Translationsebene eingeführt. Man versteht darunter die Menge derjenigen Endomorphismen der zur Kongruenz gehörenden Trägergruppe, welche die Kongruenz *komponentenweise* in sich überführen. Ein solcher Endomorphismus bildet entweder die ganze Gruppe auf 0 ab (ist also der Nullendomorphismus) oder ist ein Automorphismus der Trägergruppe (Satz 10). Da die Trägergruppe abelsch ist, bilden alle diese Endomorphismen einen Ring, also nach dem eben bemerkten sogar einen Schiefkörper. Als solcher läßt sich also der Kern einer Translationsebene ansehen. Die multiplikative Gruppe des Kernes ist isomorph zur Gruppe aller derjenigen Kollineationen der (affinen) Ebene, die den „Nullpunkt" 0 (der zugehörigen Trägergruppe) festlassen und jede Gerade in eine dazu parallele überführen (das sind die *Streckungen* mit dem Fixpunkt 0). Die Trägergruppe läßt sich auffassen als Modul über dem Kern als Operatorenbereich. Die Ebene ist genau dann DESARGUESsch, wenn dieser Modul über dem Kern den Rang 2 hat. In diesem Fall ist der Kern der Koordinatenschiefkörper der Ebene.

6. In § 5 und § 6 werden die Translationsebenen mit den in Ziffer 1 erwähnten Quasikörpern in Zusammenhang gebracht. Der Kern eines Quasikörpers (Definition 11) wird eingeführt als — grob gesagt — die Menge derjenigen Quasikörperelemente, die sich gegenüber allen Elementen wie die Elemente eines Schiefkörpers verhalten. Der Begriff des Kernes ist in Analogie zu dem des Zentrums — etwa einer Gruppe — gebildet worden. Der Kern eines Quasikörpers Q ist isomorph zu dem (im vorigen Absatz erläuterten) Kern der zu Q gehörenden Translationsebene (Zusatz zu Satz 16). Jeder Quasikörper läßt sich auffassen als ein Modul mit seinem Kern als Operatorenbereich. Es wird gezeigt (Zusatz zu Satz 17), daß dieser Modul nur von der zu diesem Quasikörper gehörenden Ebene abhängt.

7. Der § 7 bringt Untersuchungen über die Kollineationsgruppe einer Translationsebene. Zunächst wird gezeigt, daß bei den „meisten" Translationsebenen die uneigentliche Gerade bei *jeder* Kollineation festbleibt, daß also jede Kollineation affin ist. Bei von 2 verschiedener Charakteristik erfüllen nur die von MOUFANG in [*13*] untersuchten Ebenen diese Bedingung *nicht*[4]).

[4]) Natürlich gilt diese Bedingung auch nicht bei DESARGUESschen Ebenen, die ja spezielle MOUFANG-Ebenen sind.

Es genügt also in den „meisten" Fällen, sich auf die affinen Kollineationen zu beschränken. Jede affine Kollineation ist eindeutig darstellbar durch ein Produkt aus einer affinen Kollineation, die den Nullpunkt festläßt (eine sog. *homogene* Kollineation), und einer Translation. Eine homogene (affine) Kollineation wird induziert durch eine (bezüglich des Kernes) semilineare nichtsinguläre Transformation, welche die zur Ebene gehörende Kongruenz (als Ganzes) in sich überführt, und umgekehrt (Satz 19). Eine *projektive* Kollineation — das ist eine solche, die sich als Produkt von affinen Perspektivitäten darstellen läßt — wird sogar durch eine *lineare* Transformation induziert, wenn der Kern kommutativ ist. Während aber bei DESARGUESschen Ebenen auch die Umkehrung hiervon gilt, braucht dies bei nicht-DESARGUESschen Translationsebenen nicht mehr der Fall zu sein.

8. Eine Kongruenz, deren Trägergruppe über ihrem Kern *endlichen* Rang hat, läßt sich — wie im letzten Paragraphen ausgeführt wird — *geometrisch* deuten. Im einfachsten nichttrivialen Fall ist eine Kongruenz in einem projektiven dreidimensionalen Raum darstellbar als Menge paarweise windschiefer Geraden, die diesen Raum überdeckt. Ein Beispiel einer solchen Kongruenz ist die *elliptische Geradenkongruenz* des reellen dreidimensionalen projektiven Raumes, die aus allen reellen Treffgeraden zweier konjugiert-komplexer windschiefer Geraden besteht. Zu dieser Kongruenz gehört allerdings eine DESARGUESsche Ebene, nämlich die Ebene über dem komplexen Zahlkörper[5]). Man kann aber hieraus leicht weitere Kongruenzen gewinnen. Die elliptische Geradenkongruenz läßt sich nämlich auch als eine Menge von Regelscharen einer Menge paarweise fremder einschaliger Hyperboloide — zusammen mit zwei weiteren Geraden — auffassen. Geht man in einigen dieser Hyperboloide zu den konjugierten Regelscharen über, läßt aber die übrigen Geraden der Kongruenz ungeändert, so erhält man neue Kongruenzen, die zu nicht-DESARGUESschen Ebenen gehören.

Den Herren R. BAER und G. PICKERT bin ich für wertvolle Anregungen zu großem Dank verpflichtet.

§ 1. Kollineationsgruppen.

1. Definition 1. Unter einer *projektiven Ebene* Π verstehen wir eine Menge (deren Elemente „Punkte" genannt werden), in der gewisse Teilmengen, genannt „Geraden", ausgezeichnet sind. Bezüglich dieser Geraden sollen die folgenden Axiome gelten:

P1. *Zu zwei verschiedenen Punkten p und q gibt es genau eine Gerade, die beide Punkte enthält* (genannt die *Verbindungsgerade* $\langle p\,q\rangle$ von p mit q).

P2. *Zu zwei verschiedenen Geraden G und H gibt es genau einen Punkt, der in beiden Geraden enthalten ist* (genannt der *Schnittpunkt* $G \cap H$ von G mit H).

P3. *Es gibt vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen* (d.h. es gibt ein „nichtausgeartetes Viereck").

[5]) Dieser Fall ist schon von S. LIE für seine Begründung der Kugelgeometrie untersucht worden. Vgl. dazu etwa [17].

2. Läßt man in einer projektiven Ebene eine Gerade U (die man uneigentlich nennen kann) und die auf ihr liegenden Punkte fort, so kommt man zwangsläufig zu dem Begriff der „affinen Ebene":

Definition 1a. Eine *affine Ebene* ist eine Menge von „Punkten", in denen Untermengen, genannt „Geraden", ausgezeichnet sind. Zwei Geraden G und H sollen „parallel" heißen (G parallel zu H, in Zeichen $G \| H$), wenn $G = H$ oder $G \cap H = \varnothing$ [6]. Ferner sollen die folgenden Axiome gelten:

A1. *Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Verbindungsgerade.*

A2. *Zu einem Punkt p und einer Geraden G gibt es genau eine Gerade H durch p, die zu G parallel ist.*

A3. *Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Aus diesen Axiomen folgt leicht, daß „parallel" eine Äquivalenzrelation ist, ferner, daß zwei nichtparallele Geraden genau einen Schnittpunkt haben und daß jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält.

Die Axiome P3 und A3 sind „Reichhaltigkeitsaxiome", die Entartungsfälle ausschließen, wie etwa den, daß die Geometrie nur aus einer Geraden besteht. HALL hat in [8] alle diese „ausgearteten Ebenen" angegeben.

Durch Entfernen einer Geraden und der auf ihr liegenden Punkte erhält man aus einer projektiven Ebene eine affine Ebene. Umgekehrt erhält man so alle affinen Ebenen. In einer gegebenen affinen Ebene kann man nämlich in bekannter Weise jeder Schar paralleler Geraden einen „uneigentlichen Punkt" als gemeinsamen Schnittpunkt dieser Geraden zuordnen. Die Menge dieser uneigentlichen Punkte wird dann zur uneigentlichen Geraden [7].

3. Definition 2. Eine *Kollineation* einer projektiven Ebene Π ist eine eineindeutige Abbildung der Punkte von Π auf sich, die auch die Menge der Geraden von Π eineindeutig auf sich abbildet. Die Kollineationen bilden (mit der üblichen Hintereinanderausführung von Abbildungen als Multiplikation) eine Gruppe $\mathfrak{C}$.

Definition 3. Eine Kollineation, die mindestens eine Gerade U (die wir später im allgemeinen als uneigentlich annehmen werden) *punktweise* festläßt, heißt eine *Perspektivität*. Eine nichtidentische Perspektivität π hat offenbar nur eine Gerade U mit der eben beschriebenen Eigenschaft; U heißt die *Achse* von π (vgl. auch [3]). Die Untergruppe aller Perspektivitäten mit fester Achse U (zusammen mit der Identität) werde mit $\mathfrak{P}_U$ oder auch kurz mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

BAER zeigte in [3] (Corollary 2.3), daß es zu jeder nichtidentischen Perspektivität π genau einen Punkt p gibt, derart, daß π jede Gerade durch p in sich überführt: $p \in H \rightarrow \pi H = H$. p heißt das *Zentrum* der Perspektivität π.

Alle Perspektivitäten mit fester Achse U und festem Zentrum p bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_U$. Ebenso bilden nach [3] Corollary 2.4 alle diejenigen

[6] Mit $\varnothing$ wird die leere Menge bezeichnet.

[7] Zum Beweis dieses und des weiter oben angegebenen Sachverhaltes s. etwa [6], S. 110. Die projektive (affine) Ebene nennt BIRKHOFF dort plane projective (affine) geometry.

Perspektivitäten mit fester Achse U, deren Zentren alle auf einer festen Geraden (die mit U zusammenfallen kann oder nicht) liegen, eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_U$.

Definition 4. Eine Perspektivität, deren Zentrum auf ihrer Achse U liegt, heißt eine *Translation* (bezüglich U). Nach dem eben Bemerkten bilden die Translationen eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_U$, die mit $\mathfrak{T}_U$ oder, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, einfach mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird.

Eine nichtidentische Translation hat außerhalb U keinen Fixpunkt.

Wäre nämlich $p \notin U$ ein Fixpunkt der nichtidentischen Translation τ, so würden auch alle Geraden durch p ungeändert bleiben, weil τ alle Punkte von U festläßt. p wäre also Zentrum von τ. τ hat aber als Translation auch ein Zentrum auf U, hätte also dann zwei verschiedene Zentren, was nach dem oben zitierten Satz von BAER nicht geht. Hieraus und aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{T}$ folgt, daß es zu je zwei Punkten p und q höchstens *eine* Translation gibt, die p in q überführt.

$\mathfrak{T}$ *ist Normalteiler in* $\mathfrak{P}$, denn hätte $\pi\,\tau\,\pi^{-1}\,(\underline{1} \neq \tau \in \mathfrak{T};\ \pi \in \mathfrak{P}_U)$ ein Zentrum $p \notin U$, so hätte τ das Zentrum $\pi^{-1}\,p \notin U$ [8]).

Definition 4a. Eine Perspektivität, deren Zentrum p *nicht* auf ihrer Achse U liegt, heißt eine *Streckung* (bezüglich U) mit dem Fixpunkt p oder kurz eine *p-Streckung*.

Alle p-Streckungen bilden eine Untergruppe $\mathfrak{S}_p$ von $\mathfrak{P}$. Nach den Sätzen von BAER folgt nun sofort, daß zwei verschiedene Streckungsgruppen $\mathfrak{S}_p$ und $\mathfrak{S}_q$ $(p \neq q)$ nur die Identität gemeinsam haben, ebenso jedes $\mathfrak{S}_p$ mit $\mathfrak{T}$. Ferner folgt, daß jede Perspektivität eine Streckung oder eine Translation ist.

Später benötigen wir den folgenden wichtigen Satz, dessen Beweis etwa in [*12*] zu finden ist [9]).

Satz 1. *Existieren in der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ zwei (nichtidentische) Translationen mit verschiedenen Zentren (d.h. verschiedenen „Richtungen"), so ist $\mathfrak{T}$ abelsch.*

4. Definition 5. Eine Kollineation, die eine feste Gerade U *als Ganzes* in sich überführt, heißt eine *affine Kollineation* oder *Affinität* (bezüglich U).

Die Affinitäten bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{C}$, die mit $\mathfrak{A}_U$ oder kurz $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird. Jede Affinität α der projektiven Ebene Π induziert in der affinen Ebene $\Pi - U = \mathsf{A}$ eine eineindeutige Abbildung $\bar{\alpha}$ ihrer Punkte auf sich, die Geraden von A wieder in solche überführt. Umgekehrt läßt sich eine Abbildung mit diesen Eigenschaften stets zu einer Affinität von Π erweitern. Durch $\bar{\alpha}$ werden nämlich parallele Geraden und nur solche wieder in parallele übergeführt; dadurch wird offenbar eine eineindeutige Abbildung der Punkte von U auf sich gegeben. Die so erhaltene Abbildung aller Punkte von Π auf sich ist gerade die Kollineation α, von der ausgegangen wurde. Wir können und wollen also im folgenden $\bar{\alpha}$ mit α identifizieren [10]).

[8]) $\underline{1}$ bedeutet, wie üblich, die identische Abbildung.

[9]) Vgl. auch [*1*] Thm. 5 und 6 und [*14*].

[10]) Häufig wird deshalb später eine affine Kollineation auch kurz als „Kollineation" (der betrachteten affinen Ebene) bezeichnet, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ sind Untergruppen von $\mathfrak{A}$. Sie sind aber sogar Normalteiler in $\mathfrak{A}$. Aus $\pi \in \mathfrak{P}$ und $\alpha \in \mathfrak{A}$ folgt nämlich für jedes $u \in U$, daß $\alpha \pi \alpha^{-1} u = u$, d.h. $\alpha \pi \alpha^{-1} \in \mathfrak{P}$. Ist π sogar in $\mathfrak{T}$, so hat $\alpha \pi \alpha^{-1}$ außerhalb U keinen Fixpunkt, was entsprechend wie in Ziffer 3 bewiesen wird. Also ist dann auch $\alpha \pi \alpha^{-1} \in \mathfrak{T}$.

5. Definition 6. Eine projektive Ebene Π heißt *Translationsebene*, wenn es in ihr eine Gerade U gibt, derart, daß die zu U gehörende Translationsgruppe $\mathfrak{T}_U$ transitiv in den Punkten von Π außerhalb U ist.

Eine affine Ebene heißt Translationsebene, wenn die Translationsgruppe bezüglich ihrer uneigentlichen Geraden transitiv in den eigentlichen Punkten ist.

Satz 2. *In einer Translationsebene ist jeder Punkt der ausgezeichneten (uneigentlichen) Geraden U Zentrum einer Translation.*

Sei nämlich $u \in U$ und p und q verschiedene Punkte außerhalb U, derart, daß ihre Verbindungsgerade $\langle p\, q\rangle$ die Gerade U in u trifft. Wegen der Transitivität gibt es ein $\tau \in \mathfrak{T}$, so daß $q = \tau p$. Ein von u verschiedener Punkt $v \in U$ ist nicht Zentrum von τ wegen $\langle p\, v\rangle \neq \langle q\, v\rangle = \langle \tau p, v\rangle = \tau \langle p\, v\rangle$. Also bleibt nur u als Zentrum von τ übrig.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt sofort der

Satz 3. *Die Translationsgruppe einer Translationsebene ist abelsch.*

Wegen $\mathfrak{S}_{\tau p} = \tau \mathfrak{S}_p \tau^{-1} \cong \mathfrak{S}_p$ ($\tau \in \mathfrak{T}$) ist bei Translationsebenen die Streckungsgruppe $\mathfrak{S}_p$ (bis auf Isomorphie) unabhängig von der speziellen Wahl des Fixpunktes p, so daß man in diesem Falle von *der* Streckungsgruppe $\mathfrak{S}$ der Ebene reden kann. *Für die Gruppe $\mathfrak{P}$ aller Perspektivitäten gilt nun die Produktdarstellung $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}_p \mathfrak{T} \cong \mathfrak{S}\, \mathfrak{T}$ für jeden eigentlichen Punkt p.* Für jedes $\pi \in \mathfrak{P}$ gibt es nämlich ein $\tau \in \mathfrak{T}$, derart, daß $\pi^{-1} p = \tau^{-1} p$. $\sigma = \pi \tau^{-1}$ hat mithin den Fixpunkt p, also gilt die Darstellung $\pi = \sigma \tau$ mit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ und $\tau \in \mathfrak{T}$. Aus $\mathfrak{S}_p \cap \mathfrak{T} = \{1\}$ folgt ferner die *Eindeutigkeit* dieser Produktdarstellung: Aus $\sigma \tau = \sigma' \tau'$; $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_p$ und $\tau, \tau' \in \mathfrak{T}$ folgt $\sigma = \sigma'$ und $\tau = \tau'$.

BAER gab in [3] (Thm. 6.2) die folgende einfache Kennzeichnung der Translationsebenen durch den kleinen DESARGUESschen Schließungssatz[11]).

Satz 4. *Genau dann ist eine affine Ebene eine Translationsebene, wenn in ihr der kleine* DESARGUES*sche Schließungssatz gilt.*

Zusatz. *Jede* DESARGUES*sche Ebene ist eine Translationsebene.*

§ 2. Translationsebenen und Gruppenpartitionen.

1. In diesem und den folgenden Paragraphen wird stets vorausgesetzt, daß die zu untersuchende Ebene eine transitive Translationsgruppe bezüglich einer Geraden U hat, also eine Translationsebene ist. Die Gerade U, bezüglich der die Translationsgruppe transitiv ist, wird im folgenden immer als uneigentlich angenommen. In diesem Paragraphen werden Translationsebenen mit gruppentheoretischen Methoden konstruiert, im nächsten wird gezeigt, daß man mit Hilfe dieser Konstruktion alle Translationsebenen erhält.

[11]) Zur kleinen DESARGUESschen Konfiguration vgl. etwa [8] Thm. L, S. 264 oder auch [15], S. 94.

G sei im folgenden eine Gruppe, deren Verknüpfung *additiv* geschrieben sei; 0 sei das neutrale Element von G. Mit $-a$ wird — wie üblich — die Lösung x von $a+x=0$ bezeichnet.

Definition 7. Eine *Partition* einer Gruppe G ist eine Menge $\mathfrak{P}$ *eigentlicher* Untergruppen von G mit der Eigenschaft: Jedes von 0 verschiedene Element von G liegt in *genau einer* Untergruppe von $\mathfrak{P}$.

Eine Partition ist also eine Überdeckung von G durch eine Menge eigentlicher Untergruppen, von denen je zwei nur die 0 gemeinsam haben. Die Gruppe G heißt auch die *Trägergruppe* oder kurz der *Träger* der Partition $\mathfrak{P}$. Die Untergruppen einer Partition heißen ihre *Komponenten*.

Nach § 1, Ziffer 3 gestattet z.B. die Gruppe aller Perspektivitäten mit fester Achse eine Partition, bestehend aus den Untergruppen aller Perspektivitäten mit festem Zentrum (vorausgesetzt, daß mindestens zwei verschiedene Zentren von Perspektivitäten existieren).

Definition 8. Eine *Kongruenz* $\mathfrak{K}$ einer Gruppe G ist eine Partition von G mit folgender zusätzlicher Eigenschaft: G ist Summe irgend zweier voneinander verschiedener Komponenten von $\mathfrak{K}$, d.h. aus $U, V \in \mathfrak{K}$ und $U \neq V$ folgt $G = U + V$.

Zum Beispiel lassen sich leicht Kongruenzen in der linearen Vektorgruppe vom Rang $2n$ über einem Schiefkörper finden, deren Komponenten Unterräume vom Rang n sind[12]). Deutet man diese *projektiv*, so erhält man eine Menge paarweise fremder $(n-1)$-dimensionaler linearer Unterräume, die den gesamten projektiven Raum (der die Dimension $2n-1$ hat) überdecken[13]).

2. Aus einer Kongruenz $\mathfrak{K}$ mit der dazugehörigen Trägergruppe G kann man nun auf folgende Weise eine (affine) Translationsebene $\alpha(\mathfrak{K})$ konstruieren:

(a) Die *Punkte* von $\alpha(\mathfrak{K})$ sind die Elemente von G.

(b) Die *Geraden* von $\alpha(\mathfrak{K})$ sind die *Rechtsrestklassen* $U+a$ $(a \in G)$ der zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Untergruppen U.

Zunächst zeigen wir, daß $\alpha(\mathfrak{K})$ eine affine Ebene ist, d.h. die Gültigkeit der Axiome A 1–3 des § 1.

a und b seien voneinander verschiedene Elemente aus G. U_{b-a} sei die (wegen $b-a \neq 0$ eindeutig bestimmte) Komponente von $\mathfrak{K}$, die $b-a$ enthält. Die Gerade $U_{b-a}+a$ enthält offenbar a und b. Jede Gerade durch a hat die Form $V+a$ mit $V \in \mathfrak{K}$. Geht $V+a$ außerdem durch b, so liegt $b-a$ in $U_{b-a} \cap V$, also ist $U_{b-a}=V$. A 1 ist also erfüllt.

---

[12]) Der triviale Fall ist $n=1$. Genau alle Untermoduln vom Rang 1 sind dann Komponenten der Kongruenz. Es gibt aber auch (nichttriviale) Kongruenzen mit $n>1$. Vgl. die §§ 4 und 9.

[13]) Dies war meine ursprüngliche Definition der Kongruenz; die gruppentheoretische Deutung verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn R. BAER.

Im Falle $n=2$ kann man die Kongruenz deuten als zweiparametrige Geradenmannigfaltigkeit im dreidimensionalen Raum. Der Name „Kongruenz" rührt daher, daß man solche Geradenmannigfaltigkeiten in der Liniengeometrie häufig so bezeichnet.

Zum Beweis von A2 sind zunächst alle zu einer Geraden $U+a$ parallelen Geraden zu kennzeichnen. Wir beweisen den

Satz 5. *Zwei Geraden $U+a$ und $V+b$ $(U, V \in \mathfrak{R})$ sind genau dann parallel, wenn $U=V$.*

Die Rechtsrestklassen zu einer festen Untergruppe U sind paarweise fremd; zwei Geraden $U+a$ und $U+b$ sind also stets einander parallel. Die Umkehrung dieses Sachverhaltes folgt sofort aus dem folgenden gruppentheoretischen

Hilfssatz. *U und V seien zwei Untergruppen einer Gruppe G. $G=U+V$ gilt genau dann, wenn je zwei Rechtsrestklassen $U+a$ und $V+b$ stets ein Element gemeinsam haben.*

Beweis. Ist $c \in (U+a) \cap (V+b)$, d.h. $c=u+a=v+b$ für ein $u \in U$ bzw. $v \in V$, so $a-b=-u+v \in U+V$. Jedes Element aus G ist aber in der Form $a-b\,(a, b \in G)$ darstellbar, also ist $G=U+V$. Alle angegebenen Schlüsse sind umkehrbar, also gilt auch das „genau dann" des Hilfssatzes.

Ist nun $U \neq V$ $(U, V \in \mathfrak{R})$, so sind wegen $G=U+V$ und wegen des eben bewiesenen Hilfssatzes die Geraden $U+a$ und $V+b$ nicht parallel. Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Sei nun $U+a$ eine Gerade und b ein Punkt von $\alpha(\mathfrak{R})$. Jede Gerade durch b hat die Form $V+b$ für ein $V \in \mathfrak{R}$. Nach Satz 5 ist sie nur dann parallel zu $U+a$, wenn $U=V$. Es gibt mithin genau eine Parallele zu $U+a$ durch b, also gilt A2.

Mindestens zwei Untergruppen U und V aus $\mathfrak{R}$ enthalten mehr als ein Element. Bestünden nämlich alle von U verschiedenen Komponenten von $\mathfrak{R}$ nur aus dem Nullelement, so wäre $G=U$, im Widerspruch zur Definition einer Partition. Es gibt also von 0 verschiedene Gruppenelemente a und b aus U bzw. V. $0, a$ und b sind dann drei Punkte von $\alpha(\mathfrak{R})$, die nicht auf einer Geraden liegen, also ist auch A3 richtig.

Nun sind auch leicht die Translationen der affinen Ebene $\alpha(\mathfrak{R})$ anzugeben. Die Abbildungen $\bar{g}$, die durch

$$x \to x+g \tag{1}$$

definiert werden, sind Translationen, denn die Geraden $U+a$ werden durch sie in die zu ihr parallelen $U+a+g$ übergeführt und für $g \neq 0$ hat (1) keinen Fixpunkt. Der Punkt a wird in den Punkt b durch die Translation $\overline{-a+b}$ übergeführt. Also ist die Translationsgruppe transitiv, $\alpha(\mathfrak{R})$ *ist also eine Translationsebene*. Die Abbildungen (1) sind die *einzigen* Translationen von $\alpha(\mathfrak{R})$, denn gäbe es außer $\bar{g}$ eine weitere τ, die ein a in $a+g$ abbildet, so wäre $\tau^{-1}\bar{g}$ eine nichtidentische Perspektivität mit dem (eigentlichen) Fixpunkt a, was nach §1, Ziffer 3 nicht geht.

Wegen $\bar{h}\,\bar{g}\,(x)=x+g+h=\overline{g+h}\,(x)$ ist die eineindeutige Abbildung $g \leftrightarrow \bar{g}^{-1}$ ein *Isomorphismus* zwischen G und der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ von $\alpha(\mathfrak{R})$. Also gilt

Satz 6. *Die Trägergruppe von $\mathfrak{R}$ ist isomorph zur Translationsgruppe von $\alpha(\mathfrak{R})$.*

Nach § 1, Satz 3 folgt dann

Satz 7. *Die Trägergruppe einer Kongruenz ist abelsch.*

Alle Komponenten einer Kongruenz sind mithin *Normalteiler* in ihrer Trägergruppe G. Daraus folgt, daß G *direkte Summe* von je zwei verschiedenen Komponenten U und V aus $\mathfrak{K}$ ist:

$$G = U \oplus V, \quad \text{wenn} \quad U, V \in \mathfrak{K} \quad \text{und} \quad U \neq V \text{ [14]}).$$

Wir können jetzt zeigen

Satz 8. *Alle Komponenten einer Kongruenz sind zueinander isomorph.*

Beweis. $\alpha(\mathfrak{K})$ ist eine affine Ebene, d.h. durch jeden ihrer Punkte gehen mindestens drei Geraden. Da die Geraden von $\alpha(\mathfrak{K})$ Restklassen von Komponenten von $\mathfrak{K}$ sind, so folgt, daß $\mathfrak{K}$ *mindestens drei Untergruppen enthält.* U, V und W seien nun paarweis verschiedene Untergruppen der Kongruenz $\mathfrak{K}$. Wegen

$$G = U \oplus W = W \oplus V$$

ist nach dem zweiten Isomorphiesatz der Gruppentheorie[15])

$$U \cong G/W \cong V, \tag{2}$$

womit die behauptete Isomorphie gewonnen ist.

§ 3. Kennzeichnung der Translationsebenen.

1. Es werden jetzt die Ergebnisse des vorigen Paragraphen umgekehrt, d.h. es wird gezeigt, daß sich jede Translationsebene als ein $\alpha(\mathfrak{K})$ darstellen läßt. Sei also $\mathbf{A}$ eine affine Translationsebene, G die Menge ihrer Punkte und $\mathfrak{T}$ ihre Translationsgruppe. Wir führen jetzt in G eine Verknüpfung ein (die wir additiv schreiben) und machen so G zu einer zu $\mathfrak{T}$ isomorphen Gruppe: Ein beliebiger, aber dann fester Punkt von G wird als *Nullpunkt* ausgezeichnet und 0 genannt. Nach § 1, Ziffer 3 (vgl. auch den Beweis von Satz 6) gibt es nun *genau eine* Translation $\bar{a}$, die 0 in a überführt. Die *Summe* zweier Punkte a und b wird dann definiert durch:

$$a + b = \bar{b}(a) = \bar{b}\,\bar{a}(0).$$

Durch Einführung dieser Addition wird G offenbar zu einer Gruppe isomorph zu $\mathfrak{T}$.

Die Punkte einer Geraden U durch 0 bilden eine Untergruppe von G, die ebenfalls U genannt wird. Das folgt sofort aus dem folgenden

Hilfssatz. *Genau dann ist $a \in U$, wenn die a (wie oben) zugeordnete Translation $\bar{a}$ die Gerade U in sich überführt.*

Ist nämlich $\bar{a}\,U = U$, so $\bar{a}(0) = a \in U$. Ist umgekehrt $a \in U$, so ist der Schnittpunkt von U mit der uneigentlichen Geraden das Zentrum der

[14]) Mit dem Symbol $\oplus$ wird die direkte Summation bezeichnet. Vgl. hierzu etwa [20], S. 75ff.

[15]) Vgl. [20], S. 32.

Translation $\bar{a}$, was ganz analog wie beim Beweis von Satz 2 gezeigt wird[16]), also ist $\bar{a}\,U = U$.

Sind nun $a, b \in U$, d.h. $U = \bar{a}\,U = \bar{b}\,U$, so ist $\overline{a-b}(U) = \bar{b}^{-1}\,\bar{a}\,(U) = U$, d.h. $a - b \in U$, also ist U eine Untergruppe von G. Die Menge aller dieser so (durch die Geraden durch 0) gegebenen Untergruppen von G nennen wir $\mathfrak{R}$.

Die übrigen Geraden aus A erhält man aus denen durch 0 durch eine Translation. Sei nämlich V eine Gerade durch a und U die (nach Axiom A2 existierende und eindeutig bestimmte) zu ihr parallele durch 0, so ist offenbar $V = \bar{a}\,U = U + a$. *Die Geraden sind somit die (Rechts-)Restklassen zu den Untergruppen aus* $\mathfrak{R}$.

Zwei Geraden $U + a$ *und* $V + b$ *sind genau dann parallel, wenn* $U = V$. Denn jedenfalls ist $U + b$ parallel zu $U + a$, weil $U + b$ sich aus $U + a$ durch Anwendung der Translation $\overline{-a + b}$ ergibt. Andererseits gibt es aber nach A2 nur *eine* Parallele zu $U + a$ durch b, also gilt auch das „genau".

Die Menge $\mathfrak{R}$ *aller so durch die Geraden durch* 0 *bestimmten Untergruppen von* G *bildet eine Kongruenz in* G. Zunächst einmal besteht wegen A3 die Menge $\mathfrak{R}$ nicht nur aus einer Untergruppe, ferner ist $\mathfrak{R}$ eine Partition in G, weil nach A1 durch jeden von 0 verschiedenen Punkt genau eine Gerade geht, die 0 enthält. Ist $U \neq V$, so sind die Geraden $U + a$ und $V + b$ ($U, V \in \mathfrak{R}$; $a, b \in G$) nach der letzten Bemerkung nicht parallel, haben also einen Punkt gemeinsam. Nun schließt man aus dem gruppentheoretischen Hilfssatz des letzten Paragraphen, daß $G = U + V$. Damit sind alle Kongruenzeigenschaften für $\mathfrak{R}$ bewiesen.

Der einzige willkürliche Schritt in der soeben durchgeführten Konstruktion der Kongruenz ist die Wahl des Nullpunktes; alle weiteren Schritte sind dann eindeutig. Wegen der Transitivität der Translationsgruppe ist es jedoch gleichgültig, *welchen* Punkt von A man als 0 auszeichnet. Die Kongruenz $\mathfrak{R}$ ist mithin durch die Translationsebene A eindeutig bestimmt. Sie werde $\varkappa(\mathsf{A})$ genannt.

2. In § 2 gelangten wir, ausgehend von einer Kongruenz $\mathfrak{R}$, zu einer Translationsebene $\alpha(\mathfrak{R})$. Jetzt kamen wir umgekehrt von einer Translationsebene A wieder zu einer Kongruenz $\varkappa(\mathsf{A})$. Es bleibt nun noch nachzuweisen, daß man durch Hintereinanderausführung dieser beiden Konstruktionen wieder zu der Ausgangsstruktur zurückkommt. Es muß also

$$\varkappa(\alpha(\mathfrak{R})) = \mathfrak{R} \tag{3}$$

und

$$\alpha(\varkappa(\mathsf{A})) = \mathsf{A} \tag{3'}$$

gezeigt werden [wobei allerdings — wie im folgenden erörtert — die Gl. (3) im Sinne einer Identifizierung der Trägergruppen gemäß einem Isomorphismus zu verstehen ist].

Beweis von (3). Zur Kongruenz $\varkappa(\alpha(\mathfrak{R}))$ gehört als Träger die Translationsgruppe von $\alpha(\mathfrak{R})$. Diese ist nach § 2 isomorph zur Trägergruppe G

[16]) Dem Punkt p in jenem Beweis entspricht hier 0, dem Punkt q hier a.

von $\mathfrak{K}$; wir können und wollen also den Träger von $\varkappa(\alpha(\mathfrak{K}))$ mit G identifizieren. $\varkappa(\alpha(\mathfrak{K}))$ ist also als eine Kongruenz von G aufzufassen. Ihre Komponenten sind nach Ziffer 1 genau die Geraden von $\alpha(\mathfrak{K})$ durch 0, mithin gerade die Komponenten von $\mathfrak{K}$. Also gilt (3).

Beweis von (3'). G sei die Menge aller Punkte von A. Nach Ziffer 1 kann G zur Trägergruppe von $\varkappa(\mathsf{A})$ gemacht werden. Die Komponenten der Kongruenz $\varkappa(\mathsf{A})$ sind dann (ebenfalls nach Ziffer 1) genau die Geraden von A durch den Punkt 0. Alle Geraden ergeben sich aus diesen durch Anwendung von Translationen, sind also Rechtsrestklassen der Komponenten von $\varkappa(\mathsf{A})$. Nach Definition der Ebene $\alpha(\varkappa(\mathsf{A}))$ (vgl. § 2) besteht diese aber aus genau denselben Geraden, also gilt auch (3').

Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen können wir nun zusammenfassen in dem

Satz 9. *Es besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen den Translationsebenen einerseits und den Kongruenzen andererseits. Nimmt man die Rechtsrestklassen der Komponenten einer Kongruenz als Geraden, so erhält man eine affine Translationsebene.*

Umgekehrt erhält man aus einer solchen eine Kongruenz, deren Trägergruppe die Translationsgruppe ist und deren Komponenten die Untergruppen derjenigen Translationen sind, die je eine Gerade der Ebene festlassen.

§ 4. Der Kern einer Translationsebene und seine Beziehung zur Streckungsgruppe.

In diesem Paragraphen soll die Struktur einer Gruppe G mit einer Kongruenz $\mathfrak{K}$ näher untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß G als ein Vektorraum über einem Schiefkörper dargestellt werden kann.

Definition 9. Ein $\mathfrak{K}$-*Endomorphismus* einer Gruppe G mit der Kongruenz $\mathfrak{K}$ ist ein Endomorphismus von G (d.h. eine homomorphe Abbildung von G in sich), der jede Komponente von $\mathfrak{K}$ in sich abbildet. Die Menge aller dieser $\mathfrak{K}$-Endomorphismen von G heiße der *Kern* $K(\mathfrak{K})$ der Kongruenz $\mathfrak{K}$ oder auch der zugehörigen Translationsebene $\alpha(\mathfrak{K})$.

Summe $\varrho+\sigma$ und *Produkt* $\varrho\,\sigma$ zweier $\mathfrak{K}$-Endomorphismen ϱ und σ werden — wie üblich — durch

$$(\varrho+\sigma)\,g=\varrho\,g+\sigma\,g \quad \text{und} \quad (\varrho\,\sigma)\,g=\varrho(\sigma\,g) \qquad (g\in G)$$

definiert. Sie sind ebenfalls $\mathfrak{K}$-Endomorphismen, die Summe deswegen, weil G abelsch ist. Jetzt ist klar, daß die $\mathfrak{K}$-Endomorphismen mit den oben erklärten Verknüpfungen einen *Ring* bilden. Es gilt aber sogar der

Satz 10. *Der Kern* $K(\mathfrak{K})$ *einer Kongruenz* $\mathfrak{K}$ *ist ein Schiefkörper.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß jeder von 0 verschiedene $\mathfrak{K}$-Endomorphismus σ von G ein *Automorphismus* ist, d.h. es ist (a) aus $\sigma\,g=0$ $(g\in G;\ \sigma\neq 0)$ folgt $g=0$, und (b) $\sigma G=G$ zu beweisen.

(a) $\sigma \neq 0$ bedeutet: Es gibt ein $h \in G$ mit $\sigma h \neq 0$. Wir machen jetzt die folgende Fallunterscheidung:

(α) $g \notin U_h$[17]). Hieraus folgt $g - h \notin U_h$, d.h. $U_{g-h} \neq U_h$.

Wäre nun $0 = \sigma g = \sigma(g-h) + \sigma h$ für ein $g \neq 0$ aus G, so auch $\sigma h = -\sigma(g-h)$. Weil nun σ ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus ist, so wäre die linke Seite der letzten Gleichung in U_h und die rechte in U_{g-h}, also wäre $\sigma h = 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme; mithin ist $\sigma g \neq 0$.

(β) $g \in U_h$, $g \neq 0$. Weil $\mathfrak{R}$ aus mehr als einer Komponente besteht, gibt es jedenfalls ein $k \notin U_h$. Nach (α) ist $\sigma k \neq 0$. $g \notin U_k$ wegen $g \neq 0$, also folgt auch — wieder nach (α) — $\sigma g \neq 0$.

(b) h sei wie in (a) eingeführt. Zu zeigen ist: Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$ mit $\sigma g' = g$, wenn $\sigma \neq 0$. Es werden dieselben Fallunterscheidungen wie in (a) gemacht.

(α) Aus $\sigma h \neq 0$ folgt $U_h = U_{\sigma h}$, also $U_{g-\sigma h} \neq U_g$. Mithin ist[18])

$$g' = (U_{g-\sigma h} + h) \cap U_g$$

ein einzelnes Gruppenelement. Nun ist

$$\sigma g' \subseteqq \sigma(U_{g-\sigma h} + h) \cap \sigma U_g \subseteqq (U_{g-\sigma h} + \sigma h) \cap U_g = g$$

(letzteres wegen $g \in U_g$ und $g = (g - \sigma h) + \sigma h \in U_{g-\sigma h} + \sigma h$), also ist $\sigma g' = g$.

(β) Sei wieder — wie in (a) — $k \notin U_h$, also $k \neq 0$. Nach (a) ist dann $\sigma k \neq 0$. Nach (α) gibt es nun wegen $g \notin U_k$ ein g' mit $\sigma g' = g$.

Damit ist die Existenz von σ^{-1} für jeden $\mathfrak{R}$-Endomorphismus $\sigma \neq 0$ gezeigt. Für jedes $V \in \mathfrak{R}$ folgt hieraus $\sigma V = V$, denn zu jedem $v \in V$ gibt es ein v' mit $\sigma v' = v$, und weil $\mathfrak{R}$ eine Kongruenz und σ ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus ist, so folgt $v' \in V$. Hieraus folgt $\sigma^{-1} V = V$, d.h. auch σ^{-1} ist ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus. Damit ist Satz 10 vollständig bewiesen[19]).

Die Trägergruppe G einer Kongruenz $\mathfrak{R}$ kann also aufgefaßt werden als abelsche Gruppe über einem Schiefkörper $K = K(\mathfrak{R})$ als Operatorenbereich, d.h. als ein Vektorraum über K. Als solcher soll G künftig betrachtet werden. Die Komponenten von $\mathfrak{R}$ sind K-invariante Untergruppen. Die in § 2, Satz 8 betrachteten Isomorphismen zwischen je zwei Komponenten von $\mathfrak{R}$ sind sogar K-Isomorphismen (d.h. Operatorisomorphismen bezüglich des Kernes K als Operatorenbereich), was ebenso wie in § 2 bewiesen wird. Hieraus folgt die Gleichheit der *Ränge* $(U:K)$ und $(V:K)$ von U bzw. V über K (d.h. der Mächtigkeit einer Basismenge von U bzw. V über K) für irgend zwei verschiedene $U, V \in \mathfrak{R}$, und schließlich wegen $G = U \oplus V$:

$$(G:K) = (U:K) + (V:K) = 2(U:K).$$

Hat also G über K einen endlichen Rang, so ist er gerade.

---

[17]) Zu der Bezeichnung U_h vgl. § 2, Ziffer 2.

[18]) Eine Menge $\{a\}$, die nur aus *einem* Element a besteht, wird hier und im folgenden mit diesem identifiziert.

[19]) Zu Satz 10 vgl. auch [*1*], Thm. 8. Die Elemente aus $\mathfrak{R}$ sind genau die „Homomorphismen" in [*1*].

Über die Beziehung des Kernes von $\mathfrak{K}$ zur Streckungsgruppe $\mathfrak{S}$ von $\alpha(\mathfrak{K})$ gibt Auskunft der

Satz 11. *Die Streckungen von $\alpha(\mathfrak{K})$ mit dem Fixpunkt 0 (d.h. die Streckungen aus $\mathfrak{S}_0$) sind genau die von 0 verschiedenen $\mathfrak{K}$-Endomorphismen.*

Die multiplikative Gruppe $K^\times$ der von 0 verschiedenen Elemente von $K(\mathfrak{K})$ ist also isomorph zu $\mathfrak{S}_0$.

Beweis. (a) Zunächst ist jeder $\mathfrak{K}$-Endomorphismus $\sigma \neq 0$ eine Streckung mit Fixpunkt 0, denn σ läßt 0 fest, und für jede Gerade $U + a$ ($U \in \mathfrak{K}$, $a \in G$) gilt

$$\sigma(U + a) = \sigma U + \sigma a = U + \sigma a,$$

d.h. σ führt jede Gerade in eine dazu parallele über.

(b) Sei nun umgekehrt σ eine Streckung aus $\mathfrak{S}_0$. Wir müssen zeigen, daß σ ein $\mathfrak{K}$-Endomorphismus in G ist. Wegen $\sigma U = U$ für jedes $U \in \mathfrak{K}$ genügt es zu zeigen, daß σ ein Endomorphismus in G ist.

Allgemein sei $\bar{b}$ diejenige Translation, die 0 in b überführt (vgl. § 3, Ziffer 1). Dann gilt

$$\overline{\sigma a} = \sigma \bar{a} \sigma^{-1} \qquad \text{für alle} \quad a \in G. \tag{4}$$

Beide Seiten von (4) sind nämlich Translationen in $\alpha(\mathfrak{K})$, die linke nach Definition und die rechte, weil die Translationsgruppe ein Normalteiler in der Gruppe aller Perspektivitäten (bezüglich der uneigentlichen Geraden) ist[20]). Ferner gilt:

$$\overline{\sigma a}(0) = \sigma a = \sigma\big(\bar{a}(0)\big) = \sigma \bar{a} \sigma^{-1}(0). \tag{5}$$

Die beiden Translationen in (4) führen also 0 in denselben Punkt σa über, stimmen mithin überein. Nun folgt aber:

$$\begin{aligned} \sigma(a + b) = \sigma(b + a) = \sigma\big(\bar{a}(b)\big) = (\sigma \bar{a})(b) \\ = (\sigma \bar{a} \sigma^{-1})(\sigma b) = \overline{\sigma a}(\sigma b) = \sigma a + \sigma b, \end{aligned}$$

also ist σ ein Endomorphismus in G, was bewiesen werden sollte. Wegen $\sigma \neq 0$ und weil σ ein $\mathfrak{K}$-Endomorphismus ist, folgt $\sigma \in K^\times$ mit $\mathfrak{S}_0 = K^\times$.

Zusatz 1. *Die Streckungsgruppe einer Translationsebene ist isomorph zur multiplikativen Gruppe eines Schiefkörpers.*

Die multiplikative Gruppe eines endlichen Schiefkörpers (d.h. eines Körpers) ist zyklisch[21]), also

Zusatz 2. *Die Streckungsgruppe einer Translationsebene mit endlich vielen Punkten ist zyklisch.*

Jede Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ ist eine $K(\mathfrak{K})$-Untergruppe; das Umgekehrte braucht jedoch nicht zu gelten. Vielmehr gilt

Satz 12. *Genau dann gehört jede eigentliche $K(\mathfrak{K})$-Untergruppe zu $\mathfrak{K}$, wenn die Ebene $\alpha(\mathfrak{K})$ DESARGUESsch ist.*

[20]) Nach § 1, Ziffer 3.

[21]) Vgl. [20], S. 70/71.

Beweis. (a) Gehört jede eigentliche K-Untergruppe U zu $\mathfrak{R}$ [$K = K(\mathfrak{R})$ gesetzt], so enthält U insbesondere keine eigentliche K-Untergruppe (denn kein $U \in \mathfrak{R}$ enthält eine eigentliche zu $\mathfrak{R}$ gehörige Untergruppe). Jedes $U \in \mathfrak{R}$ hat also den Rang 1 über K. $G = U \oplus V$ ($U, V \in \mathfrak{R}$; $U \neq V$) hat den Rang 2 über K. G ist also zweidimensionaler Vektorraum über K, und die Geraden von $\alpha(\mathfrak{R})$ sind die Restklassen der eindimensionalen Unterräume.

Eine solche Ebene ist aber DESARGUESsch und hat K als Koordinatenschiefkörper.

(b) Sei nun umgekehrt $\alpha(\mathfrak{R})$ DESARGUESsch. Nach [3] Satz 6.2 ist dann die Streckungsgruppe $\mathfrak{Z}_0 = K^\times$ transitiv in den von 0 verschiedenen Punkten jeder Geraden U durch 0. Aus $u, v \in U$ und $u \neq 0$ folgt die Existenz[22]) eines $\sigma \in K$ mit $v = \sigma u$. Also ist $(U:K) = 1$ für jedes $U \in \mathfrak{R}$ und mithin $(G:K) = 2$. Jede eigentliche K-Untergruppe von G hat demnach den Rang 1 über K, ist also von der Form Ku mit $u \in G$ und $u \neq 0$. Dies ist aber gerade diejenige Komponente von $\mathfrak{R}$, die u enthält. Jede eigentliche K-Untergruppe von G gehört also zu $\mathfrak{R}$, wie behauptet.

Es wurde gleich mitbewiesen der folgende

Zusatz. *$\alpha(\mathfrak{R})$ ist genau dann* DESARGUESSCH, *wenn der Träger G der Kongruenz $\mathfrak{R}$ über dem Kern $K(\mathfrak{R})$ den Rang 2 hat. In diesem Fall ist $K(\mathfrak{R})$ der Koordinatenschiefkörper von $\alpha(\mathfrak{R})$.*

§ 5. Translationsebenen und Quasikörper.

1. Es soll nun der von M. HALL in [8], Thm. 6.3[23]) gefundene Zusammenhang zwischen Translationsebenen und gewissen verallgemeinerten Schiefkörpern dargestellt werden. Es werden für die eigentlichen Punkte einer Translationsebene Koordinaten eingeführt, die einer algebraischen Struktur angehören, für welche die meisten Körperaxiome erfüllt sind und die deshalb *Quasikörper* genannt werden.

Definition 10. Ein *Quasikörper* Q ist eine aus mindestens zwei Elementen bestehende algebraische Struktur, in der zwei Verknüpfungen — genannt *Addition* und *Multiplikation* — unbeschränkt durchführbar sind, und für welche die folgenden Axiome gefordert werden:

Q1. *Bezüglich der Addition ist Q eine Gruppe. Ihr neutrales Element werde 0 genannt.*

Q2. *Es gilt das linksseitige*[24]) *Distributivgesetz*

$$(b + c)\, a = b\, a + c\, a \quad \text{für alle} \quad a, b, c \in Q.$$

Q3. *Es gilt $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in Q$.*

[22]) Für $v \neq 0$ wegen der Transitivität von $\mathfrak{Z}_0$, für $v = 0$ ist $\sigma = 0$ zu setzen.

[23]) Vgl. auch [10].

[24]) Die Bezeichnung „linksseitig" wird deshalb gewählt, weil Distributivität als eine Eigenschaft der Multiplikation *bezüglich der Addition* angesehen wird. Vgl. auch [5]. S. 56/59.

Q4. *Es gibt ein Einselement* 1 *derart, daß*

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

für alle $a \in Q$ *gilt.*

Q5. *Ist* $a \neq 0$, *so ist* $a\,y = b$ *eindeutig nach* y *lösbar.*

Q6. *Ist* $a \neq b$, *so ist* $-x\,b + x\,a = c$ *nach* x *lösbar.*

Das *rechtsseitige* Distributivgesetz $a(b+c) = a\,b + a\,c$ sowie das Assoziativgesetz der Multiplikation brauchen also in einem Quasikörper *nicht* zu gelten.

Mit $-a$ wird, wie üblich, die Lösung x von $a + x = x + a = 0$ bezeichnet. Für $b + (-a)$ und $(-a) + b$ schreiben wir kurz $b - a$ oder $-a + b$. Aus Q2 folgt sofort nach den üblichen Schlußweisen $0 \cdot a = 0$ und $(-a)\,b = -a\,b$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung Q5 schließt man: Aus $c \neq 0$ und $c\,a = c\,b$ folgt $a = b$, also die „linksseitige Kürzungsregel". Hieraus folgt mit Q2 die Eindeutigkeit der Lösung von Q6, denn aus $a \neq b$ und $-x\,b + x\,a = -y\,b + y\,a$ folgt $(x - y)\,a = (x - y)\,b$, also nach der eben erwähnten Kürzungsregel $x = y$.

Aus dieser Eindeutigkeit von Q5 folgt mit Q3 ($b = 0$ gesetzt!), daß $x\,a = c$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung x hat. Hieraus wieder folgt die *rechtsseitige Kürzungsregel*: Aus $c \neq 0$ und $a\,c = b\,c$ folgt $a = b$.

Beispiele von Quasikörpern sind, neben den Schiefkörpern, die *Alternativkörper* von MOUFANG und ZORN (s. etwa [*13*] oder [*8*] und [*9*]). In diesen gelten neben den Axiomen Q1–6 das rechtsseitige Distributivgesetz sowie die drei eingeschränkten Assoziativgesetze $(a\,a)\,b = a\,(a\,b)$, $(a\,b)\,a = a\,(b\,a)$ und $(b\,a)\,a = b\,(a\,a)$. Weitere spezielle Quasikörper untersuchte ZASSENHAUS in [*19*]. Für seine *„vollständigen Fastkörper"* forderte er neben dem Assoziativgesetz der Multiplikation statt Q6 zwar die Lösbarkeit von $x\,a = b$ für $a \neq 0$, doch kann man hieraus für *endliche* Bereiche leicht Q6 schließen[25]).

2. Aus einem Quasikörper Q kann man auf folgende Weise eine Translationsebene $\beta(Q)$ gewinnen:

(a) Die *Punkte* von $\beta(Q)$ sind die geordneten Paare (x, y) mit $x, y \in Q$.

(b) Die *Geraden* von $\beta(Q)$ sind die Mengen aller Punkte (x, y) mit:

$$y = x\,a + b \qquad \text{(bei festen } a, b \in Q) \tag{6}$$

oder mit:

$$x = c \qquad \text{(bei festem } c \in Q). \tag{6'}$$

Man rechnet leicht nach, daß bei den so gegebenen Punkten und Geraden die Axiome A1–3 erfüllt sind. Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie entweder beide die Form (6') oder beide die Form (6) mit gleichen Koeffizienten a von x haben.

Die Translationen von $\beta(Q)$ *sind genau die durch*

$$(x, y) \to (x + u, y + v) \qquad \text{(bei festen } u, v \in Q) \tag{7}$$

definierten Abbildungen.

[25]) Für endliche Quasikörper kann man nämlich aus der rechtsseitigen Kürzungsregel schließen: Aus $x \neq y$ folgt für $a \neq b$: $-x\,b + x\,a \neq -y\,b + y\,a$. Mit x durchläuft also auch $-x\,b + x\,a$ den ganzen endlichen Bereich. ZASSENHAUS forderte in [*19*] statt Q2 das rechtsseitige Distributivgesetz.

Die Abbildungen (7) sind jedenfalls Translationen, denn sie haben keinen (eigentlichen) Fixpunkt und sie führen die Gerade

$$y = xa + b \quad \text{in} \quad y = xa + (ua + b - v)$$

bzw.

$$x = c \quad \text{in} \quad x = c - u,$$

also jede Gerade in eine zu ihr parallele über. Die Abbildungen (7) sind transitiv auf der Ebene, denn der Punkt (a, b) wird in den Punkt (c, d) $(a, b, c, d \in Q)$ durch eine Translation (7) mit $u = -a + c$ und $v = -b + d$ übergeführt. Da es nur *eine* Translation gibt, die einen gegebenen Punkt in einen anderen vorgegebenen abbildet (vgl. etwa § 1, Ziffer 3), so liefern die Abbildungen (7) bereits *alle* Translationen von $\beta(Q)$, wie behauptet war. Ferner ist gezeigt, daß die Ebenen $\beta(Q)$ über einem Quasikörper Translationsebenen sind. Die Translationsgruppe von $\beta(Q)$ ist gemäß (7) isomorph zur direkten Summe $Q^+ \oplus Q^+$ der additiven Gruppe Q^+ des Quasikörpers Q mit sich. Nach § 1, Satz 3 ist die Translationsgruppe abelsch, also ist auch Q^+ abelsch.

Aus den Quasikörperaxiomen Q 1—6 kann mithin die Kommutativität der Addition geschlossen werden[26]:

Satz 13. *Die additive Gruppe eines Quasikörpers ist abelsch.*

HALL zeigte in [8], Thm. 6.3, daß sich umgekehrt zu jeder Translationsebene $\mathfrak{A}$ (mindestens) ein Quasikörper Q finden läßt, derart, daß $\mathfrak{A} \cong \beta(Q)$[27]:

Satz 14. *Genau die Translationsebenen sind Ebenen über einem Quasikörper gemäß der in* (6) *und* (6′) *beschriebenen Weise.*

Wir geben hier nur eine Skizze des Beweises von Satz 14. Genaueres kann in den eben zitierten Arbeiten von BAER und HALL nachgelesen werden.

$\mathfrak{A}$ sei die gegebene affine Translationsebene. Zu zwei nicht parallelen Geraden G und H (den „Koordinatenachsen") und einem nicht auf $G \cap H$ gelegenen Punkt e von $\mathfrak{A}$ (dem „Einheitspunkt") konstruieren wir (eindeutig) einen Quasikörper, der die gewünschten in Satz 14 geforderten Eigenschaften besitzt.

Zu jedem Punkt $a \in G$ gibt es genau eine Translation, die den „Nullpunkt" $G \cap H = 0$ in a überführt. Diese Translation können und wollen wir ebenfalls a nennen. Hintereinanderausführung zweier Translationen, die G in sich überführen, ergibt wieder eine mit dieser Eigenschaft; sie wird die *Summe* $a + b$ von a und b genannt: $(a + b)(0) = b(a(0))$. Dadurch werden die Elemente von G zu einer Gruppe (die später zur additiven Gruppe Q^+ unseres zu konstruierenden Quasikörpers Q wird).

[26]) Ein anderer — rein algebraischer — Beweis dieses Satzes findet sich in [14].

[27]) Vgl. auch [3]. BAER beweist dort (Thm. 4.1) einen analogen Satz für Ebenen, deren Translationsgruppe nur in *einer* Richtung transitiv ist ($p - U$-Transitivität für ein $p \in U$). Er kommt so zu Ebenen über einem „cartesischen Zahlsystem", das eine Verallgemeinerung des Quasikörpers darstellt. Statt $1 \cdot a = a$ fordert BAER $(-1)a = -a$. Vgl. auch [14].

Dem Punkt $a(0)$ (den wir mit a identifiziert haben) auf G geben wir die Koordinaten $(a, 0)$. Seien nun g und h die uneigentlichen Punkte von G und H in der (nach § 1, Ziffer 2) zu A gehörenden projektiven Ebene. Dem (eigentlichen) Punkt p auf der Verbindungsgeraden $K = \langle 0, e\rangle$ des Nullpunktes 0 mit dem Einheitspunkt e geben wir die Koordinaten (a, a), wenn $\langle p, h\rangle \cap G = (a, 0)$. Einem beliebigen Punkt $q \in \mathsf{A}$ geben wir nun die Koordinaten (a, b), wenn $\langle q, h\rangle \cap K = (a, a)$ und $\langle q, g\rangle \cap K = (b, b)$. Auf diese Weise wird jedem Punkt aus A ein geordnetes Paar (a, b) (dessen Elemente Translationen sind, die G festlassen) eineindeutig zugeordnet und umgekehrt läßt sich zu jedem solchen Paar auf diese Art ein Punkt aus A finden.

In der Menge aller Translationen, die G festlassen — wir wollen sie künftig mit Q bezeichnen — wird jetzt eine Multiplikation erklärt. Da der Einheitspunkt e in K liegt, hat er zwei gleiche Koordinaten, die 1 genannt werden: $e = (1, 1)$. Diese 1 wird das neutrale Element unserer Multiplikation.

Hat nun der Punkt $\langle 0, (1, b)\rangle \cap \langle h, (a, 0)\rangle$ die Koordinaten (a, c), so setzen wir $c = a\,b$. Durch diese Definition ist in Q die Multiplikation unbeschränkt und eindeutig durchführbar. Man zeigt nun leicht, daß Q mit den hier gegebenen Definitionen für die Addition und Multiplikation die Quasikörperaxiome Q 1—6 erfüllt, ferner daß der Zusammenhang zwischen Q und unserer Translationsebene A genau der zu Beginn dieses Absatzes gegebene ist, d.h. also daß $\mathsf{A} = \beta(Q)$ ist.

Zu fest gegebenen Koordinatenachsen G und H und Einheitspunkt e kann also in der eben angedeuteten Weise ein Quasikörper Q eindeutig konstruiert werden. Geht man aber zu anderen Achsen bzw. anderem Einheitspunkt über, so ist der nun (bezüglich *dieses* Systemes) erhaltene Quasikörper im allgemeinen *nicht* zu Q isomorph[28]). Es können also zwei nicht isomorphe Quasikörper isomorphe Translationsebenen erzeugen.

§ 6. Der Kern eines Quasikörpers.

In einem Quasikörper gelten im allgemeinen nicht alle Schiefkörperaxiome. Der Wunsch, wenigstens in einer Teilmenge ebenso rechnen zu können, sowie einfache Beziehungen zur zugehörigen Translationsebene (vgl. Satz 17) führen zu der folgenden

Definition 11. Unter dem *Kern* $K(Q)$ eines Quasikörpers Q verstehen wir die Menge aller derjenigen $s \in Q$, für welche die Beziehungen

$$s(x + y) = s\,x + s\,y \quad \text{und} \quad s(x\,y) = (s\,x)\,y \tag{8}$$

für *alle* $x, y \in Q$ gelten.

Zunächst ist klar, daß die Elemente 0 und 1 von Q in $K = K(Q)$ liegen. K enthält also mindestens zwei Elemente. Es gilt aber außerdem der

Satz 15. *Der Kern $K = K(Q)$ eines Quasikörpers Q ist ein Schiefkörper. Q ist K-Linksmodul bezüglich der in Q definierten Addition und Multiplikation. Als solcher werde Q mit Q_K bezeichnet.*

[28]) Vgl. Fußnote 3.

Beweis. Zunächst wird gezeigt, daß mit s und t auch $s-t$ und $s\,t$ in K liegen:

$$(s-t)(x+y) = s(x+y) - t(x+y) = s\,x + s\,y - t\,x - t\,y$$
$$= s\,x - t\,x + s\,y - t\,y = (s-t)\,x + (s-t)\,y,$$
$$(s-t)(x\,y) = s(x\,y) - t(x\,y) = (s\,x)\,y - (t\,x)\,y = (s\,x - t\,x)\,y$$
$$= \big((s-t)\,x\big)\,y,$$

d.h. $s-t \in K$. Ferner ist:

$$(s\,t)(x+y) = s\big(t(x+y)\big) = s(t\,x + t\,y) = s(t\,x) + s(t\,y) = (s\,t)\,x + (s\,t)\,y,$$
$$(s\,t)(x\,y) = s\big(t(x\,y)\big) = s\big((t\,x)\,y\big) = \big(s(t\,x)\big)\,y = \big((s\,t)\,x\big)\,y,$$

d.h. $s\,t \in K$.

Zur Schiefkörpereigenschaft von K ist dann nur noch zu zeigen:

Aus $t \neq 0$, $s, t \in K$ und $s = t\,u$ folgt $u \in K$:

$$t\big(u(x+y)\big) = (t\,u)(x+y) = s(x+y) = s\,x + s\,y = (t\,u)\,x + (t\,u)\,y$$
$$= t(u\,x) + t(u\,y) = t(u\,x + u\,y),$$

also wegen $t \neq 0$:

$$u(x+y) = u\,x + u\,y.$$

Ferner ist:

$$t\big(u(x\,y)\big) = (t\,u)(x\,y) = s(x\,y) = (s\,x)\,y = \big((t\,u)\,x\big)\,y$$
$$= \big(t(u\,x)\big)\,y = t\big((u\,x)\,y\big), \quad \text{also} \quad u(x\,y) = (u\,x)\,y,$$

d.h. $u \in K$.

Die letzte Behauptung von Satz 15 folgt unmittelbar aus der Definition von K.

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen dem Kern eines Quasikörpers Q und dem Kern der zugehörigen Translationsebene $\beta(Q)$. Es wird sich herausstellen, daß diese beiden Kerne isomorph sind, woraus unter anderem folgt, daß der Kern eines Quasikörpers Q *nur* von der zugehörigen Ebene $\beta(Q)$ abhängt. Zunächst zeigen wir hierfür

Satz 16. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *die zu* $\beta(Q)$ *(nach* § 3*) gehörige Kongruenz. Dann sind die* $\mathfrak{R}$*-Endomorphismen* (vgl. § 4) *der Trägergruppe* $G = Q^+ \oplus Q^+$ *genau die durch*

$$(9) \qquad (x, y) \to (s\,x, s\,y) = s(x, y) \quad \text{mit} \quad s \in K(Q)$$

definierten Abbildungen[29]*.*

Beweis. Zunächst sind die Abbildungen (9) Endomorphismen von G wegen:

$$s\big((x, y) + (x', y')\big) = s(x + x', y + y') = \big(s(x + x'), s(y + y')\big)$$
$$= (s\,x + s\,x', s\,y + s\,y') = (s\,x, s\,y) + (s\,x', s\,y') = s(x, y) + s(x', y').$$

[29]) Auch aus diesem Satz folgt, daß der Kern eines Quasikörpers ein Schiefkörper ist.

Die Untergruppen aus $\mathfrak{R}$ sind genau die Geraden durch den Nullpunkt $(0, 0)$, sie bestehen also aus den Elementen $(x, x\,a)$ (a fest, x variabel) bzw. $(0, y)$ (y variabel). Nunmehr folgt leicht, daß die Untergruppen aus $\mathfrak{R}$ bei den Abbildungen (9) einzeln in sich übergeführt werden, denn:

$$s(x, x\,a) = \big(s\,x, s(x\,a)\big) = \big(s\,x, (s\,x)\,a\big) \quad \text{und} \quad s(0, y) = (0, s\,y).$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß die Abbildungen (9) bereits *alle* $\mathfrak{R}$-Endomorphismen darstellen. Dieser Beweis zerfällt in zwei Teile. Zunächst wird gezeigt:

(a) *Jeder $\mathfrak{R}$-Endomorphismus σ induziert in jedem* (nach § 5) *zu $\alpha(\mathfrak{R})$ gehörenden Quasikörper Q (eindeutig) eine Abbildung $\bar{\sigma}$ mit den Eigenschaften:*

$$(\alpha) \qquad \bar{\sigma}(a\,b) = \bar{\sigma}(a)\,b,$$

$$(\beta) \qquad \bar{\sigma}(a + b) = \bar{\sigma}\,a + \bar{\sigma}\,b,$$

$$(\gamma) \qquad \sigma(a, b) = (\bar{\sigma}\,a, \bar{\sigma}\,b),$$

jeweils für alle $a, b \in Q$.

Beweis von (a). Weil die aus allen Elementen $(a, 0)$ bzw. $(0, b)$ $(a, b \in Q)$ bestehenden Untergruppen von $Q^+ \oplus Q^+$ (die aus $\mathfrak{R}$ sind) bei Anwendung eines $\sigma \in K(\mathfrak{R})$ in sich übergehen, so folgt:

$$\sigma(a, b) = \sigma(a, 0) + \sigma(0, b) = (\bar{\sigma}\,a, 0) + (0, \bar{\bar{\sigma}}\,b) = (\bar{\sigma}\,a, \bar{\bar{\sigma}}\,b).$$

$\bar{\sigma}$ und $\bar{\bar{\sigma}}$ sind hierdurch als Abbildungen von Q in sich definiert. Es ist aber $\bar{\sigma} = \bar{\bar{\sigma}}$, weil auch die aus allen (a, a) bestehende Untergruppe aus $\mathfrak{R}$ in sich übergeht. Man sieht jetzt sofort, daß die Bedingung (γ) zutrifft. (α) folgt nun daraus, daß auch die Untergruppe aller $(a, a\,b)$ für jedes feste b durch σ in sich abgebildet wird. (β) folgt sofort aus der Endomorphismeneigenschaft von σ.

(b) *$\bar{\sigma}$ sei eine Abbildung von Q auf sich, die den Bedingungen (α) und (β) von* (a) *genügt. Dann gibt es ein $s \in K(Q)$ mit*

$$\bar{\sigma}\,a = s\,a \quad \textit{für alle} \quad a \in Q.$$

Zum Beweis setze man $\bar{\sigma}(1) = s\,(\in Q)$, dann gilt wegen (α):

$$\bar{\sigma}\,a = \bar{\sigma}(1 \cdot a) = (\bar{\sigma}\,1)\,a = s\,a,$$

somit $s(a\,b) = \bar{\sigma}(a\,b) = (\bar{\sigma}\,a)\,b = (s\,a)\,b$. Die andere Kernbedingung für s folgt sofort aus (β).

Aus (a) und (b) folgt nun sofort, daß jeder $\mathfrak{R}$-Endomorphismus durch eine Abbildung (9) definiert werden kann. Damit ist Satz 16 vollständig bewiesen.

Jedem $\sigma \in K(\mathfrak{R})$ entspricht vermöge (9) eineindeutig ein $s \in K(Q)$. Diese eineindeutige Abbildung ist offenbar ein Isomorphismus zwischen den Kernen $K(\mathfrak{R})$ und $K(Q)$, also

Zusatz. *Der Kern eines Quasikörpers Q ist isomorph zum Kern der zugehörigen Translationsebene $\beta(Q)$ [d.h. der zugehörigen Kongruenz $\varkappa(\beta(Q))$].*

Der Kern $K(Q)$ hängt also *nur* von der Ebene $\beta(Q)$, *nicht* jedoch von der speziellen Wahl des Quasikörpers Q ab[30]). Der Kern ist also „geometrisch invariant". Es gilt nun sogar der

Satz 17. *Der Modul Q_K* (vgl. Satz 15) *und irgendeine Komponente aus der zugehörigen Kongruenz $\mathfrak{K} = \varkappa(\beta(Q))$ sind stets operator-isomorph über ihren Kernen* [*wobei deren Elemente gemäß* (9) *identifiziert werden*].

Hieraus folgt sofort der

Zusatz. *Q_K hängt nur von der Ebene $\beta(Q)$ ab, ist also eine „geometrische Invariante".*

Beweis. Da alle Komponenten von $\mathfrak{K}$ einander Kern-isomorph sind (vgl. Satz 8 und § 4), so genügt es, die Isomorphie von Q_K mit einer Komponente von $\mathfrak{K} = \varkappa(\beta(Q))$, etwa der aus allen $(a, 0)$ $(a \in Q)$ bestehenden, zu beweisen. Die Abbildung

$$a \leftrightarrow (a, 0)$$

ist dieser gesuchte Kern-Isomorphismus, wie sofort aus (9) folgt.

§ 7. Kollineationen in Translationsebenen.

1. Es sollen nunmehr die Kollineationen einer Translationsebene untersucht werden. Wir werden uns dabei auf die *affinen* Kollineationen beschränken. Das ist keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, denn bei den „meisten" Translationsebenen sind *alle* Kollineationen affin. Genauer gilt der

Satz 18. *Gestattet eine Translationsebene eine nichtaffine Kollineation, so erfüllt ein zu dieser Ebene* (nach § 5) *gehörender Quasikörper beide Distributivgesetze sowie das „Linkskürzungsgesetz"*

$$a^{-1}(a\,b) = b \tag{10}$$

für alle $a \neq 0$ und b aus dem Quasikörper.

Dieser Satz ist eine leichte Folgerung aus Untersuchungen von H. LENZ in [*12*][32]). Eine Translationsebene, die eine nichtaffine Kollineation gestattet, ist nämlich vom Typ VIb oder VII (nach den Bezeichnungen in [*12*]; das folgt daraus, daß die dort eingeführten Figuren bei Kollineationen in sich übergehen). Nun ist der Hilfssatz 7 von [*12*] anzuwenden.

Aus *beiden* Distributivgesetzen und der Linkskürzungsregel (10) folgt nun das *Linksalternativgesetz*

$$a(a\,b) = (a\,a)\,b \tag{10'}$$

für alle a, b aus dem Quasikörper. Der folgende Beweis hierfür stammt von G. PICKERT[33]).

[30]) Vgl. die letzte Bemerkung des vorigen Paragraphen.

[31]) a^{-1} ist für $a \neq 0$ definiert durch $a^{-1}a = 1$. Aus (10) folgt, wenn $b = a^{-1}$ gesetzt wird, daß auch $a\,a^{-1} = 1$.

[32]) Hierbei ist zu berücksichtigen, daß in [*12*] die Geradengleichungen etwas anders lauten. Der Beweisgang ändert sich dadurch jedoch nicht wesentlich. Satz 18 wurde bereits in [*9*] und [*10*] bewiesen.

[33]) Vorgetragen auf der Tagung der DMV 1953.

Für $a=0$ oder $a=-1$ ist (10′) trivial; wir können also o.B.d.A. $a \neq 0$ und $a \neq -1$ annehmen. Dann gilt:

$$\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)(a\,c) = a^{-1}(a\,c) - (a+1)^{-1}(a\,c) = c - (a+1)^{-1}(a\,c).$$

Multipliziert man von links mit $a+1$, so erhält man:

$$(a+1)\left[\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)(a\,c)\right] = c$$
$$\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)(a\,c) = (a+1)^{-1}\,c$$
$$a\,c = \left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)^{-1}\left[(a+1)^{-1}\,c\right].$$

Setzt man $c=a+1$, so ergibt sich:

$$a(a+1) = \left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)^{-1}$$

und somit:

$$a\,c = [a(a+1)]\,[(a+1)^{-1}\,c].$$

Setzt man nun $c=(a+1)\,b$, so folgt:

$$a\,[(a+1)\,b] = [a(a+1)]\,b$$
$$a(a\,b+b) = (a^2+a)\,b,$$

mithin $a(a\,b)=a^2\,b$, was behauptet war.

Ein Quasikörper, in dem beide Distributivgesetze und das Linksalternativgesetz gelten, heißt ein *Linksalternativkörper*. Wir können nun sagen:

Zusatz 1. *Eine Translationsebene, die eine nichtaffine Kollineation gestattet, ist eine Ebene über einem Linksalternativkörper.*

Nach SKORNIAKOW [*16*] ist jeder Linksalternativkörper der Charakteristik $\neq 2$ sogar *alternativ*, die zugehörige Ebene also eine MOUFANG-Ebene (d.h. eine Ebene, in welcher der kleine DESARGUESsche Satz für jede Gerade gilt). Also gilt

Zusatz 2. *Eine Translationsebene der Charakteristik* $\neq 2$[34], *die eine nichtaffine Kollineation gestattet, ist eine* MOUFANG-*Ebene*[35].

2. Wir beschäftigen uns jetzt ausschließlich mit der Struktur der Gruppe $\mathfrak{A}$ der affinen Kollineationen (oder Affinitäten) einer Translationsebene. Wir können uns dabei im wesentlichen auf die Untergruppe $\mathfrak{A}_0$ derjenigen Affinitäten beschränken, die den Nullpunkt 0 festlassen. Affinitäten mit dieser Eigenschaft werden *homogen* genannt. Sei nämlich β irgendeine Affinität, die den Punkt 0 in p überführt. Ist wieder — wie in § 4 — $\overline{p}$ diejenige Translation die 0 in p überführt, so $\overline{p}^{-1}\beta=\alpha\in\mathfrak{A}_0$, also ist $\beta=\overline{p}\,\alpha$ und wir können schreiben

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{A}_0, \tag{11}$$

wenn $\mathfrak{T}$ wieder die Translationsgruppe der Ebene ist.

[34]) Das bedeutet natürlich, daß kein Element der Translationsgruppe die Ordnung 2 hat.

[35]) Umgekehrt gestatten solche Ebenen wirklich nichtaffine Kollineationen. Vgl. dazu etwa [*8*].

Wegen $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{A}_0 = \{1\}$ ist die Produktdarstellung *eindeutig* bestimmt: Aus $\beta = \tau\alpha = \tau'\alpha'$; $\tau, \tau' \in \mathfrak{T}$ und $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}_0$ folgt $\tau = \tau'$ und $\alpha = \alpha'$. Der zu $\mathfrak{A}_0$ gehörige Faktor der Affinität β heißt der *homogene Teil* $h(\beta)$ von β. Weil $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{A}$ ist (vgl. § 1, Ziffer 4), so ist wegen (11): $\mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, also gilt für beliebige $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{A}$:

$$h(\beta_1 \beta_2) = h(\beta_1)\, h(\beta_2). \tag{11'}$$

Zusammenfassend können wir sagen: *Jede Affinität setzt sich eindeutig aus einer Translation und einer homogenen Affinität zusammen.* Im folgenden werden wir weitere Aussagen über homogene Affinitäten machen.

3. Satz 19. *Die homogenen Affinitäten einer Translationsebene* $\alpha(\mathfrak{K})$ *sind genau diejenigen semilinearen*[36]) *Transformationen der Trägergruppe von* $\mathfrak{K}$ (vgl. § 2, Ziffer 1) *über dem Kern* $K(\mathfrak{K})$, *die regulär*[37]) *sind und* $\mathfrak{K}$ (als *Ganzes*) *in sich überführen.*

Beweis. (a) α sei ein Element der Gruppe $\mathfrak{A}_0$ der homogenen Affinitäten. Durch α wird eine Gerade durch 0 wieder in eine solche übergeführt, also folgt $\alpha U \in \mathfrak{K}$ aus $U \in \mathfrak{K}$. Ferner ist α als Affinität nach Definition regulär. Es bleibt also noch die Semilinearität von α nachzuweisen. G sei die Trägergruppe der Kongruenz $\mathfrak{K}$, ferner $a \in G$. Weil $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{A}$ ist, so zeigt man — ganz entsprechend wie in § 4, Satz 11 — daß

$$\overline{\alpha a} = \alpha\, \bar{a}\, \alpha^{-1}$$

und schließlich

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad (a, b \in G)$$

gilt, d.h., daß α ein Automorphismus von G ist. $\mathfrak{S}_0 = K(\mathfrak{K})^\times$ (vgl. § 4, Satz 11) ist Normalteiler in $\mathfrak{A}_0$, denn $\alpha\sigma\alpha^{-1} (\sigma \in K(\mathfrak{K})^\times, \alpha \in \mathfrak{A}_0)$ läßt den Punkt 0 fest und führt die Gerade $U + b$ $(U \in \mathfrak{K}, b \in G)$ in die zu ihr parallele

$$\alpha\sigma\alpha^{-1}(U + b) = U + \alpha\sigma\alpha^{-1} b$$

über. Hieraus schließt man, daß mit σ auch $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ in dem Kern K von $\mathfrak{K}$ liegt. Wir können also schreiben

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \alpha'(\sigma),$$

wobei α' ein Automorphismus in K ist (der durch eine Transformation mit einem $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ induziert wird). Nunmehr gilt:

$$\alpha(\sigma a) = \alpha'(\sigma)\,(\alpha a).$$

α ist also eine semilineare Transformation, die $\mathfrak{K}$ in sich überführt.

(b) Sei nun umgekehrt α eine reguläre semilineare Transformation, die $\mathfrak{K}$ in sich überführt[38]). α ist eine eineindeutige Abbildung von G auf sich, die

[36]) Zum Begriff der semilinearen Transformation s. etwa [4], S. 42.

[37]) Eine Transformation heißt *regulär*, wenn sie ein Inverses besitzt.

[38]) Es genügt hierfür sogar vorauszusetzen, daß α ein *beliebiger* Automorphismus von G ist, der $\mathfrak{K}$ in sich überführt. Dann folgt aus (a), daß α sogar semilinear ist.

den Nullpunkt festläßt und wegen

$$\alpha(U+a)=\alpha U+\alpha a \qquad (U\in\mathfrak{R},\ a\in G)$$

Geraden wieder in Geraden überführt. Also ist $\alpha\in\mathfrak{A}_0$.

4. Eine wichtige Untergruppe von $\mathfrak{A}$ ist die Gruppe $\mathfrak{L}$ der *linearen Affinitäten*. Eine Affinität heißt *linear*, wenn ihr homogener Teil (s. Ziffer 2) durch eine *lineare* Transformation von G über K (gemäß Satz 19) induziert wird. Die Untergruppe $\mathfrak{L}_0$ der homogenen linearen Affinitäten ist ein *Normalteiler* in $\mathfrak{A}_0$, denn ist $\lambda\in\mathfrak{L}_0$, so auch $\alpha\lambda\alpha^{-1}$ $(\alpha\in\mathfrak{A}_0)$ wegen

$$\begin{aligned}\alpha\lambda\alpha^{-1}(\sigma a)&=\alpha\lambda(\alpha^{-1})'(\sigma)\alpha^{-1}(a)=\alpha\alpha'^{-1}(\sigma)\lambda\alpha^{-1}(a)\\&=(\alpha'\alpha'^{-1})(\sigma)\alpha\lambda\alpha^{-1}(a)=\sigma\left(\alpha\lambda\alpha^{-1}(a)\right)\qquad(\sigma\in K).\end{aligned}$$

Nach dem dritten Isomorphiesatz der Gruppentheorie[39]) folgt nun, daß auch $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{A}$ ist; ferner gilt

$$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0\cong\mathfrak{A}/\mathfrak{T}/\mathfrak{L}/\mathfrak{T}\cong\mathfrak{A}/\mathfrak{L}. \tag{12}$$

Satz 20. *Die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ ist isomorph einer Gruppe von Automorphismen des Kernes K.*

Beweis. Ist Λ die Gruppe *aller* regulären linearen Transformationen von G über K, so ist nach Definition $\mathfrak{L}_0=\mathfrak{A}_0\cap\Lambda$, also

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{L}\cong\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0=\mathfrak{A}_0/\mathfrak{A}_0\cap\Lambda\cong\mathfrak{A}_0\Lambda/\Lambda.$$

Nun ist aber $\mathfrak{A}_0\Lambda$ eine Untergruppe der Gruppe Γ *aller* regulären semilinearen Transformationen von G über K, also ist auch $\mathfrak{A}_0\Lambda/\Lambda$ eine Untergruppe von Γ/Λ. Diese ist aber isomorph zur vollen Automorphismengruppe von K, denn die durch

$$\gamma(\sigma a)=\gamma^*(\sigma)\gamma(a)\qquad(\gamma\in\Gamma,\ \sigma\in K)$$

definierte Abbildung $\gamma\to\gamma^*$ ist ein Homomorphismus von Γ auf die Automorphismengruppe von K wegen:

$$(\gamma\delta)^*(\sigma)\gamma\delta(a)=\gamma\delta(\sigma a)=\gamma\left(\delta^*(\sigma)\delta(a)\right)=\gamma^*\delta^*(\sigma)\gamma\delta(a),$$

und weil jeder Automorphismus von K sich als Bild γ^* eines $\gamma\in\Gamma$ darstellen läßt[40]). Bei diesem Homomorphismus werden genau die Elemente von Λ auf den identischen Automorphismus von K abgebildet.

Bei DESARGUESschen Ebenen sind die Komponenten von $\mathfrak{R}$ nach § 4, Satz 12 genau alle eigentlichen K-Untergruppen von G. Eine eigentliche K-Untergruppe geht aber bei *jeder* semilinearen Transformation wieder in eine solche über[41]). In diesem Fall führt also *jede* semilineare Transformation $\mathfrak{R}$

[39]) Vgl. etwa [*20*], S. 33.

[40]) Ist nämlich die Menge $\{a_\nu\}_{\nu\in N}$ eine *Basis* von G über K, so leistet die Abbildung γ, die durch $\sum_{\nu\in N}\sigma_\nu a_\nu\to\sum_{\nu\in N}\gamma^*(\sigma_\nu)\,a_\nu$ $(\sigma_\nu\in K$, nur endlich viele $\neq 0)$ definiert ist, offenbar das Gewünschte.

[41]) Vgl. etwa [*4*], Kap. III, 1.

(als Ganzes) in sich über, und man erhält $\Gamma = \mathfrak{A}_0$ und $\Lambda = \mathfrak{L}_0$, also den folgenden bekannten

Zusatz. *Für* DESARGUESsche *Ebenen ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ *isomorph zur vollen Automorphismengruppe von* K.

5. Unter den linearen Affinitäten erweisen sich nun wieder die „projektiven" als ausgezeichnet. Eine affine Kollineation (von der nicht vorausgesetzt wird, daß sie linear ist) heißt *projektiv*, wenn sie sich als Produkt affiner Perspektivitäten darstellen läßt. Dabei heißt natürlich eine Perspektivität affin, wenn sie die uneigentliche Gerade der Ebene festläßt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn entweder das Zentrum oder die Achse uneigentlich ist (im letzteren Fall erhalten wir genau die Translationen und Streckungen)[42]).

Satz 21. *Die projektiven affinen Kollineationen bilden einen Normalteiler* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{A}$.

Beweis. $\mu \in \mathfrak{M}$ bedeutet: Es gibt affine Perspektivitäten $\pi_1, \ldots, \pi_r$ derart, daß $\mu = \pi_1 \ldots \pi_r$. Hieraus folgt sofort die Untergruppeneigenschaft von $\mathfrak{M}$. Ist $\alpha \in \mathfrak{A}$ und π eine affine Perspektivität, so auch $\alpha \pi \alpha^{-1}$. Hat nämlich π die Achse H und das Zentrum z, so hat $\alpha \pi \alpha^{-1}$ die Achse αH und das Zentrum αz. Ist H bzw. z uneigentlich, so auch αH und αz. Also ist mit μ auch

$$\alpha \mu \alpha^{-1} = \alpha \pi_1 \alpha^{-1} \ldots \alpha \pi_r \alpha^{-1} \quad \text{in } \mathfrak{M}.$$

Ebenso kann man zeigen, daß die homogenen projektiven Affinitäten einen Normalteiler $\mathfrak{M}_0$ in $\mathfrak{A}_0$ bilden.

Für das Folgende setzen wir den Kern K als *kommutativ* voraus.

Satz 22. *Jede projektive affine Kollineation ist linear, d.h.* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$[43]).

Beweis. Wegen $\beta = \tau \alpha$ ($\beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_0$, $\tau \in \mathfrak{T}$; vgl. Ziffer 2) ist eine Affinität genau dann projektiv, wenn ihr homogener Teil es ist. Es genügt also $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{L}_0$ zu zeigen. Aus $\mu \in \mathfrak{M}$, d.h. $\mu = \pi_1 \ldots \pi_r$ für geeignet gewählte Perspektivitäten $\pi_1, \ldots, \pi_r$ folgt für die homogenen Teile [vgl. (11')]

$$h(\mu) = h(\pi_1) \ldots h(\pi_r).$$

Hieraus folgt, daß jede homogene projektive affine Kollineation sich als Produkt *homogener* affiner Perspektivitäten darstellen läßt. Wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{L}_0$ genügt es nun zu zeigen, daß jede homogene affine Perspektivität in $\mathfrak{L}_0$ liegt.

---

[42]) Es ist im allgemeinen Fall nicht bekannt, ob eine Affinität, die Produkt von Perspektivitäten ist, sich auch als Produkt *affiner* Perspektivitäten darstellen läßt. Im Falle einer DESARGUESschen Ebene ist dies richtig.

[43]) Dieser und der folgende Satz bleiben auch noch für einen nicht kommutativen Kern richtig (wie man ganz entsprechend zeigt), wenn man die Definition der projektiven affinen Kollineation so abändert, daß nur diejenigen Affinitäten „projektiv" genannt werden, die sich als Produkt von Translationen und affinen Perspektivitäten mit *eigentlicher* Achse darstellen lassen. Genau dann ist *jede* Streckung der Ebene projektiv in diesem Sinne, wenn der Kern kommutativ ist.

Ist die Achse einer solchen Perspektivität π uneigentlich, so ist π eine Streckung mit dem Fixpunkt 0, also nach § 4, Satz 11 (wegen der Kommutativität von K) linear. Eine homogene affine Perspektivität π, deren Zentrum im Uneigentlichen liegt, hat im Eigentlichen nur die Punkte der Achse zu Fixpunkten (vgl. etwa [3]). Die Achse von π geht also (wegen der Homogenität) durch den Nullpunkt. π wird also durch eine semilineare Transformation von G über K induziert, die ein $U \in \mathfrak{R}$ punktweise festläßt. Sei nun $a \in U$, $\sigma \in K$, so ist auch $\sigma a \in U$, d.h. es ist:

$$\pi(\sigma a) = \sigma a = \sigma \pi(a).$$

Hieraus folgt, daß der π zugeordnete Automorphismus π^* von K der identische ist; π ist also linear, wie behauptet war.

In DESARGUESsche*n Ebenen gilt sogar* $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{M}_0$, *also auch* $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$. Zum Beweis knüpfen wir an § 4, Satz 12 und seinem Zusatz an. In diesem Fall ist $\mathfrak{L}_0 = \Lambda$. Nun seien $u, v \in G$ linear unabhängig (über K); dann bilden u, v eine Basis von G über K. Für ein vorgegebenes $\lambda \in \mathfrak{L}_0$ können wir nun o.B.d.A. λu und v als linear unabhängig annehmen, denn sonst ersetze man v durch $u + v$. Es sei $\pi_1 \in \mathfrak{L}_0$ durch $\pi_1 u = \lambda u$ und $\pi_1 v = v$ (eindeutig) bestimmt (wegen der eben angenommenen linearen Unabhängigkeit ist π_1 regulär und $\sigma u + \tau v$ $(\sigma, \tau \in K)$ wird durch π_1 in $\sigma \lambda u + \tau v$ abgebildet), ferner $\pi_2 \in \mathfrak{L}_0$ durch $\pi_2(\lambda u) = \lambda u$ und $\pi_2 v = \lambda v$. π_1 bzw. π_2 sind offenbar Perspektivitäten mit den Achsen Kv bzw. $K(\lambda u)$.

Nun ist $\lambda = \pi_2 \pi_1$, denn beide linearen Transformationen haben dieselbe Wirkung auf die Basiselemente u und v, mithin also auf jedes Element von G.

Für nicht-DESARGUESsche Ebenen kann $\mathfrak{M} < \mathfrak{L}$ sein, wie man an dem Beispiel einer Translationsebene über einem Fastkörper mit 9 Elementen zeigen kann[44]).

§ 8. Geometrische Deutung. Beispiele von Kongruenzen.

1. In § 4 wurde gezeigt, daß jede Trägergruppe G einer Kongruenz $\mathfrak{K}$ isomorph zu einem Vektorraum über einem Schiefkörper $K(\mathfrak{K}) = K$ — dem Kern von $\mathfrak{K}$ — ist. Ist nun k ein Unterschiefkörper von K, so läßt sich G natürlich auch auffassen als Gruppe mit k als Operatorenbereich, d.h. als Vektorraum über k. Sind zwei Untergruppen von G isomorph über K, so sind sie es erst recht über k. Hieraus folgt ebenso wie in § 4: Ist der Rang $(G:k)$ endlich, so ist er eine gerade Zahl, und es gilt

$$(G:k) = 2(U:k)$$

für jedes $U \in \mathfrak{K}$.

Deutet man — in üblicher Weise — eine über k einrangige k-Untergruppe von G als *Punkt* im projektiven $(2n-1)$-dimensionalen Raum über k $\big((G:k) = 2n$ gesetzt$\big)$, so werden die Komponenten von $\mathfrak{K}$ lineare Unterräume der Dimension $n-1$, denn die Dimension eines projektiven Raumes ist (definitionsgemäß) der um 1 verminderte Rang des zugehörigen Vektormoduls.

[44]) Hierüber werde ich in einer späteren Note berichten.

Man kann also eine solche Kongruenz $\mathfrak{R}$ *auffassen als Menge paarweise fremd liegender* $(n-1)$*-dimensionaler linearer Unterräume, die den gesamten* $(2n-1)$*-dimensionalen projektiven Raum über* k *überdecken*[45]).

Ist umgekehrt eine Menge $\mathfrak{R}$ von Unterräumen mit den eben beschriebenen Eigenschaften gegeben, so läßt sich diese auffassen als Kongruenz (die wir ebenfalls $\mathfrak{R}$ nennen wollen), deren Trägergruppe die Gruppe G der $2n$-reihigen Vektoren über k ist und deren Komponenten gerade diejenigen n-rangigen Untergruppen sind, die (vermöge der üblichen Zuordnung zwischen Vektorraum und projektiven Raum) den Unterräumen von $\mathfrak{R}$ entsprechen.

Zunächst ist nämlich $\mathfrak{R}$ eine Partition von G, denn durch $a \in G$ geht genau diejenige Untergruppe, die dem Unterraum aus $\mathfrak{R}$ durch den Punkt $k \cdot a$ (des projektiven Raumes) entspricht. Weil aber je zwei $(n-1)$-dimensionale Unterräume mit leerem Durchschnitt den gesamten $(2n-1)$-dimensionalen projektiven Raum aufspannen, so folgt auch die Kongruenzeigenschaft für $\mathfrak{R}$. Ferner gilt nun stets $k \subseteq K(\mathfrak{R})$. Jedes $\sigma \in k$ ist nämlich ein Endomorphismus von G, der $\mathfrak{R}$ elementweise in sich überführt (also ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus, vgl. § 4, Definition 9); das bedeutet aber $\sigma \in K(\mathfrak{R})$.

Für $n=1$ ist $\mathfrak{R}$ einfach die Menge aller Punkte einer Geraden. Der einfachste nicht-triviale Fall ist mithin $n=2$. Dann besteht $\mathfrak{R}$ aus einer Menge paarweise windschiefer Geraden, die den projektiven dreidimensionalen Raum (über k) überdecken. Das bekannteste Beispiel einer solchen Kongruenz ist die *elliptische Geradenkongruenz* in dem dreidimensionalen projektiven Raum über dem reellen Zahlkörper. Sie besteht aus genau denjenigen reellen Geraden, die zwei konjugiert-komplexe Geraden (im projektiven Raum über dem *komplexen* Zahlkörper) schneiden. Die zur elliptischen Kongruenz gehörende Translationsebene ist die (DESARGUESsche) Ebene über dem komplexen Zahlkörper[46]).

2. Wir werden jetzt Verfahren angeben, durch welche man — ausgehend von einer DESARGUESschen Kongruenz (d.h. einer Kongruenz, die zu einer DESARGUESschen Ebene gehört) — zu Kongruenzen gelangt, die zu nicht-DESARGUESschen Ebenen gehören. Im folgenden sei $\mathfrak{R}$ eine Kongruenz, die eine PAPPOSsche Ebene erzeugt, d.h. es wird $(G:K)=2$ mit *kommutativem* Kern K vorausgesetzt. $\alpha(\mathfrak{R})$ kann dann (in der üblichen Weise) als Ebene über K dargestellt werden. $\mathfrak{R}$ besteht in diesem Fall genau aus den Geraden $y = x\,a$ (mit $a \in K$) und $x = 0$.

P sei eine *endliche* Gruppe von Automorphismen von K. Ferner sei $\varkappa(\mathsf{P})$ der zu P gehörende *Invariantenkörper*, d.h. die Menge aller derjenigen $a \in K$, für die $\varrho\, a = a$ für alle $\varrho \in \mathsf{P}$ gilt. Nach einem Satz der GALOISschen Theorie (vgl. etwa [2], S. 42) ist der Rang von K über $\varkappa(\mathsf{P})$ gleich der Gruppenord-

[45]) Eine genau entsprechende Deutung ist auch für unendliches $(G:k)$ möglich; vgl. dazu etwa [4]. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier jedoch auf den endlichrangigen Fall.

Eine *einzige* Kongruenz kann auf diese Weise in *verschiedenen* projektiven Räumen dargestellt werden.

[46]) Vgl. etwa hierzu [17].

nung von P. Als *Norm* von $a \in K$ bezüglich P definieren wir nun:

$$N_{\mathsf{P}}(a) = \prod_{\varrho \in \mathsf{P}} \varrho\, a. \tag{13}$$

Die Norm $N_{\mathsf{P}}(a)$ liegt in dem Invariantenkörper $\varkappa(\mathsf{P})$, weil mit ϱ auch $\varrho'\,\varrho$ (für jedes feste $\varrho' \in \mathsf{P}$) ganz P durchläuft. Ferner folgt sofort aus der Definition (13) die *Produktregel*:

$$N_{\mathsf{P}}(a\,b) = N_{\mathsf{P}}(a)\, N_{\mathsf{P}}(b),$$

ferner, daß $N_{\mathsf{P}}(a) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $a = 0$. Statt $N_{\mathsf{P}}(a)$ schreiben wir im folgenden auch kurz $N(a)$, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist.

Jedes $\varrho \in \mathsf{P}$ definiert in G eine bezüglich K semilineare Transformation

$$(x, y) \to (\varrho\, x, \varrho\, y) \tag{14}$$

für alle $x, y \in K$. Diese Abbildung können wir — ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen — ebenfalls mit ϱ bezeichnen. Die zu P isomorphe Gruppe aller Abbildungen (14) — sie werde ebenfalls P genannt — ist somit eine Untergruppe der Gruppe Γ aller semilinearen Transformationen von G über K.

Als P-*Regelschar* oder *Regelschar bezüglich* P zur Norm α [wo α ein von 0 verschiedenes Element aus $\varkappa(\mathsf{P})$ ist, das Norm eines $a \in K$ ist, d.h. das eine Darstellung (13) gestattet] bezeichnen wir die Menge aller Geraden $y = x\,a$ mit $N_{\mathsf{P}}(a) = \alpha$. Wir nennen diese Menge $\mathfrak{R}_\alpha$. Die Vereinigung aller dieser $\mathfrak{R}_\alpha$ ergibt, zusammen mit den Geraden U und V, die durch $y = 0$ bzw. $x = 0$ definiert sind, offenbar genau alle Geraden durch den Nullpunkt, d.h. die gesamte Kongruenz $\mathfrak{K}$.

Mit $|\mathfrak{R}_\alpha|$ bezeichnen wir die Menge aller derjenigen Punkte, die auf einer Geraden von $\mathfrak{R}_\alpha$ liegen. $|\mathfrak{R}_\alpha|$ wird der *Träger* der Schar $\mathfrak{R}_\alpha$ genannt[47]; er besteht also aus genau allen Punkten $(x, x\,a)$ mit $N_{\mathsf{P}}(a) = \alpha$. Die Träger überdecken, zusammen mit den Punkten von U und V, die Gruppe G, denn jedes Element von G hat die Form $(x, x\,a)$ mit $a \in K$ oder $(0, y)$. Ferner haben offenbar die Regelscharen $\mathfrak{R}_\alpha$ und $\mathfrak{R}_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ keine Gerade gemeinsam, d.h. der Durchschnitt $|\mathfrak{R}_\alpha| \cap |\mathfrak{R}_\beta|$ besteht nur aus dem Nullelement $(0, 0)$.

Aus $\mathfrak{R}_\alpha$ erhält man durch Anwendung eines $\varrho \in \mathsf{P}$ eine *konjugierte Regelschar* $\varrho\,\mathfrak{R}_\alpha$, die aus allen ϱW mit $W \in \mathfrak{R}_\alpha$ besteht. Es ist

$$|\mathfrak{R}_\alpha| = |\varrho\,\mathfrak{R}_\alpha|$$

[47]) Ist K der komplexe Zahlkörper, $\varkappa(\mathsf{P})$ der reelle Zahlkörper (d.h. P die Automorphismengruppe von K, die aus $\underline{1}$ und der Abbildung $a \to \bar{a}$ besteht, wo $\bar{a}$ die zu a konjugiert-komplexe Zahl bedeutet), so stellt sich der Träger jeder Regelschar im reellen projektiven dreidimensionalen Raum dar als ein einschaliges Hyperboloid, das der Gleichung

$$\alpha\, x_0^2 + \alpha\, x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

genügt. In diesem Fall erhält man somit den aus der analytischen Geometrie her bekannten Begriff der Regelschar.

für jedes $\varrho \in \mathsf{P}$, denn $|\varrho\, \mathfrak{R}_\alpha|$ besteht aus genau allen Punkten $(x, x\,\varrho(a))$ mit $N(\varrho\, a) = N(a) = \alpha$.

Wir können jetzt aus der Kongruenz $\mathfrak{K}$, von der wir ausgegangen sind (und die aus genau allen Geraden $y = x\,a$ und $x = 0$ besteht), auf folgende Weise neue Kongruenzen konstruieren. Jedem $\alpha \neq 0$ aus $\varkappa(\mathsf{P})$, das Norm eines $a \in K$ ist, ordnen wir ein $\varrho_\alpha \in \mathsf{P}$ zu. Dann ist

$$\mathfrak{K}' = \{U\} \cup \{V\} \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} \varrho_\alpha\, \mathfrak{R}_\alpha$$

eine Kongruenz, welche dieselbe Trägergruppe G wie $\mathfrak{K}$ hat.

Beweis. Man kann nach Ziffer 1 die Kongruenz $\mathfrak{K}$ deuten als Menge von paarweise fremden $(n-1)$-dimensionalen Unterräumen im $(2n-1)$-dimensionalen projektiven Raum über $\varkappa(\mathsf{P})$, wenn $n = (K : \varkappa(\mathsf{P}))$ gesetzt wird, denn es ist $(G : \varkappa(\mathsf{P})) = (G : K)\,(K : \varkappa(\mathsf{P})) = 2n$[48]).

Nun stellen sich auch die Räume $\varrho_\alpha W$ $(W \in \mathfrak{R}_\alpha \subseteq \mathfrak{K})$ als Unterräume der Dimension $n-1$, d.h. als Untergruppen von G mit dem Rang n über $\varkappa(\mathsf{P})$ dar. Alle $\varrho_\alpha W$ überdecken zusammen mit U und V ganz G wegen

$$U \cup V \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} |\varrho_\alpha\, \mathfrak{R}_\alpha| = U \cup V \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} |\mathfrak{R}_\alpha| = G.$$

Wegen

$$|\mathfrak{R}_\alpha| \cap |\mathfrak{R}_\beta| = 0$$

für $\alpha \neq \beta$ haben $\varrho_\alpha W$ und $\varrho_\beta Z$ $(W \in \mathfrak{R}_\alpha,\ Z \in \mathfrak{R}_\beta)$ nur den Nullpunkt $0 = (0, 0)$ gemeinsam; aus entsprechenden Gründen ist auch $\varrho_\alpha W \cap U = \varrho_\alpha W \cap V = 0$. Ebenso haben aber auch $\varrho_\alpha W$ und $\varrho_\alpha Z$ nur 0 gemeinsam, falls $W \neq Z$ beide aus einem $\mathfrak{R}_\alpha$, wegen

$$\varrho_\alpha W \cap \varrho_\alpha Z = \varrho_\alpha (W \cap Z) = \varrho_\alpha (0) = 0.$$

$\mathfrak{K}'$ ist also eine Partition in G, nach den am Anfang dieses Beweises Bemerkten folgt aber nach Ziffer 1 sofort die Kongruenzeigenschaft für $\mathfrak{K}'$. Mithin ist $\alpha(\mathfrak{K}')$ eine Translationsebene.

Bilden wir nun statt $\mathfrak{K}'$ die Kongruenz

$$\mathfrak{K}'' = \{U\} \cup \{V\} \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} \varrho\, \varrho_\alpha\, \mathfrak{R}_\alpha,$$

so ist wegen $\varrho\, U = U$ und $\varrho\, V = V$ auch $\mathfrak{K}'' = \varrho\, \mathfrak{K}'$. Es entsteht also $\mathfrak{K}''$ aus $\mathfrak{K}'$ durch Anwendung eines Automorphismus ϱ von G. Durch diesen geht die Gerade $W + a$ von $\alpha(\mathfrak{K}')$ in die Gerade $\varrho W + \varrho\, a$ von $\alpha(\mathfrak{K}'')$ über. Die Ebenen $\alpha(\mathfrak{K}')$ und $\alpha(\mathfrak{K}'')$ sind also isomorph. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $\varrho_\alpha = \underline{1}$ für ein α — etwa für $\alpha = 1 = N(1)$ — gilt. Sind nun alle $\varrho_\beta = \underline{1}$, so ist $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$, mithin $\alpha(\mathfrak{K}')$ DESARGUESsch.

Ist für ein β jedoch $\varrho_\beta \neq \underline{1}$, so ist $\alpha(\mathfrak{K}')$ eine nicht-DESARGUESsche Translationsebene, wie jetzt gezeigt werden soll.

---

[48]) k in Ziffer 1 ist hier durch $\varkappa(\mathsf{P})$ ersetzt.

Da die durch den Nullpunkt von $\alpha(\mathfrak{R}')$ gehenden Geraden nach der Definition von $\mathfrak{R}'$ die Gleichungen

$$y = \varrho_{N(a)}(x)\, a$$

bzw. $y = 0$ und $x = 0$ erfüllen, so können wir zu $\alpha(\mathfrak{R}')$ (gemäß den Untersuchungen des § 5) einen Quasikörper Q auf folgende Weise gewinnen:

a) *Die Elemente von Q stimmen mit denen von K überein.*

b) *Die Addition von Q ist wie in K definiert.*

c) *Die Multiplikation $\circ$ von Q wird erklärt durch:*

$$a \circ b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ \varrho_{N(b)}(a)\, b & b \neq 0, \end{cases}$$

wo $\varrho_{N(b)} \in \mathsf{P}$ *und* $\varrho_{N(1)} = \varrho_1 = \underline{1}$ [49]).

Dieser Bereich Q ist in der Tat ein Quasikörper, denn das Axiom Q1 folgt unmittelbar aus a), Q2 folgt aus der Automorphismeneigenschaft von $\varrho_{N(b)}$, Q3 aus der Definition c) und Q4 aus $\varrho_1 = \underline{1}$. Weil die (zu Q gehörende) Ebene $\alpha(\mathfrak{R}')$ eine affine Ebene darstellt, so folgt aus A1 (vgl. § 1) das Axiom Q5. Schließlich ergibt sich Q6, weil in einer affinen Ebene zwei nichtparallele Geraden sich stets schneiden.

Ist nun $\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{R}$, d.h. gibt es ein b mit $\varrho_{N(b)} \neq \underline{1}$, so ist Q *kein* Schiefkörper, d.h. $\alpha(\mathfrak{R}')$ eine nicht-DESARGUESsche Ebene. Gelte nämlich in Q das *rechtsseitige* Distributivgesetz

$$a \circ (1 + b) = a + a \circ b$$

d.h.

$$\varrho_{N(1+b)}(a)\,(1 + b) = a + \varrho_{N(b)}(a)\, b$$

für alle a und $b \neq 0, -1$, so müßte die Abbildung $\varrho_{N(1+b)}$, die durch

$$\varrho_{N(1+b)}(a) = \frac{a + \varrho_{N(b)}(a)\, b}{1 + b} \qquad (b \neq 0, -1)$$

definiert ist, ein Automorphismus in K sein, d.h. es müßte gelten:

$$\varrho_{N(1+b)}(a\, a') = \varrho_{N(1+b)}(a)\, \varrho_{N(1+b)}(a')$$

für alle $a, a' \in K$. Das bedeutet aber:

$$\left(a + \varrho_{N(b)}(a)\, b\right)\left(a' + \varrho_{N(b)}(a')\, b\right) = (1 + b)\left(a\, a' + \varrho_{N(b)}(a\, a')\, b\right).$$

Hieraus folgt nach einfacher Umrechnung, wenn man berücksichtigt, daß $\varrho_{N(b)}$ ein Automorphismus von K ist:

$$\left(\varrho_{N(b)}(a) - a\right)\left(\varrho_{N(b)}(a') - a'\right) = 0$$

für alle $a, a' \in K$, also $\varrho_{N(b)}(a) = a$ für alle $a \in K$, d.h. $\varrho_{N(b)} = \underline{1}$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

[49]) ZASSENHAUS definierte in [19], S. 191 im wesentlichen auf diese Art (mit einer Zusatzbedingung, die dem Assoziativgesetz der Multiplikation entspricht) vollständige Fastkörper, die keine Schiefkörper sind. Das Assoziativgesetz der Multiplikation gilt genau dann, wenn $\varrho_{N(a\,b)} = \varrho_{N(a)\,N(b)} = \varrho_{N(a)}\varrho_{N(b)}$ für alle $a, b \in Q$ gilt.

Ist ein $s \in Q$ in dem Kern von Q, so ist dafür eine *notwendige* Bedingung

$$s \circ (1 + a) = s + s \circ a \quad \text{für alle} \quad a \in Q.$$

Hieraus ergibt sich — ganz entsprechend wie eben:

$$\varrho_{N(a)}(s) = s \quad \text{für alle} \quad a \neq 0 \quad \text{aus} \quad Q. \tag{15}$$

Diese notwendige Bedingung (15) ist aber auch hinreichend, denn genügt s dieser Bedingung, so ist $s \circ a = s\,a$, woraus für dieses s sofort die Gültigkeit des rechtsseitigen Distributivgesetzes für alle $a, b \in Q$ folgt.

Es gilt aber auch

$$s \circ (a \circ b) = s(a \circ b) = s\,\varrho_{N(b)}(a)\,b = \varrho_{N(b)}(s\,a)\,b = s\,a \circ b = (s \circ a) \circ b$$

für alle a und $b \neq 0$ aus Q, aber trivialerweise auch für $b = 0$.

Genau dann ist also ein s in dem Kern von Q, wenn es der Bedingung (15) *genügt.*

Insbesondere umfaßt der Kern also den Invariantenkörper $\varkappa(\mathsf{P})$.

Literatur.

[1] ARTIN, E.: Coordinates in affine geometry. Rep. Math. Coll. Univ. Notre Dame (2) **2**, 15—20 (1940). — [2] ARTIN, E.: Galois-Theory, 2. Aufl. Notre Dame mathematical lectures Nr. 2. Notre Dame, Ind. 1946. 82 S. — [3] BAER, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137—152 (1942). — [4] BAER, R.: Linear algebra and projective geometry. New York: Academic Press Inc. 1952. 318 S. — [5] BOURBAKI, N.: Eléments de mathématicque. Livre II: Algèbre. Chapitre I: Structures algébriques. Paris, Hermann & Cie. 1942. 165 S. — [6] BIRKHOFF, G.: Lattice theory, 2. Aufl. American Mathematical Society Colloquium Publications, Bd. 25. New York 1948. 235 S. — [7] BRUCK, R. H., and E. KLEINFELD: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 878—890 (1951). — [8] HALL, MARSHALL: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [9] HALL, MARSHALL: Corrections to „projective planes". Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 473—474 (1949). — [10] GINGERICH, H. F.: Generalized fields and Desargues configurations. Abstract of a Thesis of the University of Illinois, Urbana, Ill. 1945. 12 S. — [11] KLEINFELD, E.: Alternative division rings of characteristic 2. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **37**, 818—820 (1951). — [12] LENZ, H.: Kleiner desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Erscheint im Jahresbericht der DMV. — [13] MOUFANG, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **9**, 207—222 (1933). — [14] PICKERT, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. Math. **3**, 335—342 (1952). — [15] REIDEMEISTER, K.: Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. 147 S. — [16] SKORNIAKOW, L. A.: Rechtsalternativkörper. Izvestija Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. **15**, 177—184 (1951) (russisch). — [17] WEISS, E. A.: Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation I. Dtsch. Math. **1**, 23—37 (1936). — [18] YOUNG, J. W.: On the partitions of a group and the resulting classification. Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 453—461 (1927). — [19] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 187—220 (1936). — [20] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. Hamburger mathematische Einzelschriften, H. 21. Leipzig 1937. 151 S.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 11. Januar 1954.)

STALLMANN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 187—212 (1954)

Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. I.

Von
FRIEDEMANN STALLMANN.

Einleitung.

Die konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen bietet ein besonderes Interesse nicht nur wegen der großen Zahl von wichtigen physikalischen und technischen Problemen, die auf solche Abbildungsaufgaben führen, sondern auch wegen der darin enthaltenen Möglichkeit, analytische Sachverhalte geometrisch zu deuten. Die Theorie geht bekanntlich zurück auf H. A. SCHWARZ, der als erster die Zusammenhänge mit den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der FUCHSschen Klasse klar herausstellte. Später hat dann vor allem F. KLEIN diese Ideen weiter verfolgt und für eingehende Untersuchungen der hypergeometrischen und der LAMÉschen Differentialgleichungen ausgewertet. Seitdem sind auf diesem Gebiet keine wesentlichen Fortschritte mehr erzielt worden, offenbar deshalb, weil die bisherigen Methoden nicht ausreichten, die noch ausstehenden Fragen zu lösen.

In meiner Dissertation[1]) habe ich versucht, diesen Problemkreis mit den Methoden der asymptotischen Integration von Differentialgleichungen anzugreifen. Dabei haben sich diese Methoden als durchaus fruchtbar erwiesen, und haben nicht nur zu Einblicken in die Struktur der Lösungen, sondern auch zu brauchbaren numerischen Ergebnissen geführt. Im folgenden sollen diese Methoden in erweiterter Form und mit einigen Anwendungen auf die LAMÉsche Differentialgleichung dargelegt werden. Wir werden uns dabei nicht auf Differentialgleichungen der FUCHSschen Klasse beschränken; die Methoden der asymptotischen Integration sind ja überhaupt zunächst nur zur Untersuchung einer Differentialgleichung in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen angewandt worden. Zudem kann man sich jede Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten aus einer Differentialgleichung der FUCHSschen Klasse durch Konfluenz hervorgegangen denken. Der entsprechende Grenzübergang bei den Kreisbogenpolygonen durchgeführt ergibt Gebiete, die neben den Kreisbögen noch durch logarithmische Windungspunkte berandet sind. Wir gewinnen so Anschluß an die NEVANLINNAsche Theorie der RIEMANNschen Flächen mit nur endlich vielen logarithmischen Windungspunkten, wie es überhaupt auf diese Weise möglich wird, die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten unter einheitlichen Gesichtspunkten zu betrachten.

Die Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsauftrages der Deutschen Forschungsgemeinschaft im mathematischen Institut der Justus Liebig-Hochschule Gießen bei Herrn Professor E. ULLRICH. Ihm gilt mein besonderer Dank für die freundliche Förderung dieser Arbeit.

[1]) STALLMANN [*10*].

§ 1. Grundlegende Sätze.

1.1. Ein Kreisbogenpolygon — im folgenden kurz *Polygon* genannt — sei ein einfach zusammenhängendes RIEMANNsches Flächenstück, das durch endlich viele Kreisbögen und eventuell endlich viele logarithmische Windungspunkte berandet ist[2]). Treten keine logarithmischen Windungspunkte auf, so sprechen wir von einem *gewöhnlichen*, andernfalls von einem *außergewöhnlichen* Polygon. Ferner sei eine rationale Funktion, die auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt und deren sämtliche Pole auf der reellen Achse liegen, als *reelle rationale Funktion* bezeichnet. Mit diesen Definitionen gelten die beiden folgenden Sätze:

1. *Ist $\eta(x)$ eine analytische Funktion, die die obere Halbebene konform auf ein Polygon abbildet, so ist ihre* SCHWARZ*sche Ableitung*

$$[\eta]_x = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$$

eine reelle rationale Funktion.

2. *Jede Lösung der Differentialgleichung*

$$[\eta]_x = R(x),$$

wo $R(x)$ eine reelle rationale Funktion ist, bildet die obere Halbebene auf ein Polygon ab.

Für gewöhnliche Polygone sind diese Sätze schon von H. A. SCHWARZ bewiesen. Für außergewöhnliche Polygone sind sie meines Wissens hier zum erstenmal ausgesprochen. Sie ergeben sich als eine leichte Verallgemeinerung der Sätze von R. NEVANLINNA über RIEMANNsche Flächen mit endlich vielen logarithmischen Windungspunkten[3]). Den genauen Beweis übergehen wir hier, weil er an dieser Stelle zuviel Raum beanspruchen würde und wir ihn für die folgenden Überlegungen nicht benötigen.

1.2. Von der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$[\eta]_x = R(x) \tag{1.1}$$

gehen wir über zu der zugehörigen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit reellen rationalen Koeffizienten

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \tag{1.2}$$

Bekanntlich ist die SCHWARZsche Ableitung des Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ zweier linear unabhängiger Lösungen von (1.2)

$$[\eta]_x = 2q(x) - \tfrac{1}{2}p^2(x) - p'(x) = R(x). \tag{1.3}$$

Wir beschränken uns im folgenden auf die Differentialgleichung

$$y'' + \tfrac{1}{2}R(x)\,y = 0. \tag{1.4}$$

---

[2]) Diese Definition bedürfte noch der Präzisierung; hierzu wären jedoch recht mühsame topologische Untersuchungen nötig, die für das Folgende ohne Bedeutung sind und daher hier nicht durchgeführt werden sollen.

[3]) NEVANLINNA [9].

Es soll also weiterhin $\eta(x)$ stets als der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (1.4) betrachtet werden.

1.3. Das Verhalten der Lösungen von (1.4) in der Umgebung einer Stelle $x = x_0$ bedingt die Einteilung in *reguläre, außerwesentlich* und *wesentlich singuläre Stellen* der Differentialgleichung. Eine *reguläre Stelle* im Endlichen[4]) liegt vor, wenn $R(x)$ dort regulär ist. Es sind dann dort sämtliche Lösungen von (1.4) regulär. An einer *außerwesentlichen Singularität* im Endlichen[4]) darf $R(x)$ einen Pol höchstens zweiter Ordnung besitzen. Das Verhalten der Lösungen in der Umgebung einer solchen Stelle wird durch den Koeffizienten (-2)-ter Ordnung in der LAURENT-Entwicklung von $R(x)$ bestimmt. Sei

$$\lim_{x \to x_0} 2(x - x_0)^2 R(x) = 1 - \delta^2, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arc \delta \leq +\frac{\pi}{2}\right),$$

so besitzt (1.4) ein Paar von *kanonischen Lösungen*, die sich in der Umgebung von x_0 in die folgenden Potenzreihen entwickeln lassen:

$$(1.5) \qquad \begin{cases} y^{(1)} = (x - x_0)^{\frac{1+\delta}{2}} (1 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots) \\ y^{(2)} = (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} (1 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots), \end{cases}$$

oder, falls δ gleich einer ganzen Zahl ist

$$y^{(2)} = C\, y^{(1)} \log (x - x_0) + (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} (1 + b_1(x - x_0) + \cdots).$$

In der Umgebung einer solchen Stelle sind also die Lösungen von (1.4) und damit $\eta(x)$ im allgemeinen verzweigt. $\eta(x)$ bildet die obere Halbebene in der Umgebung einer solchen Stelle auf eine Ecke des Polygons ab, die dort einen Innenwinkel der Größe $\delta\pi$ einschließt. Dabei soll dieser Winkel wie üblich in der nichteuklidischen Maßbestimmung gemessen werden.

1.4. Das charakteristische Kennzeichen dieser Entwicklungen ist es, daß durch das Glied

$$(x - x_0)^{\frac{1\pm\delta}{2}} \quad \text{bzw.} \quad (x - x_0)^{\frac{1+\delta}{2}} \log (x - x_0)$$

das Verhalten der Lösungen in der Umgebung von x_0 schon vollständig bestimmt ist, weshalb man in diesem Zusammenhang auch von *Stellen der Bestimmtheit* der Differentialgleichung spricht. Diese Eigenschaft geht verloren bei Entwicklungen in der Umgebung *wesentlich singulärer Stellen* der Differentialgleichung, die vorliegen, wenn $R(x)$ im Endlichen[4]) einen Pol höherer als zweiter Ordnung hat. Dann treten an die Stelle der TAYLOR-Reihen in (1.5) LAURENT-Reihen, und es bleibt zunächst unbestimmt, in welcher Weise die Umgebung einer solchen Stelle durch die Funktion $\eta(x)$ abgebildet wird.

[4]) Das Verhalten der Lösungen in der Umgebung von $x = \infty$ erkennt man aus einer Transformation der Differentialgleichung, bei der diese Stelle ins Endliche gebracht wird. Danach ist $x = \infty$ eine *reguläre, außerwesentlich* oder *wesentlich singuläre* Stelle der Differentialgleichung (1.4), je nachdem $x^4 R(x)$ dort regulär ist, einen Pol höchstens zweiter oder einen Pol höherer Ordnung hat.

Einen gewissen Einblick in die hier vorliegenden Verhältnisse erhält man aus einem Grenzübergang, der als *Konfluenz* — besonders im Zusammenhang mit der hypergeometrischen Differentialgleichung — bekannt ist, und den wir hier kurz skizzieren wollen.

Es habe $R(x)$ in der Umgebung von x_0 einen Pol n-ter Ordnung ($n>2$), es sei also

$$R(x)=\frac{R^*(x)}{(x-x_0)^n},$$

wo $R^*(x)$ in der Umgebung von x_0 regulär ist. Dann läßt sich $R(x)$ als Grenzwert

$$R(x)=\lim_{\varepsilon_\varkappa\to 0} R_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}(x)=\lim_{\varepsilon_\varkappa\to 0}\frac{R^*(x)}{\prod_{\varkappa=1}^{n}(x-x_0-\varepsilon_\varkappa)}$$

auffassen, wobei der Grenzübergang so durchzuführen ist, daß $R_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}(x)$ in einer Umgebung von x_0 keine Pole höherer als zweiter Ordnung erhält. Bei geeigneter Normierung der Lösungen $y_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}(x)$ von

$$y''_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}+\tfrac{1}{2}R_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}(x)\,y_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}=0 \tag{1.6}$$

streben auch die $y_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}(x)$ mit $\varepsilon_\varkappa\to 0$ gegen die Lösung von (1.4). Die Quotienten $\eta_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}(x)$ zweier linear unabhängiger Lösungen von (1.6) bilden die obere Halbebene auf eine Schar von Polygonen ab, die dann mit $\varepsilon_\varkappa\to 0$ gegen das gesuchte Polygon konvergieren. Da Differentialgleichung (1.6) nach Voraussetzung in der Umgebung von x_0 nur Stellen der Bestimmtheit hat, wird diese Umgebung durch $\eta_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}(x)$ auf Teilstücke der betreffenden Polygone abgebildet, die dort eine gewisse feste Anzahl gewöhnlicher Ecken besitzen. Mit $\varepsilon_\varkappa\to 0$ wachsen die zugehörigen Winkel im allgemeinen über alle Grenzen, so daß diese Ecken in der Grenze in logarithmische Windungspunkte übergehen. Wir werden diese Verhältnisse weiter unten noch im einzelnen — auch quantitativ — zu studieren haben.

1.5. Über das Verhalten der Lösungen $y(x)$ bzw. von $\eta(x)$ *im großen* läßt sich zunächst nur aussagen, daß sie bei geschlossenen Umläufen in der x-Ebene linear transformiert werden. Irgendein Paar von linear unabhängigen Lösungen y_1, y_2 von (1.4) geht bei analytischer Fortsetzung längs einer geschlossenen Kurve in ein anderes Paar $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ über, das mit dem ersteren linear zusammenhängt:

$$\begin{cases}\tilde{y}_1=a_{11}\,y_1+a_{12}\,y_2\\ \tilde{y}_2=a_{21}\,y_1+a_{22}\,y_2.\end{cases} \tag{1.7}$$

Hieraus ergibt sich die Existenz *multiplikativer Lösungen*, die bei geschlossenem Umlauf einen konstanten Faktor annehmen:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\tilde{y}^{(1)}&=k_1\,y^{(1)}\\ \tilde{y}^{(2)}&=k_2\,y^{(2)}\end{aligned}\right\}&\text{für}\quad k_1\neq k_2\\ \left.\begin{aligned}\tilde{y}^{(1)}&=k\,y^{(1)}\\ y^{(2)}&=C\,y^{(1)}+k\,y^{(2)}\end{aligned}\right\}&\text{für}\quad k_1=k_2=k.\end{cases} \tag{1.8}$$

Aus der Betrachtung der WRONSKIschen Determinante

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

die bei einer Differentialgleichung des Typus (1.4) gleich einer Konstanten ist, folgt, daß die Determinante der Umlaufssubstitutionen (1.7) und (1.8)

$$\mathrm{Det}\,|a_{ik}| = k_1 k_2 = 1 \qquad \text{ist.}$$

Dies hat die Existenz gewisser LAURENT-Entwicklungen in jedem von Singularitäten freien Kreisring in der x-Ebene zur Folge. Die in diesem Kreisring multiplikativen Lösungen lassen sich — entsprechend den kanonischen Lösungen (1.5) — in der Form schreiben:

$$(1.9) \qquad \begin{cases} y^{(1)} = (x - x_0)^{\frac{1+\delta}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu \\ y^{(2)} = (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu \end{cases}$$

für unganze δ, und

$$y^{(2)} = C \log (x - x_0)\, y^{(1)} + (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu$$

für ganze δ.

1.6. Die Größe δ, die hier nur mod 2 bestimmt ist, läßt sich in diesem Fall nicht mehr algebraisch aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (1.4) ermitteln. Zu ihrer Bestimmung wird die Differentialgleichung integriert und ein beliebiges Paar linear unabhängiger Lösungen $y_{1,2}$ samt ihren Ableitungen im Kreisring einmal herum analytisch fortgesetzt. Daraus lassen sich die Substitutionskoeffizienten a_{ik} von (1.7) berechnen, woraus sich die $k_{1,2}$ als Eigenwerte der Matrix (a_{ik}) ergeben. Insbesondere ist dann

$$(1.10) \qquad k_1 + k_2 = -2\cos\pi\delta = a_{11} + a_{22},$$

oder in den $y_{1,2}$ ausgedrückt:

$$(1.11) \qquad -2\cos\pi\delta = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \left(\begin{vmatrix} y_1 & \tilde{y}_2 \\ y_1' & \tilde{y}_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & y_2 \\ \tilde{y}_1' & y_2' \end{vmatrix} \right).$$

Wie in (1.5) hat auch in (1.9) die Größe δ [5]) für die konforme Abbildung durch $\eta(x)$ die Bedeutung eines Winkelmaßes. Die Darstellung (1.9) gilt in einem Ringgebiet, das gewisse Singularitäten der Differentialgleichung (1.4) umschließt. Diese Singularitäten liegen auf der reellen Achse, so daß das Ringgebiet zwei Stücke der reellen Achse herausschneidet. Diese Stücke gehen bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ in Kreisbögen über, die miteinander einen Winkel der Größe $\delta\pi$ einschließen, wiederum in den Maßen der nichteuklidischen Geometrie gemessen. Dies ergibt sich als Folge des SCHWARZschen Spiegelungsprinzips.

[5]) Es läßt sich zeigen, daß — ebenso wie in den Entwicklungen (1.5) — die Größe δ reell oder rein imaginär sein muß.

1.7. Alle über diese allgemeinen Betrachtungen hinausgehenden Ergebnisse in der Theorie der Polygonabbildungen erfordern *die wirkliche Durchführung der Integration* der Differentialgleichung (1.4). Dabei wird es weniger auf die Gewinnung einzelner *numerischer Werte* als auf die Untersuchung der *Abhängigkeit der Lösungen von den Koeffizienten* der Differentialgleichung ankommen. Für diese Untersuchungen sind die üblichen numerischen Methoden wenig geeignet. Wir wenden daher hier die *asymptotischen Abschätzungen* der Lösungen von Differentialgleichungen bei großen Werten eines Parameters an, wie sie — ausgehend von Ansätzen von J. LIOUVILLE und J. HORN[6]) in neuerer Zeit vor allem von R. E. LANGER in verschiedenen Arbeiten[7]) durchgeführt worden sind. Die Grundzüge dieses Verfahrens sollen im folgenden entwickelt werden.

§ 2. Die asymptotische Integration.

2.1. Wir schreiben Differentialgleichung (1.4) in der Form:

$$\frac{y''}{y} = r(x) + \varrho^2 \varphi(x). \tag{2.1}$$

Nach bekannten Sätzen über die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern der Differentialgleichung[8]) sind bei geeigneter Normierung die Lösungen $y(\varrho^2, x)$ von (2.1) *ganze* und im allgemeinen *transzendente Funktionen in* ϱ^2 *von der Ordnung* $\leq \frac{1}{2}$[9]). Die Lösungen von (2.1) lassen sich also an jeder Stelle ϱ_0^2 in beständig konvergente Potenzreihen entwickeln

$$y(\varrho^2, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varrho^2 - \varrho_0^2)^\nu y_\nu(x), \tag{2.2}$$

deren Koeffizienten sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten rekursiv aus (2.1) bestimmen. Wesentliche Einblicke in die Struktur der zu untersuchenden *Abhängigkeit der Lösungen von* ϱ^2 gestatten solche Entwicklungen nicht. Erfordert wird hier vielmehr die Untersuchung der Abhängigkeit von ϱ^2 *„im großen"*, also in unserem Falle die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens für $\varrho^2 \to \infty$; eine solche Untersuchung soll im folgenden durchgeführt werden. Da uns hier nur Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten interessieren, können wir ϱ^2 von vornherein als *positiv reell* voraussetzen. Die Ausdehnung auf komplexe Parameter macht im übrigen keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten.

2.2. Über die Funktionen $r(x)$ und $\varphi(x)$ sei Folgendes vorausgesetzt:

1. $r(x)$ *und* $\varphi(x)$ *sind reelle rationale Funktionen.*

2. $r(x)$ *hat im Endlichen*[10]) *nur Pole höchstens zweiter Ordnung. Ist überdies* x_0 *Stelle der Bestimmtheit von* (2.1), *so ist*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 r(x) < 0.$$

[6]) HORN [2].

[7]) LANGER [4], [5], [6], [8].

[8]) BIEBERBACH [1], S. 12.

[9]) BIEBERBACH [1], S. 293.

[10]) Für $x = \infty$ gelten die Bemerkungen in Fußnote 5 sinngemäß, d.h. es wird dort das Verhalten von $x^4 r(x)$ bzw. $x^4 \varphi(x)$ betrachtet.

3. *Hat $\varphi(x)$ an der Stelle der Bestimmtheit x_0 [10] einen Pol zweiter Ordnung, so sei*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 r(x) = -\tfrac{1}{4}.$$

Es ist dann

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \varrho^2 \varphi(x) = \frac{\delta^2}{4},$$

wo δ der zu dieser Stelle gehörige charakteristische Exponent ist.

2.3. Auf die Differentialgleichung (2.1) üben wir die LIOUVILLE-Transformation aus:

$$\xi(x) = \varrho \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varphi(x)}\, dx, \qquad u(\xi) = \sqrt[4]{\varphi(x)}\, y(x). \tag{2.3}$$

Die Differentialgleichung (1.4) geht dann über in:

$$\frac{u''}{u} = 1 + \frac{r(x) + \frac{1}{2}[\xi]_x}{\varrho^2 \varphi(x)} = 1 + \frac{Q(\xi)}{\varrho^2}. \tag{2.4}$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi(x)$ eine *reelle rationale Funktion*. Die obere x-Halbebene wird daher durch $\xi(x)$ als ein SCHWARZ-CHRISTOFFELsches Integral auf ein *Geradenpolygon* abgebildet. Dieses hat die besondere Eigenschaft, daß alle seine Ränder *Parallelen zur reellen oder imaginären ξ-Achse* sind. Die Winkel in den Ecken sind dann alle Vielfache von $\pi/2$. Falls $\varphi(x)$ *Nullstellen* in der oberen Halbebene besitzt, so daß $\xi(x)$ dort *nicht mehr eindeutig* ist, trennen wir durch eine geeignete Zerschneidung einen in der oberen Halbebene eindeutigen Zweig von $\xi(x)$ ab, wobei wir die Schnitte so legen, daß ihre Ufer durch $\xi(x)$ ebenfalls auf *Parallelen zur reellen oder imaginären ξ-Achse* abgebildet werden. Es wird dann auch in diesem Fall die obere Halbebene einschließlich der Schnitte durch $\xi(x)$ auf ein Polygon mit der oben geschilderten Eigenschaft abgebildet. Solche Polygone wollen wir im folgenden als *ξ-Polygone* bezeichnen.

2.4. Ist $Q(\xi)$ in einem Gebiet beschränkt, so geht Differentialgleichung (2.4) mit $\varrho \to \infty$ dort über in

$$\frac{u''}{u} = 1$$

und die Lösungen $u(\xi)$ gehen (in einer noch näher zu erläuternden Weise) dort gegen die *Exponentialfunktion*. Eine eingehendere Untersuchung erfordern dagegen die *Unendlichkeitsstellen* von

$$Q(\xi) = \frac{r(x) + \frac{1}{2}[\xi]_x}{\varphi(x)}. \tag{2.5}$$

$[\xi]_x$ hat als SCHWARZsche Ableitung eines SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Integrals Pole höchstens zweiter Ordnung in x, und zwar genau an den Nullstellen und Polen von $\varphi(x)$. Nach Voraussetzung hat auch $r(x)$ Pole höchstens zweiter Ordnung, so daß im Zähler auf der rechten Seite von (2.5) eine rationale Funktion in x mit Polen höchstens zweiter Ordnung steht.

Es sei jetzt k die *Ordnung* von $\varphi(x)$ an einer Stelle $x=x_0$, d.h. für $\varphi(x)$ gelte in der Umgebung von x_0 die Entwicklung:

$$\varphi(x) = c^2(x-x_0)^k\left(1 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots\right).$$

Wir müssen dann unterscheiden, ob $k \gtreqless -2$ ist[10]).

$k > -2$.

Das Integral $\xi(x)$ bleibt in der Umgebung von x_0 *endlich*; es sei $\xi(x_0)=\xi_0$. Dann gilt

$$\xi - \xi_0 = \frac{2\varrho c}{k+2}(x-x_0)^{\frac{k+2}{2}}\left(1 + b_1(x-x_0) + \cdots\right) \tag{2.6}$$

und umgekehrt

$$x - x_0 = \left(\frac{k+2}{2\varrho c}(\xi-\xi_0)\right)^{\frac{2}{k+2}} + c_1\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^{\frac{4}{k+2}} + \cdots. \tag{2.7}$$

Es habe zunächst $r(x)$ bei x_0 einen Pol. Dann ist x_0 *Stelle der Bestimmtheit* von (2.1) und es gilt

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 r(x) = -\frac{1-\delta^2}{4} < 0, \quad \text{d.h. } \delta^2 < 1.$$

Ferner ist

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\,[\xi]_r = \frac{1-\left(\frac{k+2}{2}\right)^2}{2}.$$

Daraus ergibt sich die Entwicklung von $Q(\xi)$ in der Umgebung von ξ_0 zu:

$$\left\{\begin{aligned} Q(\xi) = -\frac{1-\left(\frac{2\delta}{k+2}\right)^2}{4}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^{-2} + d_1\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^{-\frac{2k+2}{k+2}} + \\ + d_2\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^{-\frac{2k}{k+2}} + \cdots; \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

deren Koeffizienten d_ν sind unbhängig von ϱ.

Ist $r(x)$ *regulär* an der Stelle x_0, so verschwindet, wie man durch elementare Rechnung zeigen kann, der Koeffizient d_1, so daß in diesem Falle gilt:

$$Q(\xi) = -\frac{1-\left(\frac{2}{k+2}\right)^2}{4}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^{-2} + d_2\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^{-\frac{2k}{k+2}} + \cdots. \tag{2.9}$$

$k = -2$.

An der Stelle x_0 wird $\xi(x)$ *logarithmisch unendlich*. Es gilt:

$$\xi = \pm\frac{\delta}{2}\log(x-x_0) + b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots. \tag{2.10}$$

Da $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\,\frac{1}{2}\,[\xi]_x = \frac{1}{4}$ ist, verschwindet der *Koeffizient* (-2)-ter *Ordnung* in der Entwicklung des Zählers von (2.5) an der Stelle x_0, der gesamte Ausdruck auf der rechten Seite von (2.5) hat dort also eine *Nullstelle*. Für $Q(\xi)$ als Funktion von ξ ergibt sich daraus das folgende Verhalten: Wenn wir uns in der x-Ebene auf irgendeinem Wege der Stelle x_0 nähern, so entspricht dem

in der ξ-Ebene ein Weg, der nach $\xi = \infty$ führt. Auf solchen Wegen strebt dann $Q(\xi) \to 0$, und zwar so stark, wie die Exponentialfunktion in der linken Halbebene, also insbesondere stärker als jede noch so große negative Potenz von ξ.

***k* < −2.**

Auch hier wird $\xi(x)$ mit $x \to x_0$ *unendlich*, und zwar gilt:

$$\xi = \varrho (x - x_0)^{\frac{k+2}{2}} (b_0 + b_1 (x - x_0) + \cdots) \tag{2.11}$$

und umgekehrt:

$$x - x_0 = c_0 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{\frac{2}{k+2}} + c_1 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{\frac{4}{k+2}} . \tag{2.12}$$

Mit $x \to x_0$ verschwindet die rechte Seite von (2.5) mindestens wie $(x - x_0)^{-k-2}$, $Q(\xi)$ also mindestens wie ξ^{-2}. Genauer gilt die folgende Entwicklung in ξ und ϱ:

$$Q(\xi) = d_0 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-2} + d_1 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\frac{2k+2}{k+2}} + d_2 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\frac{2k}{k+2}} + \cdots \tag{2.13}$$

für alle Wege in der ξ-Ebene, die einer Annäherung an die Stelle x_0 in der x-Ebene entsprechen.

Zusammenfassend können wir Folgendes sagen: *$Q(\xi)$ hat auf dem Rand*[11] *des ξ-Polygons endlich viele singuläre Stellen, an denen es wie $(\xi - \xi_0)^{-2}$ unendlich wird, wenn ξ_0 die betreffende singuläre Stelle ist. In denjenigen Teilen des ξ-Polygons, die nach $\xi = \infty$ reichen, verschwindet $Q(\xi)$ mindestens wie ξ^{-2}.*

2.5. Wir stellen nun der Differentialgleichung (2.4) eine *Hilfs*-Differentialgleichung vom gleichen Typus mit bereits bekannten Lösungen gegenüber:

$$\frac{v''}{v} = 1 + \frac{P(\xi)}{\varrho^2} . \tag{2.14}$$

Diese soll mit Differentialgleichung (2.4) auf einem *Teilbereich* des ξ-Polygons näherungsweise übereinstimmen, in der Weise, daß die Differenz

$$q(\xi) = Q(\xi) - P(\xi)$$

klein wird in folgendem Sinne:

1. $|q(\xi)| = O(1)$, *wo* $|Q(\xi)| = O(1)$ *ist.*
2. *In der Umgebung einer singulären Stelle ξ_0 von $Q(\xi)$ sei*

$$|q(\xi)| = O\left(\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k+2}{k+2}}\right)$$

oder

$$|q(\xi)| = O\left(\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k}{k+2}}\right),$$

je nachdem dort (2.8) *oder* (2.9) *gilt.*

3. $|q(\xi)| = O\left(\left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{-2}\right)$, *für* $\xi \to \infty$, $\varrho \to \infty$.

[11] Nach der oben gegebenen Definition des ξ-Polygons liegen die Singularitäten von $Q(\xi)$ sämtlich auf seinem Rand.

Darüber hinaus soll $P(\xi)$ natürlich auf dem betrachteten Bereich *regulär analytisch* sein, eventuell mit Ausnahme von endlich vielen Polstellen und algebraischen Verzweigungen.

2.6. Wir schreiben die Differentialgleichung (2.4) in der Form:

$$\frac{u''}{u} = 1 + \frac{P(\xi)}{\varrho^2} + \frac{q(\xi)}{\varrho^2}. \tag{2.15}$$

Auf Grund von (2.14) ist diese Differentialgleichung äquivalent mit der folgenden *Integralgleichung*:

$$u(\xi) = v_1(\xi) + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{v_1(\zeta)\, v_2(\xi) - v_2(\zeta)\, v_1(\xi)}{\varrho^2 W(v_1, v_2)}\, q(\zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.16}$$

v_1, v_2 sind hier ein — zunächst beliebiges — Paar von linear unabhängigen Lösungen der Hilfsdifferentialgleichung (2:14). Die Lösung der Integralgleichung (2.16) ist dann gleich derjenigen Lösung der Differentialgleichung (2.15), die an der Stelle ξ_1 samt ihrer Ableitung mit $v_1(\xi)$ übereinstimmt und von dort aus längs des in (2.16) zugrunde gelegten Integrationsweges nach ξ analytisch fortgesetzt wurde. Sofern das Integral auf der rechten Seite von (2.16) als *klein* vorausgesetzt werden kann, haben wir damit eine *Abschätzung* von $u(\xi)$ durch die bekannte Funktion $v_1(\xi)$.

Wir formen die Integralgleichung (2.16) um, indem wir setzen:

$$U(\xi) = \frac{u(\xi)}{v_1(\xi)}, \qquad H(\xi) = \frac{v_2(\xi)}{v_1(\xi)}. \tag{2.17}$$

Dann ist $U(\xi)$ Lösung der folgenden Integralgleichung:

$$U(\xi) = 1 + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{H(\xi) - H(\zeta)}{\varrho^2 W(v_1, v_2)}\, v_1^2(\zeta)\, q(\zeta)\, U(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.18}$$

2.7. Diese Integralgleichung lösen wir mit den Methoden der *sukzessiven Approximation*. Sei

$$K(\xi, \zeta) = \frac{H(\xi) - H(\zeta)}{\varrho^2 W(v_1, v_2)}\, v_1^2(\zeta)\, q(\zeta).$$

Wir bilden

$$\begin{cases} U_0(\xi) = 1, \\ U_{\nu+1}(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} K(\xi, \zeta)\, U_\nu(\zeta)\, d\zeta. \end{cases} \tag{2.19}$$

Dann ist

$$U(\xi) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu(\xi) \tag{2.20}$$

eine Lösung von (2.18) sofern die Summe auf der rechten Seite von (2.20) *gleichmäßig konvergiert*. Sei nun $k(\zeta)$ eine *positiv reelle* und *stückweise stetige Funktion*, derart, daß für alle ξ und ζ auf dem Integrationsweg gilt:

$$|K(\xi, \zeta)| \leq k(\zeta). \tag{2.21}$$

Dann konvergiert die Summe in (2.20) gleichmäßig für alle ξ, für die das Integral

$$I(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} k(\zeta)\,|d\zeta| \tag{2.22}$$

beschränkt bleibt. Es ist nämlich:

$$|U_1(\xi)| \leq I(\xi)$$

$$|U_2(\xi)| \leq \int_{\xi_1}^{\xi} I(\zeta)\,k(\zeta)\,|d\zeta| = \frac{I^2(\xi)}{2}$$

$$|U_\nu(\xi)| \leq \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{I^{\nu-1}(\zeta)}{(\nu-1)!}\,k(\zeta)\,|d\zeta| = \frac{I^\nu(\xi)}{\nu!}\,.$$

Daraus folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu(\xi) \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{I_\nu(\xi)}{\nu!} = e^{I(\xi)} - 1\,. \tag{2.23}$$

Insbesondere geht $U(\xi) \to 1$, d.h. $u(\xi) \to v_1(\xi)$, wenn $I(\xi) \to 0$ geht für $\varrho \to \infty$. Es gilt also eine geeignete Abschätzung für $K(\xi, \zeta)$ zu finden.

2.8. Als Erstes schätzen wir den von den *Hilfsfunktionen* $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ *herrührenden Anteil* in $K(\xi, \zeta)$ ab:

$$\frac{H(\xi) - H(\zeta)}{W(v_1, v_2)}\,v_1^2(\zeta)\,. \tag{2.24}$$

In diesem Ausdruck tritt neben der Funktion $v_1(\xi)$, durch die $u(\xi)$ abgeschätzt wird, noch die dazu linear unabhängige Lösung $v_2(\xi)$ von (2.14) auf. Das Verhalten von $u(\xi)$ wird daher nicht allein durch die *partikuläre Lösung* $v_1(\xi)$, sondern durch die *Gesamtheit* der Lösungen von (2.14) bestimmt. Hierin liegt eine charakteristische Schwierigkeit dieses Abschätzungsverfahrens; es ist nämlich nicht möglich, sinnvolle Abschätzungen für ganz beliebige Anfangsbedingungen und Integrationswege zu erhalten. G. G. STOKES hat als erster diese Schwierigkeit bei der asymptotischen Abschätzung der BESSEL-Funktionen bemerkt und richtig gedeutet. Man nennt daher diese Erscheinung nach ihm das STOKESsche Phänomen[12]).

In unserem Fall erhalten die Bedingungen, denen der Integrationsweg und die Hilfsfunktionen $v_{1,2}$ genügen müssen, die folgende Form: Es sei $t(\xi)$ die *Schwankung des Realteils* von ξ auf dem *Integrationsweg*

$$t(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} |d\,\Re(\zeta)|\,. \tag{2.25}$$

Dann muß für beliebig große, positiv reelle ϱ *und alle* ξ *auf dem Integrationsweg die folgende Abschätzung der Hilfsfunktionen* $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ *möglich sein*:

$$\begin{cases} |v_1(\xi)| \leq V \exp\left(\varrho\, t_0 + t(\xi)\right) \\ |v_2(\xi)| \leq V \exp -\left(\varrho\, t_0 + t(\xi)\right), \end{cases} \tag{2.26}$$

mit einer von ξ und ϱ unabhängigen Konstante V.

[12]) LANGER [3].

Einer entsprechenden Bedingung soll auch $H(\xi)$ genügen; es sei[13]):

$$|H(\xi)| \leq H \exp -2\left(\varrho\, t_0 + t(\xi)\right). \tag{2.27}$$

Weiterhin sei die WRONSKIsche Determinante $W(v_1, v_2)$ eine von ϱ — und natürlich von ξ — unabhängige Konstante. Unter diesen Voraussetzungen ist die Größe (2.24) auf dem ganzen Integrationsweg und für alle ϱ beschränkt. Denn es ist

und

$$|H(\zeta)\, v_1^2(\zeta)| = |v_1(\zeta)\, v_2(\zeta)| \leq V^2$$
$$|H(\xi)\, v_1^2(\zeta)| \leq H V^2 \exp 2\left(t(\zeta) - t(\xi)\right) \leq H V^2,$$

da auf dem Integrationsweg stets $t(\zeta) \leq t(\xi)$ ist.

2.9. Bei der *Abschätzung von* $q(\xi)$ müssen wir berücksichtigen, daß mit wachsendem ϱ sich nicht nur $K(\xi, \zeta)$ sondern auch das ξ-Polygon selbst verändert, und zwar im Sinne einer *ähnlichen Vergrößerung* mit dem Faktor ϱ. Dieselbe Vergrößerung erfährt ein *Integrationsweg* in der ξ-Ebene, wenn in der x-Ebene ein fester Weg vorgegeben war. Da wir letzten Endes die Abhängigkeit der Lösungen von x und nicht von ξ studieren wollen, und zudem auch $Q(\xi)$ nur als Funktion von x, nicht aber als Funktion von ξ unabhängig von ϱ ist, werden wir weiterhin solche Wege und Bereiche zugrunde zu legen haben, die in der x-Ebene, nicht aber in der ξ-Ebene fest bleiben. Entsprechend den vorhin über $q(\xi)$ gemachten Voraussetzungen müssen wir gesondert betrachten:

1. *Bereiche auf denen* $q(\xi)$ *beschränkt ist.*

2. *Umgebungen der singulären Stellen von* $Q(\xi)$. *Sei* ξ_0 *eine solche Stelle, so betrachten wir die Umgebung* $|\xi - \xi_0| < \varrho\, r$, *wo* r *von* ϱ *unabhängig sein soll.*

3. *Die Umgebung von* $\xi = \infty$; *wir betrachten eine Umgebung* $|\xi| > \varrho R$, *wo* R *ebenfalls von* ϱ *unabhängig sein soll.*

2.10. Auf Bereichen, in denen $q(\xi)$ *beschränkt* ist, können wir $K(\xi, \zeta)$ abschätzen durch:

$$k(\zeta) = \frac{K_1}{\varrho^2}. \tag{2.28}$$

Die Teile des Integrationswegs, die auf diesen Bereichen liegen, haben eine endliche Länge, die proportional mit ϱ wächst. Es ist daher das Integral über diese Teile des Integrationswegs[14])

$$\int^{1} k(\zeta)\, |d\zeta| = O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{2.29}$$

[13]) Diese Bedingung läuft im wesentlichen darauf hinaus, daß $|v_1(\xi)|$ auch nach unten beschränkt ist. Im übrigen ist sie nicht von so grundsätzlicher Bedeutung wie (2.26), sondern soll nur unnötige Komplikationen vermeiden, die bei der Abschätzung in der Umgebung der Nullstellen von $v_1(\xi)$ auftreten.

[14]) Die den Integralen im folgenden beigefügten Ziffern beziehen sich auf die Fallunterscheidungen im vorigen Abschnitt **2.9.** Sie sollen zum Ausdruck bringen, daß jeweils nur über solche Teile des Integrationswegs integriert werden soll, auf die der unter der betreffenden Ziffer genannte Fall zutrifft.

2.11. Für die Umgebung einer *singulären Stelle* ξ_0 hatten wir vorausgesetzt, daß $P(\xi)$ dort nur algebraisch verzweigt ist und wie $(\xi-\xi_0)^{-2}$ unendlich wird. Sei also

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho^2}\right)^2 P(\xi) = -\frac{1-m^2}{4}, \tag{2.30}$$

mit $\Re(m)\geq 0$, $m^2\leq 1$ [15]). Dann ist, gemessen in der *Ortsuniformisierenden* der algebraischen Verzweigung, die Stelle ξ_0 eine *außerwesentliche Singularität* von (2.14), d.h. die Lösungen von (2.14) lassen sich dort in Reihen vom Typus (1.5) entwickeln mit der Ortsuniformisierenden als Entwicklungsgröße. Wegen (2.30) haben diese kanonischen Lösungen m als charakteristischen Exponenten; sie lassen sich in einer festen, von ϱ unabhängigen Umgebung, sagen wir für $|\xi-\xi_0|<r_1<\varrho\,r$, wie folgt abschätzen:

$$v^{(1)} = (\xi-\xi_0)^{\frac{1+m}{2}}\,(1+o(1)), \tag{2.31}$$

$$v^{(2)} = (\xi-\xi_0)^{\frac{1-m}{2}}\,(1+o(1)),$$

oder für $m=0$

$$v^{(2)} = (\xi-\xi_0)^{\frac{1}{2}}\log(\xi-\xi_0)\,(1+o(1)).$$

Zusammen mit (2.26) folgt daraus für $|\xi-\xi_0|<r_1<\varrho\,r$

$$v_1 = \exp\left(\varrho\,t_0 + t(\xi_0)\right)(\xi-\xi_0)^{\frac{1-m}{2}}\cdot O(1), \tag{2.32}$$

oder für $m=0$

$$v_1 = \exp\left(\varrho\,t_0 + t(\xi_0)\right)(\xi-\xi_0)^{\frac{1}{2}}\log(\xi-\xi_0)\,O(1).$$

Nach Voraussetzung ist für $|\xi-\xi_0|<\varrho\,r$

$$|q(\xi)| = \left|\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k}{k+2}} O(1)$$

oder

$$|q(\xi)| = \left|\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k+2}{k+2}} O(1),$$

je nachdem $r(x)$ in x_0 regulär ist oder nicht. Im ersten Fall ist

$$m = \frac{2}{k+2}$$

und wir können $K(\xi,\zeta)$ abschätzen durch:

$$k(\zeta) = K_2\,|\zeta-\xi_0|^{-\frac{k}{k+2}}\,\varrho^{-\frac{4}{k+2}} \quad \text{für} \quad |\zeta-\xi_0|<r_1<\varrho\,r, \tag{2.33}$$

bzw.

$$k(\zeta) = K_2\,|\zeta-\xi_0|^{-\frac{2k}{k+2}}\,\varrho^{-\frac{4}{k+2}} \quad \text{für} \quad r_1\leq|\zeta-\xi_0|<\varrho\,r.$$

[15]) $m^2\leq 1$ — in Verbindung mit $\delta^2<1$ — garantiert die Beschränktheit von $v_{1,2}(\xi)$ in der Umgebung von ξ_0. Beide Bedingungen könnten durch eine geeignete Modifikation des Abschätzungsverfahrens umgangen werden. Siehe hierzu STALLMANN [*10*], S. 25f. Im übrigen lassen sich diese Bedingungen durch geeignete Wahl von $r(x)$ und $\varphi(x)$ stets erfüllen.

Im zweiten Falle ist $m=\frac{2\delta}{k+2}$, und es ist für $|\zeta-\xi_0|<r_1<\varrho r$

$$(2.34)\qquad \begin{cases} k(\zeta)=K_2|\zeta-\xi_0|^{-\frac{k+2\delta}{k+2}}\varrho^{-\frac{2}{k+2}} & \text{bei} \quad \delta\neq 0 \\ k(\zeta)=K_2|\zeta-\xi_0|^{-\frac{k}{k+2}}\log^2|\zeta-\xi_0|\,\varrho^{-\frac{2}{k+2}} & \text{bei} \quad \delta=0; \end{cases}$$

für $r_1\leq|\zeta-\xi_0|<\varrho r$ ist

$$k(\zeta)=K_2|\zeta-\xi_0|^{-\frac{2k+2}{k+2}}\varrho^{-\frac{2}{k+2}}.$$

Als Integrationswege in der Umgebung $|\xi-\xi_0|<\varrho r$ lassen wir die beiden folgenden Möglichkeiten zu:

2a. *Geraden durch* ξ_0.

2b. *Kreise um* ξ_0.

Auf den Wegen 2a und mit Abschätzung (2.33) gilt:

$$(2.35)\qquad \int^{2a}k(\zeta)\,|d\zeta|\leq 2K_2\varrho^{-\frac{4}{k+2}}\left(\int_0^{r_1}\tau^{-\frac{k}{k+2}}\,d\tau+\int_{r_1}^{\varrho r}\tau^{-\frac{2k}{k+2}}\,d\tau\right).$$

Das erste Integral auf der rechten Seite von (2.35) konvergiert und ist unabhängig von ϱ beschränkt, das zweite ist an der unteren Grenze ebenfalls beschränkt und verhält sich an der oberen Grenze wie

$$\varrho^{-\frac{k-2}{k+2}} \quad \text{bzw. wie} \quad \log\varrho, \quad \text{wenn} \quad k=2 \quad \text{ist.}$$

Es ist also

$$(2.36)\qquad \begin{cases} \int^{2a}k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\varrho^{-\frac{4}{k+2}}\right) & \text{für} \quad k>2 \\ = O\left(\frac{\log\varrho}{\varrho}\right) & \text{für} \quad k=2 \\ = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) & \text{für} \quad k<2. \end{cases}$$

Gilt die Abschätzung (2.34), dann wird

$$(2.37)\qquad \int^{2a}k(\zeta)\,|d\zeta|\leq 2K_2\varrho^{-\frac{2}{k+2}}\left(\int_0^{r_1}\tau^{-\frac{k+2\delta}{k+2}}\,d\tau+\int_{r_1}^{\varrho r}\tau^{-\frac{2k+2}{k+2}}\,d\tau\right).$$

Da $\delta<1$ vorausgesetzt wurde[16]), konvergiert wieder das erste Integral auf der rechten Seite von (2.37) und ist — ebenso wie das zweite an der unteren Grenze — unabhängig von ϱ beschränkt. An der oberen Grenze verhält sich das zweite Integral wie $\varrho^{-\frac{k}{k+2}}$ oder wie $\log\varrho$, wenn $k=0$ ist. Im ganzen

[16]) Falls $\delta=0$ ist, tritt im ersten Integral auf der rechten Seite von (2.37) noch ein logarithmischer Faktor hinzu. Die Konvergenz des Integrals wird dadurch nicht berührt. Entsprechendes gilt auch für (2.39).

verhält sich das Integral (2.37) wie:

$$(2.38)\qquad \begin{cases} \int\limits^{2a} k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\varrho^{-\frac{2}{k+2}}\right) & \text{für } k>0 \\ \qquad\qquad = O\left(\frac{\log \varrho}{\varrho}\right) & \text{für } k=0 \\ \qquad\qquad = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) & \text{für } k<0. \end{cases}$$

Als Integrationsweg 2b, d.h. Kreise um ξ_0 betrachten wir den Kreis $|\xi-\xi_0|=r_2$ mit dem beliebigen Radius r_2, der eine feste Zahl von n Malen durchlaufen werde. Die Abschätzungen (2.33), (2.34) haben alle die Form

$$k(\zeta) = K_2\,|\zeta-\xi_0|^{\alpha}\,\varrho^{\beta}.$$

Es ist also:

$$(2.39)\qquad \int\limits^{2b} k(\zeta)\,|d\zeta| = 2\pi n\,K_2\,r_2^{\alpha+1}\,\varrho^{\beta}\,^{16}).$$

Lassen wir $r_2\to 0$ gehen, so kommen wir in das Gebiet $|\xi-\xi_0|<r_1$. Dort ist $\alpha>-1$, und das Integral verhält sich dort wie $O(\varrho^{\beta})$. Lassen wir dagegen $r_2\to\varrho\,r$ gehen, so kommen wir in das Gebiet $r_1\leq|\xi-\xi_0|<\varrho\,r$, und das Integral wird $O(\varrho^{\alpha+\beta+1})$, das ist aber $O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$. So ist also, unabhängig von dem speziell gewählten r_2

$$(2.40)\qquad \begin{cases} \int\limits^{2b} k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\varrho^{-\frac{4}{k+2}}\right)+O\left(\frac{1}{\varrho}\right), & \text{falls (2.33) gilt, und} \\ \qquad\qquad = O\left(\varrho^{-\frac{2}{k+2}}\right)+O\left(\frac{1}{\varrho}\right), & \text{falls (2.34) gilt.} \end{cases}$$

2.12. *In der Umgebung von* $\xi=\infty$, d.h. für $|\xi|>\varrho R$ wird

$$q(\xi) = \left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{-2} O(1)$$

und wir können $K(\xi,\zeta)$ dort abschätzen durch

$$(2.41)\qquad k(\zeta) = K_3\,|\zeta|^{-2}.$$

Der Teil des Integrationswegs, der in diesem Gebiet liegt, läuft von einem Punkt mit $|\xi|=\varrho R$ aus bis höchstens gegen $\xi=\infty$. Wir dürfen annehmen, daß der Integrationsweg im wesentlichen geradlinig gegen $\xi=\infty$ verläuft. Dann gilt für diesen Teil des Integrationswegs:

$$(2.42)\qquad \int\limits^{3} k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

2.13. Fassen wir alle Teilintegrale zusammen, so können wir $I(\xi)$ abschätzen für $\varrho\to\infty$ durch

$$(2.43)\qquad I(\xi) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi} k(\zeta)\,|d\zeta| = O(\varrho^{\gamma}),$$

wo γ sich aus den Abschätzungen (2.29), (2.36), (2.38), (2.40) und (2.42) bestimmt. In jedem Falle ist $-1\leq\gamma<0$.

Wegen (2.23) folgt hieraus

$$U(\xi) = 1 + O(\varrho^{\gamma}) \tag{2.44}$$

oder schließlich

$$u(\xi) = v_1(\xi)\left(1 + O(\varrho^{\gamma})\right). \tag{2.45}$$

Es läßt sich also — unter den gegebenen Einschränkungen — auf diese Weise das Verhalten von $u(\xi)$ für $\varrho \to \infty$ bestimmen. Im nächsten Kapitel wollen wir die Konsequenzen aufzeigen, die sich hieraus für die Theorie der Polygonabbildung ergeben.

§ 3. Untersuchung der Polygonabbildung mit Hilfe der asymptotischen Integration.

3.1. Wir untersuchen zunächst die Lösungen einer LAMÉschen Differentialgleichung, die wir — entsprechend (2.1) — in der Form schreiben:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{3}{16}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{(x-e_\nu)^2} + \frac{(\frac{5}{4}+\delta^2)\,x}{\prod_{\nu=1}^{3}(x-e_\nu)} + \frac{\varrho^2}{\prod_{\nu=1}^{3}(x-e_\nu)}, \qquad 0 \le \delta^2 \le \tfrac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Um Anschluß sowohl an die WEIERSTRASSsche wie an die LEGENDREsche Theorie der elliptischen Funktionen zu gewinnen, setzen wir:

$$e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \qquad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \qquad e_3 = \frac{1+k^2}{3}. \qquad 0 \le k^2 \le 1. \tag{3.2}$$

Die LIOUVILLE-Transformation entspricht dann im wesentlichen der Einführung der WEIERSTRASSschen Normalform der LAMÉschen Differentialgleichung. Das elliptische Integral

$$\xi(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\varrho}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

hat die Perioden $2\varrho K$, $2i\varrho K'$, wo K, K' die zum Modul k^2 gehörigen vollständigen elliptischen Integrale in der LEGENDREschen Normalform sind. Die Umkehrung hiervon ist die zu diesen Perioden gehörige WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion:

$$x(\xi) = \wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K').$$

Mit

$$u(\xi) = \sqrt[4]{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}\; y(x)$$

geht Differentialgleichung (3.1) über in

$$\frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4}\wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K'). \tag{3.3}$$

Bei geeigneter Festsetzung des Vorzeichens der Wurzel wird die obere x-Halbebene durch $\xi(x)$ auf das Rechteck R

$$-\varrho K \le \Re(\xi) \le 0, \qquad 0 \le \Im(\xi) \le \varrho K'$$

abgebildet. An der Stelle $\xi = 0$ hat

$$Q(\xi) = -\varrho^2 \frac{1-(2\delta)^2}{4} \wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K')$$

einen Pol zweiter Ordnung. Außerhalb einer — mit ϱ *wachsenden* — Umgebung dieser Stelle — etwa für $|\xi| \geq \varrho r$ — ist $Q(\xi)$ in R unabhängig von ϱ beschränkt. In diesem Bereich ist die einfache Differentialgleichung

$$\frac{v''}{v} = 1 \tag{3.4}$$

mit den Lösungen $v_{1,2}(\xi) = e^{\pm\xi}$ als Hilfsdifferentialgleichung zulässig.

Sei zunächst $v_1(\xi) = e^{\xi}$, $v_2(\xi) = e^{-\xi}$. Dann muß wegen (2.26) $\Re(\xi)$ auf dem Integrationsweg eine monoton wachsende Funktion sein. Wählen wir den Anfangspunkt ξ_1 auf dem linken Rand des Rechtecks, so ist es leicht möglich, jeden Punkt des betrachteten Bereichs auf solchen Integrationswegen zu erreichen, die von ξ_1 ausgehend ganz im Innern des Bereichs liegen und auf denen $\Re(\xi)$ monoton wächst. Setzen wir umgekehrt $v_1(\xi) = e^{-\xi}$, $v_2(\xi) = e^{+\xi}$, so muß $\Re(\xi)$ auf dem Integrationsweg monoton fallen, und daher ξ_1 auf dem rechten Rand des Rechtecks — natürlich außerhalb von $|\xi| < \varrho r$ — liegen.

Unter diesen Voraussetzungen können wir die asymptotische Integration durchführen und erhalten für ein Paar von Lösungen der Differentialgleichung (3.3) die Abschätzung:

$$\begin{cases} u_1(\xi) = e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \\ u_2(\xi) = e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

wobei für die Anfangspunkte $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$ auf dem linken bzw. rechten Rand des Rechtecks die Anfangsbedingungen gelten:

$$u_1(\xi_1^{(1)}) = e^{\xi_1^{(1)}}, \qquad u_2(\xi_1^{(2)}) = e^{-\xi_1^{(2)}}$$
$$u_1'(\xi_1^{(1)}) = e^{\xi_1^{(1)}}, \qquad u_2'(\xi_1^{(2)}) = -e^{-\xi_1^{(2)}}.$$

Die Abschätzung ist gültig im Bereich

$$-\varrho K \leq \Re(\xi) \leq 0, \quad 0 \leq \Im(\xi) \leq \varrho K', \quad |\xi| \geq \varrho r.$$

3.2. Wir bilden den Quotienten

$$\eta(\xi) = \frac{u_1(\xi)}{u_2(\xi)} = e^{2\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{3.6}$$

Für hinreichend große ϱ ist $\eta(\xi)$ sicher nicht konstant, $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ also linear unabhängig. Es bildet dann $\eta(\xi)$ das Rechteck R auf ein *Kreisbogenviereck* mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \delta\pi$ ab, insbesondere also die Rechtecksseiten auf gewisse Kreisbogen- bzw. Geradenstücke. Wir wollen die *Rechtecksseiten* vom Nullpunkt ausgehend der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnen, die zugehörigen

Seiten des Kreisbogenvierecks mit a^*, b^*, c^*, d^* (s. Fig. 1). Die genaue Gestalt des Kreisbogenvierecks hängt noch von den Parametern k^2 und ϱ ab und soll jetzt näherungsweise bestimmt werden.

Wir gehen dazu aus von der Abschätzung (3.6); danach verhält sich $\eta(\xi)$ in R außerhalb von $|\xi|<\varrho r$ wie $e^{2\xi}$. Wir dürfen annehmen, daß die Seiten b und c des Rechtecks außerhalb von $|\xi|<\varrho r$ liegen, so daß (3.6) auf ihnen gilt. Durch $e^{2\xi}$ werden diese Seiten auf den Strahl $\arc \eta = 2\varrho K'$, $1 \leq |\eta| \leq e^{-2\varrho K}$ und den Kreis $|\eta| = e^{-2\varrho K}$, $0 \leq \arc \eta \leq 2\varrho K'$ abgebildet. In einer, durch den Faktor $\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)$ bestimmten *Umgebung dieser Kreise* müssen also die Viereckseiten b^* und c^* liegen, die hierdurch näherungsweise festgelegt sind.

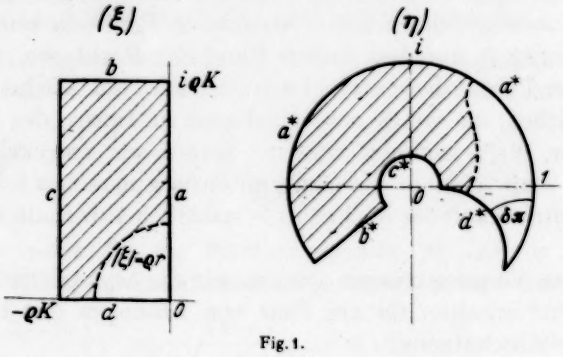

Fig. 1.

Nicht so einfach ist die Lage der Seiten a^* und d^* zu bestimmen, weil (3.6) jeweils nur auf einem Teil der Rechtecksseiten a und d gültig ist. Betrachten wir zunächst die Seite a; das Stück von a, das außerhalb von $|\xi|<\varrho r$ liegt, wird durch $e^{2\xi}$ auf den Einheitskreis mit $2\varrho r \leq \arc \eta \leq 2\varrho K'$ abgebildet; das entsprechende Stück von a^* muß also in einer Umgebung dieses Kreisbogens liegen. Ist ϱ so groß, daß der betreffende Bogen bereits eine *volle Kreisperipherie* umfaßt, so kann auch der restliche Teil von a^* sich nicht wesentlich vom Einheitskreis entfernen.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse bei der Seite d^*. Der Teil von d, auf dem $|\xi| \geq \varrho r$ ist, wird durch $e^{2\xi}$ auf die reelle Achse mit $e^{-2\varrho K} \leq \eta \leq e^{-2\varrho r}$ abgebildet, also auf ein Stück, das mit wachsendem ϱ beliebig klein wird. Man kann daher aus (3.6) zwar näherungsweise die *Tangente* von d^* in dem einem Endpunkt bestimmen, nicht aber den weiteren Verlauf dieses Kreisbogens. Dieser wird vielmehr festgelegt durch die *Größe des Winkels* zwischen a^* und d^*, die ja in (3.6) nicht auftritt. Berücksichtigt man, daß dieser Winkel die Größe $\delta\pi$ hat, so läßt sich der zu d^* gehörige Kreis leicht näherungsweise konstruieren; er geht mit $\varrho \to \infty$ in den Kreis $|2\eta \cos \pi\delta + i| = 1$ über.

Es sind jetzt also die Kreise, auf denen a^* und d^* liegen, näherungsweise bekannt. Die Seiten selbst erhalten wir, wenn wir die durch (3.6) gegebenen Teilstücke von a^* und d^* auf diesen Kreisen bis zum Schnittpunkt hin verlängern, wobei noch die Überlagerungsverhältnisse in der η-Ebene zu berücksichtigen sind. Man erhält so schließlich das in Fig. 1 gezeigte Kreisbogenviereck.

3.3. Dieses auf indirektem Wege erschlossene Verhalten der Funktion $\eta(\xi)$ in der Umgebung des Nullpunktes wird bestätigt durch Abschätzungen, die im ganzen Rechteck, also auch für $|\xi| < \varrho\, r$ gültig sind. Wir wählen hierfür die Hilfsdifferentialgleichung

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4} \cdot \frac{1}{\xi^2}, \tag{3.7}$$

deren Lösungen sich explizit angeben lassen. Es ist

$$v(\xi) = \sqrt{\xi}\, Z_\delta(i\,\xi),$$

wo Z_δ eine beliebige Zylinderfunktion der Ordnung δ bedeutet. Da sich (3.7) für $|\xi| \geq \varrho\, r$ ebenfalls durch (3.4) abschätzen läßt, muß es solche Lösungen $v_{1,2}(\xi)$ geben, die sich für große ξ wie die Exponentialfunktion verhalten. Es sind dies die Lösungen

$$\begin{cases} v_1(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi\xi}{2i}}\, e^{i\pi\frac{1+2\delta}{4}} H_\delta^{(1)}(-i\,\xi) \sim e^{\xi} \\ v_2(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi\xi}{2i}}\, e^{-i\pi\frac{1+2\delta}{4}} H_\delta^{(2)}(-i\,\xi) \sim e^{-\xi}, \end{cases} \tag{3.8}$$

wo $H_\delta^{(1)}$, $H_\delta^{(2)}$ die HANKELschen Funktionen sind[17]).

Für diese Funktionen und die vorhin gemachten Voraussetzungen über die Integrationswege sind die Bedingungen (2.26) erfüllt, sofern $\delta^2 \leq \frac{1}{4}$ ist[18]). Es gelten dann die Abschätzungen:

$$\begin{cases} u_1(\xi) = v_1(\xi)\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right)\right) \\ u_2(\xi) = v_2(\xi)\left(1 + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right)\right), \end{cases} \tag{3.9}$$

wo $v_{1,2}(\xi)$ die Lösungen (3.8) der Differentialgleichung (3.7) sind. Für den Quotienten $\eta(\xi)$ gilt:

$$\eta(\xi) = \frac{u_1(\xi)}{u_2(\xi)} = \frac{v_1(\xi)}{v_2(\xi)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{3.10}$$

Für $|\xi| \geq \varrho\, r$ stimmen diese Abschätzungen wegen (3.8) mit (3.5), (3.6) überein. In der Umgebung von $\xi = 0$ wird die durch a und d gebildete Ecke des Rechtecks von dem *Quotienten der Zylinderfunktionen* (3.8) abgebildet auf die durch die Kreisbögen $|\eta| = 1$ und $|2\eta\cos\pi\delta + i| = 1$ bei $\eta = e^{i\pi(\delta - \frac{1}{2})}$ gebildete Ecke. Durch diese Kreisbögen werden also die Viereckseiten a^* und d^* angenähert, was in vollem Einklang zu unseren bisherigen Untersuchungen steht.

3.4. Von Interesse ist der Fall, daß zwei oder alle drei Verzweigungsstellen e_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ in der x-Ebene zusammenrücken. Es gehe etwa in

[17]) WATSON [*11*], S. 196—198.

[18]) Für $\delta = \frac{1}{2}$ wird $v_{1,2}(\xi) = e^{\pm\xi}$ exakt. Für $\delta^2 > \frac{1}{4}$ muß eine andere LIOUVILLE-Transformation zugrunde gelegt werden. S. STALLMANN [*11*], S. 42. Wir kommen in einer II. Mitteilung noch darauf zu sprechen.

(3.2) $k^2 \to 0$ oder $k^2 \to 1$. Dann wird $e_2 = e_3$ bzw. $e_1 = e_2$ und Differentialgleichung (3.1) geht über in eine RIEMANNsche Differentialgleichung:

$$(3.11)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y''}{y} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\frac{3}{4}}{(x-\frac{2}{3})^2} + \dfrac{1-\delta_0^2}{(x+\frac{1}{3})^2} - \dfrac{\frac{3}{4}-\delta_0^2+\delta^2}{(x-\frac{2}{3})(x+\frac{1}{3})}\right) \\ \qquad\qquad \text{mit} \quad \delta_0^2 = -\varrho^2 - \dfrac{1-(2\delta)^2}{12} \end{array} \right.$$

oder

$$(3.12)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y''}{y} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\frac{3}{4}}{(x+\frac{2}{3})^2} + \dfrac{1-\delta_0^2}{(x-\frac{1}{3})^2} - \dfrac{\frac{3}{4}-\delta_0^2+\delta^2}{(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{3})}\right) \\ \qquad\qquad \text{mit} \quad \delta_0^2 = \varrho^2 - \dfrac{1-(2\delta)^2}{12}. \end{array} \right.$$

Der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (3.11), (3.12) bildet die obere Halbebene auf ein *Kreisbogendreieck* mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\delta_0\pi$ $\delta\pi$ ab.

Studieren wir den entsprechenden Vorgang in der ξ-Ebene: Mit $k^2 \to 0, 1$ wächst das eine Seitenpaar des Rechtecks über alle Grenzen und das Rechteck geht über in einen *Halbstreifen*

$$\Im(\xi) \geq 0, \quad -\varrho\frac{\pi}{2} \leq \Re(\xi) \leq 0 \qquad \text{oder} \qquad \Re(\xi) \leq 0, \quad 0 \leq \Im(\xi) \leq \varrho\frac{\pi}{2}.$$

Die Differentialgleichung (3.3) wird dann

$$(3.13)\qquad \frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4\varrho^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\xi}{\varrho}} - \frac{1}{3}\right)$$

oder

$$(3.14)\qquad \frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4\varrho^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\xi}{\varrho}} + \frac{1}{3}\right).$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen lassen sich wieder durch (3.5) bzw. (3.10) abschätzen, wobei jetzt natürlich der Halbstreifen statt des Rechtecks zugrunde zu legen ist.

Im Falle der Differentialgleichung (3.13) rückt bei dem Grenzübergang $k^2 \to 0$ die Rechtecksseite b ins Unendliche und geht dabei verloren. Die entsprechende Seite b^* in der η-Ebene wird durch den Strahl $\arc \eta = 2\varrho K'$ angenähert, der sich mit $k^2 \to 0$ unendlich oft um den Nullpunkt dreht. Hierdurch wird das erwähnte Kreisbogendreieck erzeugt, dessen eine Ecke wegen des *imaginären Winkels* $\delta_0\pi$ durch einen sich unendlich oft um den Nullpunkt herumwindenden *Kreisring* gebildet wird (Fig. 2). Auf Grund der Abschätzungen (3.10) liegen seine drei Seiten a^*, c^* und d^* näherungsweise auf den Kreisen $|\eta| = 1$, $|\eta| = e^{-\pi\varrho}$ und $|2\eta\cos\pi\delta + i| = 1$ [19].

[19]) Man beachte, daß die drei genannten Kreise nicht exakt, sondern nur näherungsweise ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\delta\pi$, $\delta_0\pi$ beranden. Insbesondere hat der Winkel zwischen $|\eta| = 1$ und $|\eta| = e^{-\pi\varrho}$ die Größe $i\pi\varrho$ und nicht $\pi\delta_0$; jedoch ist $\delta_0 = i\varrho + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ für $\varrho \to \infty$

Im Falle der Differentialgleichung (3.14) rückt mit $k^2 \to 1$ die Rechtecksseite c ins Unendliche und die zugehörige Seite c^* in der η-Ebene zieht sich auf den Nullpunkt zusammen. Hierdurch entsteht ein Kreisbogendreieck, dessen Seiten a^*, b^* und d^* näherungsweise auf den Kreisen $|\eta| = 1$, $|2\eta \cos \pi\,\delta + i| = 1$ und dem Strahl $\arc \eta = \pi\,\varrho$ liegen (Fig. 3).

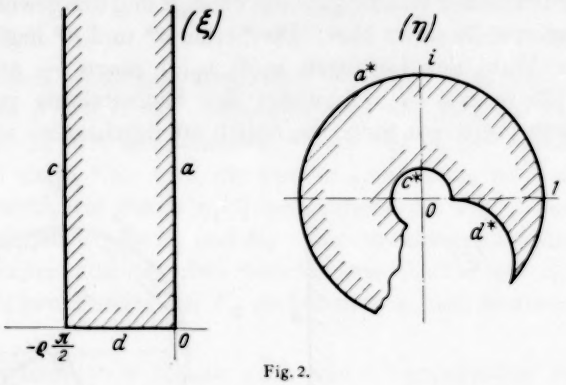

Fig. 2.

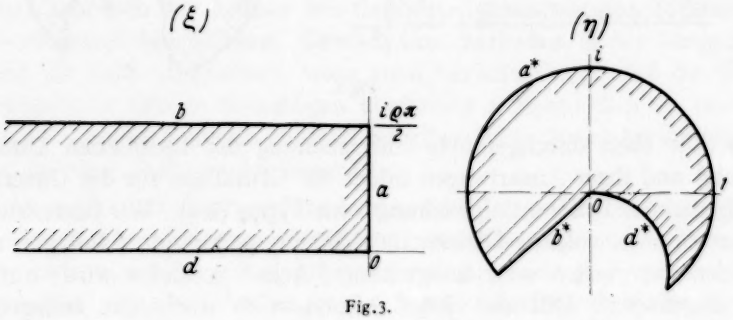

Fig. 3.

3.5. Rücken in Differentialgleichung (3.1) alle drei Verzweigungsstellen e_ν zusammen — wobei (3.2) natürlich nicht mehr gültig bleiben kann —, so tritt ein Konfluenzphänomen auf, wie wir es in § 1.4 schon betrachtet haben. Für $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ wird (3.1)

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1+\delta^2}{x^2} - \frac{\varrho^2}{x^3}\right). \tag{3.15}$$

Dies ist eine *konfluente hypergeometrische* Differentialgleichung; sie hat bei $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit und bei $x = 0$ eine wesentliche Singularität.

Weiterhin wird $\xi(x) = \dfrac{-2\varrho}{\sqrt{x}}$; das Rechteck artet also in den *Quadranten* $\Re(\xi) \leq 0$, $\Im(\xi) \geq 0$ aus. Die Differentialgleichung (3.3) geht über in

$$\frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4} \cdot \frac{1}{\xi^2}, \tag{3.16}$$

die wir oben als Hilfsdifferentialgleichung (3.7) einführten.

Zum Studium der konformen Abbildung des Quotienten $\eta(\xi)$ zweier Lösungen von (3.16) beachten wir, daß sowohl die Rechtecksseite b wie c ins Unendliche rückt, wenn $\varepsilon \to 0$ geht. In der η-Ebene zieht sich dementsprechend die Seite c^* auf den Nullpunkt zusammen, während der zu b^* gehörige Strahl sich unendlich oft um den Nullpunkt dreht. Hierdurch wird an der Stelle $\eta = 0$ ein logarithmischer Windungspunkt erzeugt und das gewöhnliche Polygon geht in ein *außergewöhnliches* über. Die Seiten a^* und d^* liegen — und zwar bei geeigneter Wahl der Lösungen $u_1(\xi), u_2(\xi)$ *genau* — auf den Kreisen $|\eta| = 1$ und $|2\eta \cos \pi\delta + i| = 1$, wobei der Einheitskreis von $e^{i\pi(\delta-\frac{1}{2})}$ aus in mathematisch positivem Sinne unendlich oft durchlaufen wird (Fig. 4).

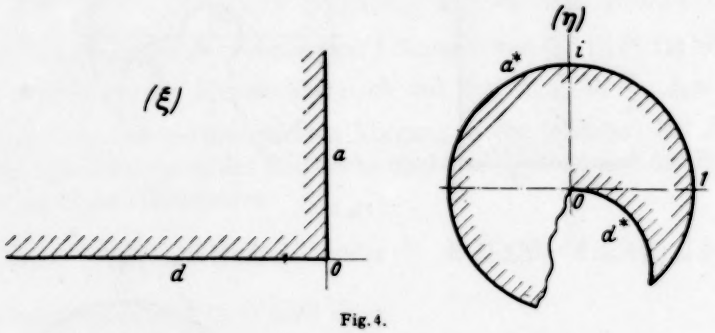

Fig. 4.

3.6. Die eben durchgeführte Untersuchung der LAMÉschen Differentialgleichung und ihrer Ausartungen bildet die Grundlage für die Untersuchung der allgemeinen Differentialgleichung vom Typus (2.4). Wir bemerkten oben, daß das zu einer solchen Differentialgleichung gehörende ξ-Polygon nur von Parallelen zur reellen oder imaginären ξ-Achse berandet wird; auf Grund dieser Eigenschaft läßt sich jedes ξ-Polygon in Rechtecke zerlegen (oder, soweit das ξ-Polygon ins Unendliche reicht, in die vorher betrachteten Halbstreifen und Quadranten), und zwar so, daß in jeweils *höchstens einer Ecke* eines solchen Teilrechtecks eine *singuläre Stelle* der Differentialgleichung (2.4) liegt. Wir können dann in jedem Teilrechteck die Differentialgleichung (2.4) durch eine Hilfsdifferentialgleichung vom Typus (3.4) oder (3.7) annähern, die Lösungen von (2.4) also in solch einem Teilbereich durch Exponential- oder Zylinderfunktionen abschätzen.

Jedes der Teilrechtecke wird gemäß den vorangegangenen Untersuchungen auf Grund dieser Abschätzungen durch $\eta(\xi)$ auf einen Bereich abgebildet, der näherungsweise die Gestalt eines gewissen Kreisbogenvierecks hat. Es ist also das gesuchte Polygon in derselben Weise aus solchen *Teilvierecken* zusammengesetzt, wie das ξ-Polygon aus *Teilrechtecken*. Dabei läßt sich die ungefähre Gestalt des einzelnen Vierecks ohne weiteres aus den Abschätzungen entnehmen; das Zusammensetzen dieser Teilvierecke kann auf Grund einer Überlegung geschehen, die im wesentlichen darauf hinauskommt, daß zwei benachbarte Teilvierecke an der gemeinsamen Kante „*zusammenpassen*" müssen.

Es seien etwa R_1 und R_2 zwei benachbarte Teilrechtecke in der ξ-Ebene. In jedem dieser Teilrechtecke haben wir Differentialgleichung (2.4) asymptotisch abgeschätzt und als Ergebnis in R_1 die Funktionswerte $\eta_1(\xi)$ und in R_2 die Funktionswerte $\eta_2(\xi)$ erhalten. Zwischen $\eta_1(\xi)$ und $\eta_2(\xi)$ muß eine lineare Verbindung bestehen,

$$\eta_1 = \frac{a_{11}\eta_2 + a_{12}}{a_{21}\eta_2 + a_{22}}, \tag{3.17}$$

und diese läßt sich berechnen, wenn man die Werte von $\eta_1(\xi)$ und $\eta_2(\xi)$ auf der *gemeinsamen Kante* kennt. Bekanntlich ist die Relation (3.17) eindeutig bestimmt, wenn zu *drei verschiedenen Werten* von η_1 die zugehörigen Werte von η_2 gegeben sind. Nun wird die gemeinsame Kante zwischen R_1 und R_2 durch $\eta_1(\xi)$ sowohl wie durch $\eta_2(\xi)$ näherungsweise auf gewisse *Kreisbögen* abgebildet — nennen wir sie K_1 und K_2 — die punktweise aufeinander bezogen sind. Wir brauchen also nur drei verschiedene Punkte auf K_1 auszuwählen und die zugehörigen Punkte auf K_2 zu bestimmen, und können daraus (3.17) berechnen.

Mit Hilfe solcher — natürlich auch nur näherungsweise berechneter — Relationen, läßt sich der Aufbau des Gesamtpolygons aus den Teilvierecken ohne Schwierigkeit durchführen. Gewisse Unsicherheiten in der Abschätzung lassen sich oft noch ausgleichen, wenn man berücksichtigt, daß die Ränder des ξ-Polygons in exakte Kreisbögen übergehen müssen; dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn an ein und derselben Seite des zu konstruierenden Polygons mehrere Teilvierecke liegen[20]).

Mit diesen Methoden läßt sich nicht nur verhältnismäßig leicht im Einzelfall die Gestalt eines Polygons abschätzen, wenn die zugehörige Differentialgleichung bzw. das ξ-Polygon gegeben ist, sondern wir gewinnen auch eine gute Übersicht über die Veränderungen in der Gestalt eines Polygons bei Änderung des zugehörigen ξ-Polygons. Insoweit wir die Abhängigkeit des ξ-Polygons von den Koeffizienten der Differentialgleichung kennen, gewinnen wir dadurch auch einen Einblick in die Zusammenhänge zwischen Differentialgleichung und Gestalt des Polygons. Das *Parameterproblem* der Differentialgleichung ist damit zurückgeführt auf das einfachere *Parameterproblem* für spezielle SCHWARZ-CHRISTOFFELsche Integrale. Dies Parameterproblem ist freilich auch noch nicht allgemein gelöst, doch sind die Verhältnisse hier wesentlich durchsichtiger, so daß wenigstens Aussagen *qualitativer* Art ohne umfangreiche Rechnungen gemacht werden können.

3.7. Ein gutes Beispiel herfür bietet die Untersuchung des schon in § 1.4 besprochenen Grenzübergangs der *Konfluenz*. Wir setzen im Anschluß an (1.6) und (2.1):

$$R_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x) = -2\left(r_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x) + \varrho^2 \varphi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)\right), \tag{3.18}$$

[20]) Eine Reihe von Beispielen für solche Polygonkonstruktionen findet man bei STALLMANN [*10*]. Eine ausführliche Durchrechnung einzelner Beispiele soll eine II. Mitteilung bringen.

wobei auch für $\varepsilon_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2 \dots n)$ $r_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ keine Pole von höherer als zweiter Ordnung haben soll. Wir können dann $\varphi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ schreiben als

$$\varphi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x) = \frac{\varphi^*_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)}{\prod_{\varkappa=1}^{n} (x - x_0 - \varepsilon_\varkappa)}, \tag{3.19}$$

wo $\varphi^*_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ in der Umgebung von x_0 regulär ist.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die $\varepsilon_\varkappa$ alle voneinander verschieden sind; dann ist das Integral

$$\xi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x) = \varrho \int_{x_1}^{x} \sqrt{\varphi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)}\, dx \tag{3.20}$$

für $\varepsilon_\varkappa \neq 0$ in der Umgebung von x_0 beschränkt. Der zugehörige Teil des ξ-Polygons werde dann wie besprochen in Rechtecke eingeteilt, die dann alle zunächst *endliche* Größe haben. Mit $\varepsilon_\varkappa \to 0$ wird das ξ-Polygon dort *unendlich* und die betreffenden Teilrechtecke arten aus in *Halbstreifen* oder *Quadranten*. Das Polygon in der η-Ebene ist dann an der betreffenden Stelle nicht mehr aus *Teilvierecken* zusammengesetzt, sondern aus *Kreisbogendreiecken* und solchen *außergewöhnlichen Polygonen*, wie wir sie im Zusammenhang mit Differentialgleichung (3.16) in Fig. 4 dargestellt haben. Man sieht leicht, daß genau $n-2$ solche *außergewöhnliche Polygone* als Teilpolygone auftreten. Die zugehörigen *logarithmischen Windungspunkte* fallen bis auf höchstens zwei je paarweise zusammen. Alle weiteren Eigenschaften des Polygons hängen noch von der speziellen Gestalt des ξ-Polygons ab und können leicht aus ihr entnommen werden[21]).

3.8. Die Anwendung unseres Abschätzungsverfahrens unterliegt allerdings noch einer Einschränkung: Wir hatten die Näherungswerte für die Lösungen der Differentialgleichung (2.1) als *asymptotische Abschätzungen* für $\varrho \to \infty$ gewonnen, sie gelten also nur für *hinreichend große* ϱ. Für unser eben diskutiertes Verfahren ist gleichbedeutend damit die Forderung, daß die *singulären Stellen im ξ-Polygon hinreichend weit voneinander entfernt* sein müssen, denn nur dann überwiegt in den einzelnen Teilrechtecken jeweils der Einfluß der zu diesem Rechteck gehörigen Singularität und $q(\xi)$ wird hinreichend klein. Wenn wir also mit unseren Methoden Gestaltänderungen eines Kreisbogenpolygons studieren wollen, wie sie durch Änderung des zugehörigen ξ-Polygons hervorgerufen werden, dann werden wir solche Änderungen ausschließen müssen, bei denen sich die Singularitäten im ξ-Polygon einander *unbegrenzt nähern*.

Es ist jedoch vielfach noch möglich, auch solche Fälle zu untersuchen, wenn wir, statt der bisher benutzten, kompliziertere Hilfsdifferentialglei-

[21]) Diese asymptotischen Abschätzungen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen enthalten auch in sich die Hauptglieder der bekannten Entwicklungen von THOMÉ für diesen Fall, und zwar in einer Art, der die Bedeutung dieser Entwicklungen sehr klar hervortreten läßt. Siehe etwa BIEBERBACH [1], S. 174f.

chungen und Hilfsfunktionen zugrunde legen. Prinzipiell wird man dabei ausgehen von einer bekannten Differentialgleichung vom Typus (2.1) und auf sie die LIOUVILLE-Transformation (2.3) ausüben. Wenn das so erhaltene ξ-Polygon in einem Teilstück mit dem vorgegebenen ξ-Polygon übereinstimmt — wobei natürlich auch die *Singularitäten* übereinstimmen müssen —, dann wird man solche kompliziertere Teilstücke in der gleichen Weise behandeln können, wie bisher die *Teilrechtecke*. Das vollständige Polygon in der η-Ebene wird dann nicht allein aus *Kreisbogenvierecken* sondern aus *komplizierteren Teilpolygonen* zusammengesetzt sein.

Wesentlich ist dabei, daß an *„Nahtstellen"*, d.h. dort, wo im ξ-Polygon zwei Teilstücke zusammenstoßen, die Funktionen $P(\xi)$ und $Q(\xi)$ hinreichend klein sind. Es gehen nämlich dann die Abschätzungen, die in einem Teilstück gewonnen wurden, ohne weiteres in die Abschätzungen des anderen Teilstücks über, weil sich an solchen Nahtstellen die Lösungen von (2.4) wie die Exponentialfunktion verhalten. Hinreichend weit von solchen Nahtstellen entfernt dürfen dann Singularitäten in beliebiger Zahl und Verteilung auftreten.

Wir werden uns natürlich auf solche Hilfsdifferentialgleichungen beschränken müssen, deren Lösungen man im nötigen Umfang beherrscht. Es kommen hier im wesentlichen die *hypergeometrische* Differentialgleichung und ihre *konfluenten Ausartungen* in Betracht, d.h. die durch eine LIOUVILLE-Transformation (2.3) hieraus entstehenden Differentialgleichungen. Die bisher betrachteten Differentialgleichungen der Exponential- und der Zylinderfunktionen gehören ja auch in diese Klasse. Eine systematische Untersuchung solcher Hilfsdifferentialgleichungen soll in einer II. Mitteilung durchgeführt werden.

Zur historischen Entwicklung ist noch zu bemerken, daß die asymptotische Integration zunächst nur mit Hilfe der Exponentialfunktion durchgeführt wurde[22]; später zog man Spezialfälle der Zylinderfunktionen heran[23]. Ein Spezialfall der konfluenten hypergeometrischen Funktionen als Hilfsfunktion wird von R. E. LANGER untersucht und zur Abschätzung der MATHIEUschen Differentialgleichung benutzt[24]. Die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung ist in diesem Zusammenhang bisher noch nicht betrachtet worden.

Literatur.

[1] BIEBERBACH, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. — [2] HORN, J.: Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. Math. Ann. **52**, 271—292 (1899). — [3] LANGER, R. E.: The asymptotic solutions of ordinary differential equations of the second order, with special reference to the Stokes phenomenon. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 545—582 (1934). — [4] LANGER, R. E.: On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 23—64 (1931). — [5] LANGER, R. E.: On the asymptotic solutions

[22] Als grundlegende Arbeit wäre hier HORN [2] zu nennen.

[23] Einen zusammenfassenden Bericht gibt LANGER [3].

[24] LANGER [6] und [7].

of differential equations, with an application to the Bessel functions of large complex order. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 447—480 (1932). — [*6*] LANGER, R. E.: The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order. Trans Amer. Math. Soc. **36**, 90—106 (1934). — [*7*] LANGER, R. E.: The solutions of the Mathieu equation with a complex variable and at least one parameter large. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 637—695 (1934). — [*8*] LANGER, R. E.: On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes phenomenon about a singular point. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 397—416 (1935). — [*9*] NEVANLINNA, R.: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. Upsala **58**, 295—373 (1932). — [*10*] STALLMANN, F.: Zum Parameterproblem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Mitt. Math. Seminar Gießen **43** (1952). — [*11*] WATSON, G. N.: Bessel Functions. Cambridge 1922.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 13. Januar 1954.)

RIEGER, G. J.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 213—234 (1954)

Zu Linniks Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$.

Von

G. J. RIEGER.

Bekanntlich hat D. HILBERT [4] [1]) im Jahre 1909 als erster die von E. WARING 1770 aufgestellte Vermutung bewiesen:

Jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von n-ten Potenzen natürlicher Zahlen darstellen, so daß deren Anzahl $g(n)$ unterhalb einer Schranke bleibt, die nur von n, nicht dagegen von der darzustellenden Zahl abhängt (Satz von WARING-HILBERT).

Man bezeichnet gewöhnlich mit $g(n)$ die bei festem n kleinstmögliche derartige Anzahl.

Man kann diesen Satz auch so formulieren:

Die n-ten Potenzen (der natürlichen Zahlen) bilden eine Basis (der natürlichen Zahlen). Ihre Ordnung ist $g(n)$.

Gegen 1920 haben die Herren G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD [3] unter Verwendung von funktionentheoretischen Sätzen (CAUCHYscher Integralsatz) einen völlig neuen Zugang zu diesem Satz gefunden. Eine wesentliche Rolle spielt in ihren Überlegungen eine noch zu definierende Größe $r_k(m)$, die die Lösungsanzahl einer gewissen diophantischen Gleichung angibt. Mit Hilfe der „*singular series*" erhalten sie einen asymptotischen Ausdruck für $r_k(m)$.

Im Jahre 1942 hat nun Herr J. V. LINNIK [10] eine neue Lösung des WARINGschen Problems gegeben, bei der die Größe $r_k(m)$ wieder auftritt. Die Leistung von Herrn LINNIK besteht vor allem darin, daß es ihm gelang, $r_k(m)$ auf vollständig elementarem Wege nach oben abzuschätzen, und zwar mit der gleichen Größenordnung, wie sie in der HARDY-LITTLEWOODschen Lösung auftritt. Daraus folgt dann die Aussage des obigen Satzes in einfacher Weise.

Die Lösung von Herrn LINNIK ist nicht die erste elementare Lösung; eine solche lag bereits 1912 vor (vgl. [2], [12]).

Während sich aus dem HILBERTschen Beweis nur eine sehr grobe Schranke für $g(n)$ herleiten ließ (vgl. [14]), konnte aus dem HARDY-LITTLEWOODschen Beweis eine sehr genaue angegeben werden:

Jede hinreichend große Zahl läßt sich als Summe von höchstens $(n-2)\,2^{n-1}+5$ n-ten Potenzen schreiben, d.h.

$$G(n) \leq (n-2)\,2^{n-1}+5.$$

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Dieses Ergebnis wurde in der Folgezeit noch verbessert, so daß heute der genaue Wert der Konstanten $g(n)$, $G(n)$ für eine Reihe von Werten von n bekannt ist.

Da der LINNIKschen Lösung der gleiche Beweisgedanke wie der HARDY-LITTLEWOODschen zugrunde liegt, drängt sich die Frage auf, ob sich auch aus dem (an entscheidender Stelle indirekt geführten) LINNIKschen Beweis eine obere Schranke für $g(n)$ konstruieren läßt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine obere Abschätzung für $g(n)$ an Hand des LINNIKschen Beweises anzugeben. Unser Ergebnis wird wesentlich allgemeiner sein; insbesondere werden wir für die KAMKEsche [7] und für die SCHNIRELMANNsche Verallgemeinerung des WARING-HILBERTschen Satzes [15] elementare Beweise geben (vgl. [13]) und das zugehörige $g(n)$ zum ersten Male auf elementarem Wege abschätzen. Für die KAMKEsche Verallgemeinerung ist eine solche Abschätzung z. B. von L. K. HUA [5], [6] auf analytischem Wege gegeben worden.

Die vorliegende Arbeit schließt sich so weit als möglich an die von Herrn LINNIK [10] an. An vielen Stellen hätten wir uns mit einem Verweis auf [10] begnügen können, doch wäre das mehr störend als förderlich gewesen. In § 1 geben wir fünf Lemmata über lineare Gleichungen wieder, mit deren Hilfe in § 2 das Hauptlemma bewiesen wird. In § 3 wird ein einfacher Hilfssatz über Dichten von Folgen bewiesen. Die Sätze 1 und 2 von § 4 gestatten dann unmittelbar die Abschätzung von $g(n)$.

Alle Beweise und Abschätzungen sind in allen Teilen elementar, d.h. es werden nur arithmetische Operationen ausgeführt.

§ 1. Fünf Lemmata über lineare Gleichungen.

In diesem Paragraphen werden einige Abschätzungen für die Anzahl der Lösungen linearer Gleichungen gegeben. Da die Lemmata 1, 4 und 5 keine „Konstanten" $c(n)$ enthalten, können wir sie wörtlich aus [10] übernehmen und auf einen Beweis verzichten. Die Lemmata 2 und 3 müssen wir hingegen hier beweisen, da wir für unsere Zwecke explizite Ausdrücke für die „Konstanten" $c(n)$ brauchen.

Lemma 1. *Sind in der Gleichung*

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 = m \tag{1}$$

a_1, a_2, m *ganze Zahlen mit*

$$|a_2| \leq |a_1| \leq A, \qquad (a_1, a_2) = 1,$$

so übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen

$$|z_1| \leq A, \quad |z_2| \leq A$$

genügenden Lösungen von (1) *nicht*

$$\frac{3A}{|a_1|}.$$

Beweis. [2]).

Lemma 2. *Sind in der Gleichung*

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_l z_l = m \tag{2}$$

die a_λ und m ganze Zahlen mit

$$|a_\lambda| \leq A, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_l) = 1 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

so übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen

$$|z_\lambda| \leq A \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{3}$$

genügenden Lösungen von (2) nicht

$$3^{l-1}(l-1)!\,\frac{A^{l-1}}{H}$$

mit

$$H = \max_{\lambda=1}^{l} |a_\lambda|.$$

Beweis. Wegen Lemma 1 ist Lemma 2 für $l=2$ bereits bewiesen. Wir wollen daher voraussetzen, daß $l \geq 3$ ist und daß das Lemma 2 für $l-1$ Unbekannte schon feststeht. Da die Reihenfolge der Numerierung gleichgültig ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $H = |a_l|$ annehmen.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. $a_1 = a_2 = \cdots = a_{l-1} = 0$. Wegen $(a_1, a_2, \ldots, a_l) = 1$ ist $|a_l| = H = 1$, so daß die gegebene Gleichung die Form

$$\pm z = m$$

erhält. Offenbar kann in dieser Gleichung jede der Unbekannten $z_1, z_2, \ldots, z_{l-1}$ einen beliebigen ganzzahligen Wert aus $(-A, A)$[3]), im ganzen also höchstens $2A + 1 \leq 3A$ Werte annehmen, z_l hingegen höchstens einen. Daher übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen (3) genügenden Lösungen der vorgegebenen Gleichung nicht

$$(3A)^{l-1} < 3^{l-1}(l-1)!\,\frac{A^{l-1}}{H},$$

womit das Lemma für diesen Fall bewiesen ist.

2. Ist mindestens eine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ von Null verschieden, so existiert $(a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}) = \delta$. Wir bezeichnen mit

$$H' = \max_{\lambda=1}^{l-1} \frac{|a_\lambda|}{\delta}.$$

Es mögen jetzt die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_l$ der vorgegebenen Gl. (2) und den Ungleichungen (3) genügen. Wir setzen

$$\frac{a_1}{\delta} z_1 + \cdots + \frac{a_{l-1}}{\delta} z_{l-1} = m'. \tag{4}$$

[2]) Vgl. [1], 38.

[3]) Die Grenzen sind jeweils eingeschlossen.

Dabei ist offenbar

$$\delta m' + a_l z_l = m \tag{5}$$

und

$$|\delta m'| \leq \sum_{\lambda=1}^{l-1} |a_\lambda|\,|z_\lambda| \leq (l-1)\,\delta H' A,$$

woraus

$$|m'| \leq (l-1)\,H' A$$

folgt.

In (4) ist offenbar $\delta \leq |a_l|$ und $(\delta, a_l) = 1$, da wir andernfalls $(a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l) > 1$ hätten. Daher übertrifft die Anzahl der Lösungen von (5) in den Unbekannten m', z_l mit

$$|m'| \leq (l-1)\,H' A, \qquad |z_l| \leq A < (l-1)\,H' A$$

wegen Lemma 1 nicht

$$\frac{3(l-1)\,H' A}{|a_l|}.$$

Für dasselbe m' hat (4) auf Grund des Lemmas 2 für $l-1$ Unbekannte höchstens

$$3^{l-2}(l-2)!\,\frac{A^{l-2}}{H'}$$

Lösungen in ganzen z_λ mit $|z_\lambda| \leq A$ $(\lambda = 1, \ldots, l-1)$.

Also übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen (3) genügenden Lösungen $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ von (2) nicht

$$\frac{3(l-1)\,H' A}{|a_l|} \cdot 3^{l-2}(l-2)!\,\frac{A^{l-2}}{H'} = 3^{l-1}(l-1)!\,\frac{A^{l-1}}{H},$$

womit das Lemma 2 auch für diesen Fall bewiesen ist.

Lemma 3. *Ist $l > 2$ und $1 \leq A \leq B \leq c_1 A^{l-1}$, so übertrifft die Summe der Anzahlen der Lösungen z_λ mit*

$$|z_\lambda| \leq B \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

für alle Gleichungen von der Gestalt

$$a_1 z_1 + \cdots + a_l z_l = m \tag{6}$$

mit

$$|a_\lambda| \leq A \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

nicht

$$\max\left(3^l c_1, 3^{2l+1}(l-1)!\right)(A B)^{l-1}.$$

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. $a_1 = a_2 = \cdots = a_l = 0$. Da in diesem Falle jedes z_λ höchstens $2B + 1 \leq 3B$ verschiedene Werte annehmen kann, übertrifft die Anzahl der Systeme $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ nicht

$$(3B)^l \leq 3^l c_1 (A B)^{l-1}.$$

2. Ist mindestens eine der Zahlen a_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ von Null verschieden, so existiert $(a_1, a_2, \ldots, a_l) = \delta$. Es sei zunächst $\delta = 1$ und

$$H = \max_{\lambda=1}^{l} |a_\lambda| .$$

Offenbar ist $1 \leq H \leq A$. Also läßt sich sicher eine ganze Zahl $n \geq 0$ angeben derart, daß

$$\frac{A}{2^{n+1}} < H \leq \frac{A}{2^n} \tag{7}$$

ist.

Bei *einer* Gleichung von der Gestalt (6), in der $\delta = 1$ ist und H den Ungleichungen (7) genügt, übertrifft die Anzahl der Lösungen z_λ mit $|z_\lambda| \leq B$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ wegen Lemma 2 nicht

$$3^{l-1}(l-1)! \frac{B^{l-1}}{H} < 2 \cdot 3^{l-1}(l-1)! \frac{B^{l-1} 2^n}{A} .$$

Anderseits folgt aus (7)

$$|a_\lambda| \leq \frac{A}{2^n} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) . \tag{8}$$

Folglich ist die Anzahl der Gleichungen vom Typus (6), für die die Ungleichungen (7) erfüllt sind, höchstens gleich der Anzahl der den Bedingungen (8) genügenden Gleichungen vom selben Typus, d.h. höchstens

$$\left(2 \frac{A}{2^n} + 1\right)^l \leq 3^l \frac{A^l}{2^{ln}} .$$

Somit übertrifft die Summe der Anzahlen der Lösungen z_λ mit $|z_\lambda| \leq B$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ *aller* solcher Gleichungen vom Typus (6) mit

$$\delta = 1, \qquad \frac{A}{2^{n+1}} < H \leq \frac{A}{2^n}$$

nicht

$$2 \cdot 3^{l-1}(l-1)! \frac{B^{l-1} 2^n}{A} \cdot 3^l \frac{A^l}{2^{ln}} = 2 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \frac{(AB)^{l-1}}{2^{(l-1)n}} .$$

Wir summieren über alle $n \geq 0$ und erhalten: Die Summe der Anzahlen der Lösungen $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ mit $|z_\lambda| \leq B$ aller Gleichungen (6) mit

$$\delta = 1, \qquad |a_\lambda| \leq A \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

ist höchstens

$$4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! (AB)^{l-1} .$$

3. Es verbleibt uns, die Anzahlen der Lösungen des geforderten Typus für Gleichungen mit $\delta > 1$ abzuschätzen. Ist $\delta \nmid m$, ist die Lösungsanzahl gleich Null und wir sind fertig. Wir können also $\delta | m$ annehmen. In diesem

Falle ist (6) offenbar gleichbedeutend mit

$$\frac{a_1}{\delta} z_1 + \frac{a_2}{\delta} z_2 + \cdots + \frac{a_l}{\delta} z_l = \frac{m}{\delta},$$

d.h. einer Gleichung vom selben Typus (6), wo nur

$$\left(\frac{a_1}{\delta}, \frac{a_2}{\delta}, \ldots, \frac{a_l}{\delta}\right) = 1$$

ist und die Zahl A durch die Zahl A/δ zu ersetzen ist. Bei festem δ übertrifft die Summe der Anzahlen der Lösungen z_λ mit $|z_\lambda| \leq B$ aller solcher Gleichungen, wie wir in 2. gesehen haben, nicht[4])

$$4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \left(\frac{A}{\delta} B\right)^{l-1} = 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \frac{(AB)^{l-1}}{\delta^{l-1}}.$$

Jetzt haben wir nur noch diesen Ausdruck über alle möglichen Werte δ ($\delta = 1, \ldots, A$) zu summieren[5]). Somit übertrifft die Summe der Anzahlen der geforderten Lösungen aller Gleichungen von der Gestalt (6), wo $|a_\lambda| \leq A$ ($\lambda = 1, \ldots, l$) und nicht alle a_λ gleich Null sind, nicht die Größe

$$4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! (AB)^{l-1} \sum_{\delta=1}^{A} \frac{1}{\delta^{l-1}} < 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \frac{l-1}{l-2} (AB)^{l-1}.$$

Vergleichen wir abschließend die Ergebnisse von 1., 2. und 3. und beachten wir, daß

$$\max\left(3^l c_1,\ 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)!,\ 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \frac{l-1}{l-2}\right) \leq \max\left(3^l c_1, 3^{2l+1} (l-1)!\right)$$

ist, so ist damit das Lemma 3 vollständig bewiesen.

---

[4]) Da wir jetzt statt A die kleinere Zahl A/δ zu nehmen haben, könnte $B \leq c_1 A^{l-1}$ nicht mehr erfüllt sein. Von dieser Voraussetzung haben wir aber im Falle 2. nirgends Gebrauch gemacht. Also ist das Ergebnis von 2. davon unabhängig.

[5]) *Sind q, A beliebige natürliche Zahlen, so gilt die Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{A} \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{q+1}{q}.$$

Beweis. Für $n \geq 1$ ist sicher

$$\frac{1}{(n+1)^{q+1}} < \frac{1}{q} \left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}\right).$$

Durch Summieren erhalten wir

$$\sum_{n=2}^{A} \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{A^q}\right) < \frac{1}{q},$$

woraus die Behauptung folgt.

Lemma 4. *Die Anzahl der Lösungen der Gleichung*

$$x + y = c, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{B}$$

übertrifft nicht die halbe Summe der Anzahlen der Lösungen der Gleichungen

$$x - y = 0, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{A}$$

und

$$x - y = 0, \qquad x \in \mathfrak{B},\ y \in \mathfrak{B}.$$

Beweis. [6]).

Für den Sonderfall, daß die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übereinstimmen, erhalten wir die

Folgerung. *Die Anzahl der Lösungen einer Gleichung*

$$x + y = c, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{A}$$

übertrifft nicht die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x - y = 0, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{A}.$$

Lemma 5. *Die Anzahl der Lösungen der Gleichung*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_l = c, \qquad x_\lambda \in \mathfrak{A}_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

übertrifft nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen der Gleichung

$$(9) \qquad \left.\begin{array}{l} y^{(1)} + \cdots + y^{(2^{s-1})} - y^{(2^{s-1}+1)} - \cdots - y^{(2^s)} = 0, \\ y^{(\tau)} = y_1^{(\tau)} + \cdots + y_k^{(\tau)} \\ y_1^{(\tau)} \in \mathfrak{A}_{\sigma k+1}, \ldots, y_k^{(\tau)} \in \mathfrak{A}_{\sigma k+k} \end{array}\right\} \quad \tau = (1, 2, 3, \ldots, 2^s)$$

unter den Voraussetzungen $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, 2^s - 1$. *Dabei ist* $l = k \cdot 2^s$.

Beweis. [7]).

Jetzt sind die Vorbereitungen abgeschlossen und wir können mit dem Beweis des Hauptlemmas beginnen.

§ 2. Das Hauptlemma.

Es sei $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}.$$

Wir bezeichnen mit $r_k(m)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) von

$$(10) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_\varkappa) = m \qquad (1 \leq m \leq N)$$

mit

$$x_\varkappa \text{ ganz}, \ |x_\varkappa| \leq N^{1/n} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

[6]) Vgl. [1], 44—46.
[7]) Vgl. [1], 46—49.

Hauptlemma. *Für die Koeffizienten des Polynoms $f(x)$ gelte*

$$|a_\nu| \leq c_0(n)\, N^{\nu/n} \quad [8] \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n); \tag{11}$$

dann ist bei passend gewähltem $k = k(n)$

$$r_k(m) < c\left(n, c_0(n)\right) N^{\frac{k}{n}-1} \qquad (1 \leq m \leq N)$$

mit

$$c\left(n, c_0(n)\right) = 5^{2k(n)}\, k(n)^{4k(n-1)}\, c_0(n)^{4k(n-1)}\, c\left(n-1, 2^n c_0(n)\right)^{2n}. \tag{13}$$

Beweis (durch Schluß von $n-1$ auf n).

Im Falle $n = 1$ setzen wir $k(1) = 2$, so daß die Gl. (10) die Form

$$a_0(x_1 + x_2) = m - 2a_1$$

erhält. Da es sich um die Lösungen x_1, x_2 handelt mit $|x_1| \leq N$, $|x_2| \leq N$, sind für x_1 höchstens $2N+1 \leq 3N$ Werte möglich; da jedem x_1 höchstens ein x_2 entspricht, ist

$$r_2(m) \leq 3N = c\left(1, c_0(1)\right) N, \tag{14}$$

womit unser Satz für $n = 1$ bewiesen ist.

Es sei jetzt $n > 1$ und unsere Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen. Wir setzen $k(n-1) = k'$ und wählen

$$k = k(n) = 2n \cdot 2^{3 + [{}^2\log k']} \quad [9],$$

wo der Exponent die größte, $3 + {}^2\log k'$ nicht übertreffende ganze Zahl bedeutet. Wegen $k(1) = 2$ gilt

$$8n \cdot k' < k = k(n) \leq 16\, n\, k' \leq \cdots \leq 2 \cdot 16^{n-1}\, n! < 2^{2n^2}. \tag{15}$$

Im folgenden wollen wir

$$s = 2 + [{}^2\log k']$$

setzen, so daß

$$k(n) = 2n \cdot 2^{s+1} \tag{16}$$

ist.

Die Anwendung von Lemma 4 ergibt [10]:

Die von uns abzuschätzende Zahl $r_k(m)$ übertrifft nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen in den ganzen Zahlen y_k mit

$$|y_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k/2)$$

---

[8] Für $c_0(n)$ können wir etwa

$$c_0(n) = \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \tag{12}$$

wählen.

[9] Diese etwas andere Definition von $k(n)$ (vgl. [1], 51) ist mit dem gesamten Beweis verträglich; die Abschätzungen werden jedoch genauer.

[10] Vgl. [1], 51—53.

aller Gleichungen der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{k/2} h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa) = 0, \tag{17}$$

die sich für alle möglichen Werte der ganzen Zahlen h_k mit

$$|h_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k/2)$$

ergeben. Dabei ist

$$\varphi_\varkappa(y) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varkappa\nu}\, y^{n-\nu} \tag{18}$$

ein Polynom $(n-1)$-ten Grades mit den von den Zahlen $h_\varkappa$ abhängigen Koeffizienten

$$a_{\varkappa\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a_\mu \binom{n-\mu}{\nu-\mu} h_\varkappa^{\nu-\mu-1} \quad \binom{\nu = 1, \ldots, n}{\varkappa = 1, 2, \ldots, k/2}. \tag{19}$$

Jetzt wollen wir *eine* der Gln. (17) untersuchen, d.h. wir wollen die Zahlen $h_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k/2)$ für einen Augenblick als fest voraussetzen. Auf diese Gleichung wenden wir Lemma 5 an. Dabei spielen die $h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa)$ die Rolle der Unbekannten x_λ, die Zahl $k/2 = 2n \cdot 2^s$ die der Zahl l. Die Menge $\mathfrak{A}_\varkappa$, der die Zahlen $x_\varkappa = h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa)$ angehören müssen, besteht im vorliegenden Fall aus allen Zahlen der Form $h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa)$, wo die $h_\varkappa$ gegebene feste Werte haben und die $y_\varkappa$ das Intervall $(-2N^{1/n}, 2N^{1/n})$ durchlaufen.

Nach Lemma 5 übertrifft die Anzahl der den eben beschriebenen Forderungen genügenden Lösungen der Gl. (17) nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen der Gleichung

$$y^{(1)} + \cdots + y^{(2^{s-1})} - y^{(2^{s-1}+1)} - \cdots - y^{(2^s)} = 0 \tag{9}$$

unter den folgenden 2^s Voraussetzungen, die den Werten $\sigma = 0, 1, \ldots, 2^s - 1$ entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} y^{(\tau)} &= \sum_{\nu=1}^{2n} y_\nu^{(\tau)}, \\ y_\nu^{(\tau)} &\in \mathfrak{A}_{\sigma \cdot 2n+\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, 2n) \end{aligned}\right\} \quad (\tau = 1, 2, \ldots, 2^s).$$

In entwickelter Form sieht Gl. (9) für den Fall $\sigma = 0$ (den wir lediglich als Beispiel wählen) unter Änderung der Reihenfolge der Summanden so aus:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} (y_\nu^{(1)} + \cdots + y_\nu^{(2^{s-1})} - y_\nu^{(2^{s-1}+1)} - \cdots - y_\nu^{(2^s)}) = 0.$$

Jede der Zahlen $y_\nu^{(\tau)}$ ist hier eine Zahl von der Form $h_\nu \varphi_\nu(v_\nu^{(\tau)})$, wo

$$|v_\nu^{(\tau)}| \leq 2N^{1/n}$$

ist. Indem wir abkürzend

$$z_\nu = \varphi_\nu(v_\nu^{(1)}) + \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1})}) - \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1}+1)}) - \cdots - \varphi_\nu(v^{(2^s)}) \quad (\nu = 1, \ldots, 2n) \tag{20}$$

setzen, können wir die Gl. (9) kurz so schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} h_\nu z_\nu = 0. \tag{21}$$

Wir werden im ganzen 2^s Gleichungen von dieser Art haben. Ihre Gesamtheit läßt sich kurz in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{2n} h_{\sigma \cdot 2n+\nu} z_{\sigma \cdot 2n+\nu} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, 2^s - 1)$$

hinschreiben. Wir werden uns vorläufig auf die Untersuchung der Gl. (21) beschränken, die wir als typisch ansehen können. Für die Abschätzung der Anzahl der uns interessierenden Lösungen dieser Gleichung müssen wir erst nachsehen, innerhalb welcher Grenzen sich die Größen $\varphi_\nu(v_\nu^{(\tau)})$, z_ν verändern können.

Wegen

$$\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{n-\mu}{\nu-\mu} < 2^n, \quad |h_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \qquad \binom{\nu = 1, \ldots, n}{\varkappa = 1, \ldots, k/2}$$

und wegen (11) folgt aus (19)

$$|a_{\varkappa\nu}| < 2^{n+\nu-1} c_0(n) N^{\frac{\nu-1}{n}}. \tag{22}$$

Beachten wir noch, daß $|v_\nu^{(\tau)}| \leq 2N^{1/n}$ ist, so folgt aus (18) bzw. (20)

$$|\varphi(v_\nu^{(\tau)})| < n \cdot 2^{2n-1} c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}} \tag{23}$$

und

$$|z_\nu| < 2^s \cdot n\, 2^{2n-1} c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}} = 2^{2n-3} k(n)\, c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}} \qquad \binom{\nu = 1, \ldots, 2n}{\tau = 1, \ldots, 2^s}.$$

Somit kann in der Gl. (21) jedes z_ν nur Werte annehmen, die im Intervall

$$\left(-2^{2n-3} k\, c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}},\ 2^{2n-3} k\, c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}}\right) \tag{24}$$

liegen.

Es sei m eine dieser Zahlen. Die Gleichung

$$z_\nu = m \tag{25}$$

ist im allgemeinen auf mehrere Arten erfüllbar, da die Definition von z_ν so beschaffen ist, daß sich ein und derselbe Wert von z_ν bei verschiedener Wahl der $v_\nu^{(\tau)}$ $(\tau = 1, \ldots, 2^s)$ durchaus ergeben kann. Wir werden nun bei der Abschätzung der Anzahl der Lösungen von (25), d.h. der Gleichung

$$\varphi_\nu(v_\nu^{(1)}) + \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1})}) - \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1}+1)}) - \cdots - \varphi_\nu(v_\nu^{(2^s)}) = m \tag{26}$$

die angekündigte Induktion anwenden.

Zuerst schreiben wir (26) in der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{k'} \varphi_\nu(v_\nu^{(\varkappa)}) = m - \varphi_\nu(v_\nu^{(k'+1)}) - \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1}+1)}) + \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^s)})$$

auf. Das kann man tun, da für $k' = k(n-1) > 1$ wegen (16), (15)

$$2^{s-1} \geqq k'$$

gilt. Bezeichnen wir die rechte Seite der letzten Gleichung mit m', so erhalten wir

$$\sum_{\varkappa=1}^{k'} \varphi_\nu(v_\nu^{(\varkappa)}) = m'. \tag{27}$$

Wir wählen für die Zahlen $v_\nu^{(\tau)}$ $(\tau = k'+1, \ldots, 2^s)$ irgendwelche bestimmte Werte aus dem Intervall $(-2N^{1/n}, 2N^{1/n})$. Dann erhält auch m' einen bestimmten Wert. Auf (27) wenden wir nun den zu beweisenden Satz an, da $\varphi_\nu(y)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Wir überzeugen uns nun, daß alle Voraussetzungen erfüllt sind. Da m im Intervall (24) liegt, folgt aus der Definition von m' wegen (23)

$$\begin{cases} m' < \left(2^{2n-3} k\, c_0(n) + (2^s - k')\, n\, 2^{2n-1} c_0(n)\right) N^{\frac{n-1}{n}} \\ \quad < 2^{2(n-1)} k\, c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}} = N'. \end{cases} \tag{28}$$

Wegen (22) ist sicher

$$|a_{\varkappa\nu}| \leq c_0(n-1) N'^{\frac{\nu-1}{n-1}}, \tag{29}$$

wobei wir für $c_0(n-1)$ etwa folgende Wahl treffen:

$$c_0(n-1) = 2^n \cdot c_0(n). \tag{30}$$

Wegen (28) kann die Rolle des N von N' übernommen werden. Dann stellen die Bedingungen (29), denen die Koeffizienten des Polynoms $\varphi_\varkappa(y)$ genügen, gerade die Bedingungen (11) dar, wobei nur n durch $(n-1)$ ersetzt ist. Somit sind alle Voraussetzungen tatsächlich erfüllt.

Da

$$2N^{\frac{1}{n}} < N'^{\frac{1}{n-1}}$$

ist, können wir behaupten:

Die Anzahl der Lösungen der Gl. (27), *für die*

$$|v_\nu^{(\varkappa)}| \leq 2N^{1/n}$$

ist, übertrifft nicht die Zahl

$$c\left(n-1, c_0(n-1)\right) N'^{\frac{k'}{n-1}-1}. \tag{31}$$

Diese Abschätzung ergibt sich für die festen Werte $v_\nu^{(\tau)}$ $(\tau = k'+1, \ldots, 2^s)$. Ersichtlich haben wir höchstens

$$\left(2N^{\frac{1}{n}} + 1\right)^{2^s - k'} < 3^{2^s - k'} N^{\frac{2^s - k'}{n}} \tag{32}$$

solche Wertsysteme. Die Gesamtanzahl der Lösungen vom verlangten Typus für die Gl. (26) übertrifft nicht das Produkt von (31) und (32), d.h. sie ist wegen

$$N' = 2^{2(n-1)}\, k\, c_0(n)\, N^{\frac{n-1}{n}}$$

höchstens

$$3^{2^s-k'}\, c\,(n-1, c_0(n-1))\, \left(2^{2(n-1)}\, k\, c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1} N^{\frac{2^s-n+1}{n}} \tag{33}$$

Wir wenden uns wieder Gl. (21) zu. Wir haben früher gesehen, daß jedes z_ν nur im Intervall (24) liegen kann. Jetzt haben wir gefunden, daß die Vielfachheit jedes dieser Werte (d.h. die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten für $y_\nu^{(\tau)}$, mittels deren die Gleichung lösbar ist) die Zahl (33) nicht übertrifft.

Das bisherige Ergebnis dieses Paragraphen lautet:

Die von uns abzuschätzende Zahl $r_k(m)$ übertrifft nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen in ganzen z_ν mit

$$|z_\nu| \leq 2^{2n-3}\, k\, c_0(n)\, N^{\frac{n-1}{n}}$$

und den Vielfachheiten

$$\lambda_\nu < 3^{2^s-k'}\, c\,(n-1, c_0(n-1))\, \left(2^{2(n-1)} k\, c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1} N^{\frac{2^s-n+1}{n}} \tag{34}$$

der Gleichungen von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{2n} h_{\sigma\cdot 2n+\nu}\, z_{\sigma\cdot 2n+\nu}^{\,n} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, 2^s - 1), \tag{35}$$

wo die Zahlen $h_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, 2n\cdot 2^s$) unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen des Intervalls $(-2N^{1/n}, 2N^{1/n})$ durchlaufen.

Mit Hilfe von Lemma 3 gelangen wir jetzt rasch zum Ziel. Wir bezeichnen mit Γ irgendeine bestimmte Kombination der Zahlen $h_\varkappa$ mit

$$|h_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k/2)$$

und mit $U_\sigma(\Gamma)$ die Anzahl der Lösungen der Gl. (35) für diese feste Kombination Γ und für ein bestimmtes vorgegebenes σ, wobei es sich um die Lösungen z_ν handelt, die dem Intervall (24) angehören und die Vielfachheiten λ_ν (34) haben. Dann ist nach dem eben formulierten Ergebnis

$$r_k(m) \leq \sum_{\Gamma} \left\{ \sum_{\sigma=0}^{2^s-1} U_\sigma(\Gamma) \right\}$$

oder

$$r_k(m) \leq \sum_{\sigma=0}^{2^s-1} \left\{ \sum_{\Gamma} U_\sigma(\Gamma) \right\}.$$

Da sich die Gln. (35) und damit die Summen $\sum_{\Gamma} U_\sigma(\Gamma)$ für verschiedenes σ durch nichts voneinander unterscheiden, ist

$$r_k(m) \leq 2^s \sum_{\Gamma} U_0(\Gamma).$$

Bezeichnen wir mit $U_0^*(\Gamma)$ die Anzahl der Lösungen der Gl. (35) für $\sigma=0$ unter der Voraussetzung, daß alle z_ν einfach sind, so ist offenbar

$$U_0(\Gamma)<\left(3^{2^s-k'}\,c\left(n-1,c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)}\,k\,c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1}N^{\frac{2^s-n+1}{n}}\right)^{2n}U_0^*(\Gamma)$$

und folglich

$$(36)\qquad \begin{cases} r_k(m)<2^s\left(3^{2^s-k'}\,c\left(n-1,c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)}\,k\,c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1}\right)^{2n}\times \\ \qquad\qquad \times N^{2(2^s-n+1)}\sum\limits_{\Gamma}U_0^*(\Gamma). \end{cases}$$

Jedes Γ stellt eine gewisse zulässige Kombination der Werte *aller* $h_\varkappa$ ($\varkappa=1,\ldots,k/2$) dar. Indessen ist die Zahl $U_0^*(\Gamma)$ vollständig durch die Zahlen $h_\varkappa$ ($\varkappa=1,\ldots,2n$) bestimmt, denn nur sie gehen in die Gl. (35) für $\sigma=0$ ein. Zu einer festen Kombination Γ gehört eindeutig ein Γ' der Zahlen $h_1,\ldots,h_{2n}$. Einer festen Kombination Γ' entsprechen dagegen so viele Kombinationen Γ, wie sich Auswahlen für die übrigen $h_\varkappa$ ($\varkappa=2n+1,\ldots,k/2$) treffen lassen. Wegen $|h_\varkappa|\leqq 2N^{1/n}$ gehören zu einer Kombination Γ' höchstens

$$\left(5N^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{k}{2}-2n}$$

Kombinationen Γ. Daher ist

$$\sum_{\Gamma}U_0^*(\Gamma)\leqq 5^{\frac{k}{2}-2n}N^{\frac{k}{2n}-2}\sum_{\Gamma'}U_0^*(\Gamma').$$

Hier ist $U_0^*(\Gamma')$ die Anzahl der Lösungen von (35) für $\sigma=0$ in ganzen z_ν [wobei die z_ν ($\nu=1,\ldots,2n$) im Intervall (24) liegen] für die vorgegebene Kombination Γ' der Zahlen h_ν mit $|h_\nu|\leqq 2N^{1/n}$ ($\nu=1,\ldots,2n$). Die Summation wird über alle derartigen Kombinationen Γ' erstreckt. Aus (36) erhalten wir

$$(37)\qquad \begin{cases} r_k(m)<2^s\left(3^{2^s-k'}\,c\left(n-1,c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)}\,k\,c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1}\right)^{2n}\times \\ \qquad\qquad \times\,5^{\frac{k}{2}-2n}N^{2(2^s+1-n)}\sum\limits_{\Gamma'}U_0^*(\Gamma'). \end{cases}$$

Jetzt wird $\sum\limits_{\Gamma'}U_0^*(\Gamma')$ unmittelbar mit Hilfe von Lemma 3 abgeschätzt. Es ist

$$l=2n,\quad A=2N^{\frac{1}{n}},\quad B=2^{2n-3}\,k\,c_0(n)\,N^{\frac{n-1}{n}}$$

und etwa

$$c_1=\frac{k}{4}\,c_0(n)$$

zu setzen. Dann ist sicher $B\leqq c_1A^{l-1}$. Da alle Voraussetzungen erfüllt sind, erhalten wir

$$\sum_{\Gamma'}U_0^*(\Gamma')\leqq\max\left(3^{2n}\,\frac{k}{4}\,c_0(n),\,3^{4n+1}(2n-1)!\right)(AB)^{2n-1}.$$

Da wegen (15)

$$3^{2n}\frac{k}{4}c_0(n) < 3^{4n+1}(2n-1)!\,c_0(n)$$

ist, gilt

$$\sum_{\Gamma'} U_0^*(\Gamma') \leq 3^{4n+1}(2n-1)!\,c_0(n)\left(2\cdot 2^{2n-3}k\,c_0(n)\right)^{2n-1}N^{2n-1}.$$

Damit geht (37) über in

$$r_k(m) < 2^s(\ldots)^{2n}5^{\frac{k}{2}-2n}\cdot 3^{4n+1}(2n-1)!\,c_0(n)\left(2\cdot 2^{2n-3}k\,c_0(n)\right)^{2n-1}N^{\frac{k}{n}-1}$$

Addieren wir die Exponenten gleicher Grundzahlen und beachten wir, daß

$$2^{s+2} = \frac{k}{n} \qquad \text{wegen (16)},$$

$$\frac{2n}{n-1} \leq 4,$$

$$2^s - k' \leq 3k' \qquad \text{wegen (16)},$$

$$3^{4n+1} < 2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot n \quad (n \geq 2),$$

$$2^{4nk'}3^{6nk'}(2n-1)! < 5^{\frac{3}{2}k} \qquad \text{wegen (15)}$$

ist, so folgt unter Berücksichtigung von (30)

$$(13)\quad r_k(m) < 5^{2k}\left(k\,c_0(n)\right)^{4k'}\cdot c\left(n-1, 2^n c_0(n)\right)^{2n}\cdot N^{\frac{k}{n}-1} = c\left(n, c_0(n)\right)N^{\frac{k}{n}-1}.$$

Damit ist das Hauptlemma *vollständig bewiesen.*

Der Übersichtlichkeit halber werden wir jetzt $c\left(n, c_0(n)\right)$ so nach oben abschätzen, daß $c_0(n)$ nur noch explizit vorkommt.

Setzen wir in Einklang mit (30)

$$(38)\qquad c_0(n-\nu) = 2^{(n-\nu+1)}\cdot c_0(n-\nu+1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-2),$$

so können wir (13) so schreiben:

$$\begin{aligned} c\left(n, c_0(n)\right) &= 5^{2k(n)}k(n)^{4k(n-1)}c_0(n)^{4k(n-1)}\,c\left(n-1, c_0(n-1)\right)^{2n} \\ &= 5^{2k(n)}k(n)^{4k(n-1)}c_0(n)^{4k(n-1)}\times \\ &\quad\times\left(5^{2k(n-1)}k(n-1)^{4k(n-2)}c_0(n-1)^{4k(n-2)}\right)^{2n}\times \\ &\quad\times\left(5^{2k(n-2)}k(n-2)^{4k(n-3)}c_0(n-2)^{4k(n-3)}\right)^{2n\cdot 2(n-1)}\times \\ &\quad\cdots\cdots \\ &\quad\times\left(5^{2\cdot k(2)}k(2)^{4k(1)}c_0(2)^{4k(1)}\right)^{2n\cdot 2(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 3}\times \\ &\quad\times c\left(1, c_0(1)\right)^{2n\cdot 2(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2}. \end{aligned}$$

Wir schätzen jede Spalte durch den Anfang einer geometrischen Reihe ab. Als Grundzahl verwenden wir dabei die jeweils größte in einer Spalte stehende Grundzahl: Da $k(n)$ mit n monoton wächst, $c_0(n)$ mit n monoton abnimmt [wegen (38)], sind das die Zahlen 5, $k(n)$, $c_0(2)$.

Da

$$2k(n) > 4 \cdot 2n \cdot 2k(n-1) \qquad \text{wegen (15)},$$

$$4k(n-1) > 2 \cdot 2n \cdot 4k(n-2) \qquad \text{wegen (15)},$$

$$c\left(1, c_0(1)\right) = 3 \qquad \text{wegen (14)},$$

erhalten wir

$$c\left(n, c_0(n)\right) < 5^{\frac{4}{3} \cdot 2k(n)}\, k(n)^{2 \cdot 4k(n-1)}\, c_0(2)^{2 \cdot 4k(n-1)}\, 3^{n! 2^{n-1}}$$

Nun folgt offenbar aus (38)

$$c_0(2) = 2^{\frac{n(n+1)}{2} - 3}\, c_0(n) < 2^{n^2}\, c_0(n).$$

Also ist

$$(39) \quad c\left(n, c_0(n)\right) < 2^{8n^2 k(n-1)}\, 3^{n! 2^{n-1}}\, 5^{3k(n)}\, k(n)^{8k(n-1)}\, c_0(n)^{8k(n-1)} = C\left(n, c_0(n)\right).$$

Da $k(n)$ eine wohlbekannte Funktion von n ist, haben wir damit die „Konstante" $c\left(n, c_0(n)\right)$ des Hauptlemmas explizit durch n, $c_0(n)$ allein nach oben abgeschätzt. Insbesondere ist also

$$(40) \qquad r_k(m) < C\left(n, c_0(n)\right) N^{\frac{k}{n} - 1},$$

wobei wir unter $C\left(n, c_0(n)\right)$ eine beliebige obere Schranke von $c\left(n, c_0(n)\right)$ verstehen, etwa die in (39) angegebene.

Der nun zu beweisende Hilfssatz über Dichten von Zahlenfolgen erlaubt uns dann, mit Hilfe des zuletzt erzielten Ergebnisses eine explizite Schranke für $g(n)$ anzugeben. Das ist ja unser Ziel.

§ 3. Ein Hilfssatz.

Definition. Es sei $\mathfrak{A}$ eine monotone Folge von paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen[11]). Ist x eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir mit $A(x)$ die Anzahl der Zahlen $a \in \mathfrak{A}$ mit $1 \leq a \leq x$. Man definiert die Dichte von $\mathfrak{A}$ als

$$d(\mathfrak{A}) = \underset{x=1,2,\ldots}{\text{fin}} \frac{A(x)}{x}.$$

Hilfssatz. *Es sei ε eine beliebige reelle Zahl > 0, N_0 eine beliebige natürliche Zahl; dann folgt aus*

$$1 \in \mathfrak{A}, \; d(\mathfrak{A}) \leq \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{N_0 + 1}\right)$$

die Existenz einer natürlichen Zahl $N > N_0$ mit

$$A(N) < \varepsilon N.$$

---

[11]) Diese beiden Eigenschaften wollen wir von allen Folgen verlangen. Insbesondere werden alle (etwa bei Summenfolgen) mehrmals auftretenden Zahlen nur einmal aufgeschrieben.

Beweis. Bezüglich der Folge $\mathfrak{A}$ sind offenbar zwei Fälle möglich.

1. Für alle $N>0$ ist $\frac{A(N)}{N} > d(\mathfrak{A})$. Dann gibt es nach der Definition von $d(\mathfrak{A})$ zu jedem N_1 ein $N_2 > N_1$ mit

$$\frac{A(N_2)}{N_2} < \frac{A(N_1)}{N_1}.$$

Wegen $d(\mathfrak{A}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gibt es Zahlen N mit $\frac{A(N)}{N} < \varepsilon$, und zwar, wie wir eben gesehen haben, beliebig große.

2. Es gibt Zahlen N' (mindestens eine) mit $\frac{A(N')}{N'} = d(\mathfrak{A})$. Dann ist

$$d(\mathfrak{A}) = \frac{A(N')}{N'} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{d.h.} \quad A(N') < \varepsilon N'.$$

Aus $1 \in \mathfrak{A}$ folgt aber $A(N') \geq 1$ und daraus $d(\mathfrak{A}') \geq \frac{1}{N'}$. Wegen $d(\mathfrak{A}) \leq \frac{1}{N_0+1}$ folgt somit $N' \geq N_0+1 > N_0$, wie es sein soll.

Damit ist der Hilfssatz *vollständig bewiesen.*

§ 4. Die Abschätzung von $g(n)$.

Wir wollen jetzt von $f(x)$ noch zusätzlich voraussetzen, daß $f(x) \geq 0$ ist für $x \geq 0$. Das bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da uns hier nur die Darstellungen einer positiven Zahl m durch positive Summanden der Form $f(x_i)$ interessieren. Die nun folgenden Überlegungen ließen sich auch ohne diese Zusatzvoraussetzung mit unwesentlichen Abänderungen durchführen.

Satz 1. *Es sei n eine ganze Zahl ≥ 2. Wir erklären* (wie in § 2) *$k(n)$ rekursiv:*

$$k = k(n) = 2n \cdot 2^{3+[\log k(n-1)]},$$

$$k(1) = 2.$$

Es sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten mit $a_0 > 0$; ferner sei $f(x) \geq 0$ für jede ganze Zahl $x \geq 0$; durchläuft dann $x_\varkappa$ eine (monotone) Folge $\mathfrak{M}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) von (paarweise verschiedenen) natürlichen Zahlen mit

$$d(\mathfrak{M}_\varkappa) \geq \delta \qquad (0 < \delta \leq 1),$$

dann hat die so entstehende Folge

$$\mathfrak{A}^{(k)'} = \{1, f(x_1) + \cdots + f(x_k)\}$$

eine positive Dichte:

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) > \frac{1}{4C(n, c_0(n))} \cdot \left(\frac{\delta}{2\left(k \cdot (n+1) \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\right)^{1/n}} \right)^k \text{ [12]}. \tag{41}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}$ die Folge aller natürlichen Zahlen, mit $\mathfrak{M}_\varkappa$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $d(\mathfrak{M}_\varkappa) \geq \delta$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, mit $\bar{r}_k(m)$ bzw. $\bar{r}'_k(m)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) von

$$f(x_1) + \cdots + f(x_k) = m, \qquad x_k \leq N^{1/n}, \qquad 1 \leq m \leq N, \tag{42}$$

wobei $x_\varkappa \in \mathfrak{N}$ bzw. $\in \mathfrak{M}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ ist, und mit $\mathfrak{A}^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}^{(k)'}$ die Folge aller Zahlen m, die sich in der Gestalt (42) schreiben lassen mit $x_\varkappa \in \mathfrak{N}$ bzw. $\in \mathfrak{M}_\varkappa$, wobei wir die Zahl 1 noch hinzunehmen, falls nicht

$$f(x_1) + \cdots + f(x_k) \doteq 1$$

ohnehin schon lösbar ist.

Offenbar ist

$$\bar{r}'_k(m) \leq \bar{r}_k(m) \leq r_k(m) \text{ [13]} \tag{43}$$

und

$$\mathfrak{A}^{(k)'} \subseteqq \mathfrak{A}^{(k)}.$$

Aus der Definition von $\bar{r}'_k(m)$ ergibt sich unmittelbar, daß

$$\bar{r}'_k(0) + \bar{r}'_k(1) + \cdots + \bar{r}'_k(N) = R'(N)$$

die Anzahl aller Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_\varkappa \in \mathfrak{M}_\varkappa$ ist, für die

$$0 \leq f(x_1) + \cdots + f(x_k) \leq N, \qquad x_\varkappa \leq N^{1/n} \tag{44}$$

gilt.

Für $x \geq 1$ ist sicher

$$0 \leq f(x) \leq (n+1) \cdot \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \cdot x^n.$$

Für alle

$$N \geq k \cdot (n+1) \cdot \max |a_\nu|$$

genügt also der Forderung (44) offenbar jede Menge von natürlichen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ mit $x_\varkappa \in \mathfrak{M}_\varkappa$, für die

$$(n+1) \max |a_\nu| \, x_\varkappa^n \leq \frac{N}{k}$$

oder

$$1 \leq x_\varkappa \leq \left(\frac{N}{k \cdot (n+1) \max |a_\nu|} \right)^{1/n}$$

---

[12]) Hier ist $C(n, c_0(n))$ etwa die in (39) angegebene Schranke. Da wir wegen (12)

$$c_0(n) = \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu|$$

wählen können, haben wir damit $d(\mathfrak{A}^{(k)'})$ durch $n, \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu|, \delta$ allein nach unten abgeschätzt.

[13]) Vgl. die Definition von $r_k(m)$ in § 2.

gilt. Man kann also jedes $x_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ auf mindestens

$$M_\varkappa\left(\left[\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}\right]\right) \geq d(\mathfrak{M}_\varkappa)\left[\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}\right]$$

verschiedene Arten wählen. Für $N \geq 2^n k\cdot(n+1)\max|a_\nu|$ ist sicher

$$d(\mathfrak{M}_\varkappa)\left[\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}\right] > \frac{\delta}{2}\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}.$$

Da sich in (44) diese Werte $x_\varkappa$ noch willkürlich kombinieren lassen, folgt für alle $N \geq 2^n k\cdot(n+1)\max|a_\nu|$

$$R(N) > (K N^{1/n})^k \tag{45}$$

mit

$$K = \frac{\delta}{2\,(k\cdot(n+1)\max|a_\nu|)^{1/n}}.$$

Sicher ist $K < 1$.

Wäre nun

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) \leq \min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{1}{N_0+1}\right)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{K^k}{2C(n, c_0(n))} \tag{46}$$

und

$$N_0 = \frac{2n^n}{K^n}, \tag{47}$$

so existierte wegen $1 \in \mathfrak{A}^{(k)'}$ auf Grund des Hilfssatzes von § 3 sicher eine natürliche Zahl

$$N_1 > N_0 \tag{48}$$

mit

$$A^{(k)'}(N_1) < \varepsilon N_1. \tag{49}$$

Auf Grund der Voraussetzungen über das Polynom $f(x)$ hat (42) genau dann eine Lösung für $m = 0$, wenn

$$f(x_\varkappa) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

ist. Da $f(\lambda)$ als Polynom n-ten Grades höchstens n Nullstellen hat und da diese sich in (42) noch willkürlich kombinieren lassen, folgt

$$r_k(0) \leq n^k.$$

Wegen (43), (49) erhalten wir durch Anwendung des Hauptlemmas (40)

$$R'(N_1) = \sum_0^{N_1} \bar{r}'_k(m) \leq r_k(0) + \sum_{m=1}^{N_1} r_k(m) <$$

$$< n^k + C(n, c_0(n))\, N_1^{\frac{k}{n}-1} A^{(k)'}(N_1) < n^k + C(n, c_0(n))\, \varepsilon\, N_1^{\frac{k}{n}}.$$

Wegen (48), (46), (47) ist sicher

$$R'(N_1) < 2C\left(n, c_0(n)\right) \varepsilon N_1^{k/n} = (K N_1^{1/n})^k.$$

Diese letzte Ungleichung widerspricht aber der Ungleichung (45), die für *alle*

$$N \geq 2^n k \cdot (n+1) \max |a_\nu|,$$

also insbesondere [wegen (48), (47)] für N_1 gilt. Die Annahme

$$d\left(\mathfrak{A}^{(k)'}\right) \leq \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{N_0+1}\right)$$

ist also zu verwerfen.

Da wegen $K<1$, $C\left(n, c_0(n)\right) \geq 1$ aus (46), (47)

$$\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N_0+1}$$

folgt, ist *notwendigerweise*

$$d\left(\mathfrak{A}^{(k)'}\right) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist Satz 1 *vollständig bewiesen.*

Aus Satz 1 folgt sofort, daß die Dichte der Folge

$$\mathfrak{A}^{(k)''} = \{\{0, 1, f(x_1)\} + \cdots \{0, 1, f(x_k)\}\} \qquad (x_\varkappa \in \mathfrak{M}_\varkappa)$$

größer als die in (41) angegebene Schranke ist, da

$$\mathfrak{A}^{(k)'} \subseteqq \mathfrak{A}^{(k)''}$$

ist.

Satz 2. *Es sei n eine ganze Zahl ≥ 2. Wir erklären $k(n)$ rekursiv als*

$$k = k(n) = 2n \cdot 2^{3+[^3\log k(n-1)]},$$

$$k(1) = 2.$$

Es sei $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ ein Polynom n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten mit $a_0 > 0$; ferner sei $f(x) \geq 0$ für jede ganze Zahl $x \geq 0$. Es sei δ eine beliebige reelle Zahl mit $0 < \delta \leq 1$ und es sei l definiert als

$$l = \left[4C\left(n, c_0(n)\right)\left(\frac{2(k \cdot (n+1) \max |a_\nu|)^{1/n}}{\delta}\right)^k\right] + 1. \tag{50}$$

Durchläuft dann $x_\varkappa$ eine Folge $\mathfrak{M}_\varkappa$ mit $d(\mathfrak{M}_\varkappa) \geq \delta$ $(\varkappa = 1, \ldots, k\,l)$, dann hat die so entstehende Folge

$$\mathfrak{A}^{(kl)''} = \{\{0, 1, f(x_1)\} + \cdots + \{0, 1, f(x_{kl})\}\}$$

die Dichte 1:

$$d\left(\mathfrak{A}^{(kl)''}\right) = 1;$$

d.h. die Folge $\mathfrak{A}^{(kl)''}$ umfaßt alle natürlichen Zahlen.

Beweis. Satz 2 folgt unmittelbar aus Satz 1 durch Anwendung des Satzes von H. B. MANN[14]) für l Summanden.

[14]) Für den Satz von MANN vgl. etwa [1], 24—32.

Nun sind wir gleich am Ziel. Die Sätze 1 und 2 besagen nämlich unter anderem, daß die Folge

$$\mathfrak{A}^{(1)'} = \{0, 1, f(x_1)\}, \qquad x_1 \in \mathfrak{M}_1$$

eine Basis bildet. Ihre Ordnung $g(n, f, \delta)$ läßt sich sofort nach oben abschätzen[15]). Offenbar ist

$$g(n, f, \delta) \leq k\,l\,.$$

Aus (50) folgt

$$l < 8C\left(n, c_0(n)\right) \cdot \left(\frac{2(2k\,n \max|a_\nu|)^{1/n}}{\delta}\right)^k.$$

Daraus folgt unter Beachtung von (39), (12), (15) und wegen

$$n^{\frac{k}{n}} < k^{\frac{k}{n}-1}, \qquad 5^3 < 2^7, \qquad \frac{k}{n} + 3 < k$$

die Abschätzung

$$g(n, f, \delta) < 2^{9k+8n^2k'} \cdot k^{2\frac{k}{n}+8k'} \cdot 3^{n!\,2^{n-1}} \cdot \frac{(\max|a_\nu|)^{24\,k'}}{\delta^k}.$$

Wegen (15) folgt daraus unmittelbar das

Ergebnis: *Es ist*

$$g(n, f, \delta) < \left(\frac{2^{22\,n^2}\left(\max\limits_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\right)^3}{\delta^{2n}}\right)^{16^{n-1}(n-1)!} \tag{51}$$

Darin sind nun drei interessante Sonderfälle enthalten. Setzen wir nämlich

$$\mathfrak{M}_1 = \cdots = \mathfrak{M}_{k\,l} = \mathfrak{N}, \quad \text{d.h.} \quad \delta = 1$$

bzw.

$$\mathfrak{M}_1 = \cdots = \mathfrak{M}_{k\,l} \quad \text{und} \quad f(x) = x^n, \quad \text{d.h.} \quad \max|a_\nu| = 1,$$

so erhalten wir gerade eine Abschätzung des zur KAMKEschen [7] bzw. SCHNIRELMANNschen Verallgemeinerung [15] gehörigen $g(n)$. Eine Abschätzung zum ursprünglichen WARINGschen Problem (Satz von WARING-HILBERT [4]) gewinnen wir, wenn wir zugleich

$$\delta = 1 \quad \text{und} \quad f(x) = x^n, \quad \text{d.h.} \quad \max|a_\nu| = 1$$

setzen:

$$g(n) < 2^{2 \cdot 16^n (n+1)!}.$$

Da wir größtenteils sehr roh abschätzen mußten, ist auch das Ergebnis sehr grob. Uns lag jedoch in erster Linie daran, ohne Beachtung der Feinheiten den LINNIKschen Beweis auf möglichst einfachem Wege konstruktiv zu wenden. Daß sich der LINNIKsche Beweis konstruktiv wenden läßt, ist von Bedeutung für alle weiteren Ergebnisse, die sich mit dieser Methode noch gewinnen lassen. Doch darauf wollen wir hier nicht näher eingehen.

[15]) Eine Folge $\mathfrak{A}$ heißt eine Basis von der Ordnung h, wenn sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens h Zahlen aus $\mathfrak{A}$ schreiben läßt.

§ 5. Anmerkungen.

1. Die Abschätzung (51) kann noch wesentlich verbessert werden. Soll jedoch der Linniksche Beweis in seinem Aufbau unverändert bleiben, läßt sich die Schranke für $g(n)$ nicht unter $k(n)$ herunterdrücken. Sie wäre genau dann gleich $k(n)$, wenn wir die Aussage (41) von Satz 1 zu

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) = 1$$

verschärfen könnten. Aber auch diese Schranke liegt noch beträchtlich über der auf analytischem Wege gefundenen, da aus (15) wegen $k(1)=2$ sofort

$$k(n) > 2 \cdot 8^{n-1} n!$$

folgt.

2. Man kann die Sätze 1 und 2 insofern noch verallgemeinern, daß wir die Voraussetzung „*mit* $d(\mathfrak{M}_x) \geqq \delta$" durch die schwächere Voraussetzung „*mit* $\delta(\mathfrak{M}_x) \geqq \delta$" ersetzen[16]). Dadurch ändert sich die Schranke (41) geringfügig. Die Beweise bleiben fast wörtlich die gleichen.

3. Man kann Satz 1 auf „Quasi-Polynome mit rationalen Koeffizienten und rationalen Exponenten" übertragen:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{b_\nu} \qquad \begin{pmatrix} b_0 > b_1 > \cdots > b_n > 0 \\ a_0 > 0 \end{pmatrix}\ [17]).$$

Wir setzen noch voraus, daß $F(x) \geqq 0$ ist für jede ganze Zahl $x \geqq 0$.

Wir zeigen, daß die Folge

$$\mathfrak{F} = \{0, 1, [F(x)]\}, \qquad x \in \mathfrak{N}$$

eine Basis bildet. Dafür ist hinreichend, das von einer Teilfolge $\mathfrak{F}'$ nachzuweisen.

Wir bezeichnen mit a bzw. b den Hauptnenner der Zahlen a_ν bzw. b_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$. Es durchlaufe y alle natürlichen Zahlen (oder nur eine Folge von positiver Dichte). Wir setzen

$$x = (a\,y)^b.$$

Offenbar ist $F\left((a\,y)^b\right)$ ein Polynom in y mit *ganz*zahligen Koeffizienten und *ganz*zahligen Exponenten. Da alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind, gilt eine Ungleichung (41). Damit ist alles bewiesen.

4. Wie wir oben gesehen haben, ist in (51) eine Abschätzung für das $g(n, f, 1)$ der Kamkeschen Verallgemeinerung des Waring-Hilbertschen

[16]) Dabei bedeutet $\delta(\mathfrak{A})$ die untere asymptotische Dichte einer Folge $\mathfrak{A}$. Sie ist definiert als

$$\delta(\mathfrak{A}) = \underline{\lim}_{x=1,2,\ldots} \frac{A(x)}{x}.$$

[17]) Das kann abgeschwächt werden zu

$$\begin{pmatrix} b_0 > b_1 > \cdots > b_n \\ a_0 > 0, \qquad b_0 > 0 \end{pmatrix}.$$

Satzes enthalten. Vielleicht ist es nicht uninteressant, zu bemerken, daß man auch aus dem Beweis von Herrn Kamke [7] eine Abschätzung herleiten kann. Das gelingt auch auf elementarem Wege, und zwar mit den vom Verfasser in [14] benutzten Methoden. Doch darauf wollen wir hier nicht näher eingehen.

Literatur.

[1] Chinčin, A. Ja.: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin 1951. — [2] Frobenius, G.: Über den Stridsbergschen Beweis des Waringschen Satzes. Berl. Ber. **1912**, 666—670 (1912). — [3] Hardy, G. H., u. J. E. Littlewood: Vgl. [8], S. 235ff. — [4] Hilbert, D.: Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem). Math. Ann. **67**, 281—300 (1909). — [5] Hua, L. K.: On a generalized Waring Problem. Proc. Lond. Math. Soc. **43**, 161—182 (1937). — [6] Hua, L. K.: On Waring's problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 199—202 (1938). — [7] Kamke, E.: Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes. Math. Ann. **83**, 85—112 (1921). — [8] Landau, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie I. Leipzig 1927. — [9] Landau, E.: Zum Waringschen Problem. Math. Z. **12**, 219—247 (1922). — [10] Linnik, J. V.: Vgl. [1], S. 33—61. — [11] Nečaev, V. I.: Das Waringsche Problem für Polynome. Trudy Mat. Inst. Steklov **38**, 190—243 (1951). — [12] Remak, R.: Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems. Math. Ann. **72**, 153—156 (1912). — [13] Rieger, G. J.: Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems. Math. Z. **58**, 281—283 (1953). — [14] Rieger, G. J.: Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Gießener Dissertation. Auszug: Arch. Math. **4**, 275—283 (1953). — [15] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften der Zahlen. Math. Ann. **107**, 649—690 (1933). — [16] Segal, B. J.: Waringsches Problem für Potenzen mit gebrochenen und irrationalen Exponenten. Trav. Inst. Steklov **5**, 73—86 (1934).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 15. Januar 1954).

KNOTHE, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 235—242 (1954)

Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse.

Von
HERBERT KNOTHE.

Einem Kreis läßt sich eine einparametrige Schar von kongruenten Dreiecken einbeschreiben. Jedes Dreieck läßt sich durch eine Drehung in jedes andere überführen, wobei die Tangenten des Kreises in den Eckpunkten in die Eckpunkttangenten des gedrehten Dreiecks übergehen. Dieser triviale Satz führt zu folgender Kennzeichnung der Ellipse:

Einer geschlossenen konvexen Kurve mit stetiger Tangente ohne geradlinige Stücke sollen Dreiecke in folgender Weise einbeschrieben werden können:

$$P_1 = \mathfrak{x}_1(t), \quad P_2 = \mathfrak{x}_2(t) = \mathfrak{x}_1(f(t)), \quad P_3 = \mathfrak{x}_3(t) = \mathfrak{x}_1(f_1(t))$$

seien die Eckpunkte eines Dreiecks in Ortsvektorendarstellung, t der Kurvenparameter. $\mathfrak{x}_1(t)$, stetig nach t differenzierbar, durchlaufe alle Kurvenpunkte, wenn t etwa von 0 bis 2π wandert. $\mathfrak{x}_2(t)$, $\mathfrak{x}_3(t)$ mögen stetig von t abhängen. Jeder Kurvenpunkt sei die i-te Ecke $\mathfrak{x}_i(t)$ nur eines einbeschriebenen Dreiecks. Die Seite $\mathfrak{x}_2(t), \mathfrak{x}_3(t)$ sei die Seite $\mathfrak{x}_1(t'), \mathfrak{x}_2(t')$ $(t \neq t')$ eines anderen Dreiecks. Bei einer affinen Abbildung zweier beliebiger Dreiecke aufeinander sollen auch die Eckpunkttangenten ineinander übergeführt werden. Die Kurve ist eine Ellipse, wenn ein Zyklus

$$\mathfrak{x}_1(t), \ \mathfrak{x}_2(t), \ \mathfrak{x}_3(t); \quad \mathfrak{x}_1(t') = \mathfrak{x}_2(t), \ \mathfrak{x}_2(t') = \mathfrak{x}_3(t), \ \mathfrak{x}_3(t') \ldots$$

unendlich ist oder eine Periode > 4 besitzt.

Beweis. Nehmen wir ein Dreieck P_1, P_2, P_3. Den Schnittpunkt der Tangenten in P_1 und P_2 nennen wir P_1', den der Tangenten in P_2 und P_3 P_2'. Nach Voraussetzung gibt es auch ein einbeschriebenes Dreieck P_2, P_3, P_4 unserer Schar. P_3' sei der Schnittpunkt der Tangenten in P_3, P_4. P_3, P_4 wiederum sind Eckpunkte eines Dreiecks P_3, P_4, P_5 usw. Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall. Die Folge der Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sei unendlich, d.h. alle P_i seien voneinander verschieden. Nennen wir die affine Transformation die P_1, P_2, P_3 in P_2, P_3, P_4 überführt, A, so gilt nach Voraussetzung

$$A P_1 = P_2, \quad A P_1' = P_2', \quad A P_2 = P_3, \quad A P_2' = P_3', \quad A P_3 = P_4.$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt

$$A P_3' = P_4', \quad A P_4 = P_5$$

($P_i' =$ Schnittpunkt der Tangenten in P_i, P_{i+1}), was besagt, daß A auch P_2, P_3, P_4 in P_3, P_4, P_5 überführt. Allgemein wird durch A das Dreieck P_i, P_{i+1}, P_{i+2} in $P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}$ transformiert, und durch A^n das Dreieck

P_i, P_{i+1}, P_{i+2} in P_{i+n}, P_{i+n+1}, P_{i+n+2}. Da die Punkte P_i auf der Kurve mindestens einen Häufungspunkt besitzen, lassen sich hinreichend große ganzzahlige Werte n so bestimmen, daß die n-te Potenz A^n der Transformationsmatrix von A beliebig wenig von der Einheitsmatrix abweicht. Die Determinante ist daher gleich 1. Die affine Transformation A, die wir als homogen annehmen dürfen, ist äquivalent einer Drehung um einen Winkel, der ein irrationales Vielfaches von 2π ist. Da man durch Aufeinanderfolge solcher Drehungen jede Richtung beliebig nah an jede andere Richtung heranbringen kann, da weiter etwa die Seiten $\mathfrak{x}_1(t) \to \mathfrak{x}_2(t)$ sich stetig um Winkel von 0 bis 2π drehen, ohne für zwei verschiedene t Werte gleichsinnig parallel zu sein, wenn $\mathfrak{x}_1(t)$ die Kurve durchläuft, erkennen wir: Zu zwei beliebigen Dreiecken unserer Schar lassen sich immer Transformationen A^n finden, die sich beliebig wenig von der affinen Transformation unterscheiden, die die beiden Dreiecke ineinander transformiert. Aus Stetigkeitsgründen folgt daher, daß die Kurve eine eingliedrige Gruppe von affinen Transformationen in sich zuläßt. Sie ist daher eine Ellipse.

2. Fall. Die Folge der Dreiecke P_1, P_2, P_3; P_2, P_3, P_4; ... ist geschlossen (bildet einen Zyklus), d.h. nach n Schritten kommt man zum Ausgangsdreieck zurück. Es ist dann A^n gleich der identischen Abbildung. Die Determinante der Transformationsmatrix von A ist wieder 1. A ist äquivalent einer Drehung um einen Winkel, der ein rationales Vielfaches von 2π ist. Die Periode n muß für sämtliche Ausgangsdreiecke dieselbe sein. Zum Beweise nehmen wir zwei Dreiecke P_1, P_2, P_3; $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ und nennen die affine Transformation, die P_i in $\bar{P}_i$ überführt, B. A transformiere P_1, P_2, P_3 in P_2, P_3, P_4. $\bar{A}$ transformiere $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ in $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Es ist dann $BAB^{-1} = \bar{A}$, daher haben $A, \bar{A}$ dieselbe Periode.

Weiter erkennt man, daß B alle Punkte des Zyklus P_i in die Punkte $\bar{P}_i$ des anderen Zyklus transformiert. A ist äquivalent einer Drehung um den Winkel $2\pi \frac{m}{n}$ (m, n teilerfremde ganze Zahlen).

Wir setzen jetzt

$$P_1 = \mathfrak{x}_1(t), \quad P_2 = \mathfrak{x}_1(f(t)), \quad P_3 = \mathfrak{x}_1(f_1(t)), \ldots \quad P_i = \mathfrak{x}_1(f_{i-2}(t)), \ldots,$$

wobei die $f_i(t)$ monoton wachsende stetige Funktionen von t sind. Außerdem ist

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(t) = f(f(t)), \quad f_2(t) = f(f(f(t))), \ldots \\ f_i(t + 2\pi) = f_i(t) + 2\pi \\ f_i(t) > f_k(t) \quad \text{für} \quad i > k \\ f_{n-1}(t) = t + 2\pi m. \end{cases}$$

Es ist weiter

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = \sigma(t)\{a_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3)\}$$

mit konstanten a_1, b_1. Führen wir

$$\tau = 2\pi \frac{\int_0^t \sigma(x)\,dx}{\int_0^{2\pi} \sigma(x)\,dx}$$

als neue Veränderliche ein und nennen dann τ wieder t, so wird aus (2):

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = a_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3). \tag{3}$$

Die Funktionen $f_i(t)$ dürfen wir nicht ohne weiteres als nach t differenzierbar annehmen. Wir gehen deshalb zu Differenzenquotienten über und schreiben:

$$\begin{cases} \frac{\Delta \mathfrak{x}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t}\{a_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) + \mathfrak{v}_2\} \\ \frac{\Delta \mathfrak{x}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta f_{i-2}}{\Delta t}\{a_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) + \mathfrak{v}_i\} \end{cases} \tag{3'}$$

mit konstanten a_i, b_i. Hierin gilt

$$\lim_{\Delta t \to 0} \text{Länge von } \mathfrak{v}_i = 0. \tag{4}$$

Wir betrachten jetzt das von den Punkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ gebildete Dreieck. Sein doppelter Inhalt sei

$$I = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3). \tag{5}$$

Aus (3), (3'), (4), (5) folgt

$$\frac{\Delta \log I}{\Delta t} = a_1 + b_1 + \varepsilon_1 - \frac{\Delta f}{\Delta t}(b_2 + \varepsilon_2) - \frac{\Delta f_1}{\Delta t}(a_3 + \varepsilon_3). \tag{6}$$

Die ε_i sind nach (3), (3'), (4) Funktionen von t, Δt, für die

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_i = 0$$

gilt. Hieraus entnimmt man

$$I = \text{const} \cdot e^{(a_1+b_1)t - b_2 f(t) - a_3 f_1(t)} \tag{7}$$

$a_1 + b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_3 = 0$ ist nicht möglich, da in diesem Falle ein Dreierzyklus vorläge, wie aus (3), (3') hervorgeht. I muß seinen Wert behalten bei zyklischer Vertauschung der $t, f(t), f_1(t), \ldots, f_{n-2}(t)$, denn alle Dreiecke des Zyklus haben, wie oben gezeigt wurde, denselben Inhalt. Da I außerdem seinen Wert nach einmaligem Durchlaufen der Kurve, d.h. bei Zunahme von $t, f(t), f_1(t)$ um 2π, nicht ändert, folgt

$$a_1 + b_1 - b_2 - a_3 = 0 \tag{8}$$

und

$$\begin{cases} (a_1 + b_1)\,t - b_2 f(t) - a_3 f_1(t) & = \varrho(t) \\ (a_1 + b_1) f(t) - b_2 f_1(t) - a_3 f_2(t) & = \varrho(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (a_1 + b_1) f_{n-3}(t) - b_2 f_{n-2}(t) - a_3 t & = \varrho(t) + 2\pi m a_3 \\ (a_1 + b_1) f_{n-2}(t) - b_2 t - a_3 f(t) & = \varrho(t) + 2\pi m b_2 + 2\pi m a_3. \end{cases} \tag{9}$$

Nach (8) hat die Matrix dieses Gleichungssystems höchstens den Rang $n-1$. Wie leicht zu zeigen ist, kann der Rang bei reellen a_i, b_i höchstens auf $n-2$ herabsinken (für gerades n). In diesem Falle nimmt das Gleichungssystem (die Determinante ist eine Zirkulante) die Form an

$$(10)\qquad \begin{cases} t - f_1(t) = \varrho(t) \\ f(t) - f_2(t) = \varrho(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n-2}(t) - t = \varrho(t) + 2\pi m \\ f_{n-2}(t) - f(t) = \varrho(t) + 2\pi m. \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst den ersten Fall (Rang der Matrix (9) $= n-1$). Aus (9) folgt mit konstanten $\varkappa_i$:

$$t = \varkappa_1 + \varkappa_2 \varrho(t) + \varkappa_3 \sigma(t)$$
$$f(t) = \varkappa_4 + \varkappa_5 \varrho(t) + \varkappa_6 \sigma(t)$$
$$f_1(t) = \varkappa_7 + \varkappa_8 \varrho(t) + \varkappa_9 \sigma(t)$$

und weiter:

$$(11)\qquad \alpha_1 t + \alpha_2 f(t) + \alpha_3 f_1(t) = \text{const},$$

wobei keine zwei α_i verschwinden. Diese Gleichung bleibt ebenfalls bestehen, wenn $t, f(t), f_1(t)$ durch $f(t), f_1(t), f_2(t)$ ersetzt werden. Wiederum muß

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

sein. Nehmen wir an, der Rang der Matrix

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

sei $n-1$. Es ist dann

$$t = \beta_1 + \beta_2 \lambda(t)$$
$$f(t) = \beta_3 + \beta_4 \lambda(t)$$

mit konstanten β_i; hieraus folgt

$$(13)\qquad \begin{cases} f(t) = t + \gamma \\ f_1(t) = t + 2\gamma \end{cases} \qquad (\gamma = \text{const}).$$

Ist der Rang der Matrix (12) $n-2$, so läßt sich (11) in die Form bringen:

$$(14)\qquad \begin{cases} t - f_1(t) = \varkappa \\ f(t) - f_2(t) = \varkappa \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n-2}(t) - t = \varkappa + 2\pi m \end{cases}$$

oder

$$(15)\qquad \begin{cases} f_1(t) = t - \varkappa \\ f_3(t) = t - 2\varkappa . \end{cases}$$

2. Fall. Der Rang der Matrix des Gleichungssystems (9) sei $n-2$, so daß (10) gilt. $t, f_1(t), f_3(t), \ldots$ d.h. alle $f_i(t)$ und t (i ungerade) unterscheiden sich, wie aus (10) zu ersehen ist, nur um eine additive Konstante, so daß wiederum die Gln. (15) bestehen. Nach (3), (3') haben wir somit in allen Fällen ein Differentialgleichungssystem gefunden

$$(16)\qquad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = a_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) \\ \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt} = a_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_i(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) \\ \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt} = a_k(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) + b_k(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3), \end{cases}$$

wobei man gemäß (13), (15) als $\mathfrak{x}_i(t)$, $\mathfrak{x}_k(t)$ entweder $\mathfrak{x}_2(t)$, $\mathfrak{x}_3(t)$ oder $\mathfrak{x}_3(t)$, $\mathfrak{x}_5(t)$ annehmen kann. Da alle Zyklen affinverwandt sind, können wir auch schreiben:

$$(17)\qquad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = \alpha_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) + \beta_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_k) \\ \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt} = \alpha_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) + \beta_2(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_k) \\ \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt} = \alpha_3(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) + \beta_3(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_i) \end{cases}$$

mit konstanten α_i, β_i. Die Matrix der affinen Transformation, die $\mathfrak{x}_1(0)$, $\mathfrak{x}_i(0)$, $\mathfrak{x}_k(0)$ in $\mathfrak{x}_1(t)$, $\mathfrak{x}_i(t)$, $\mathfrak{x}_k(t)$ überführt, heiße $A(t) = A$. Es ist also

$$(18)\qquad \begin{cases} A\left(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_i(0)\right) = \mathfrak{x}_1(t) - \mathfrak{x}_i(t) \\ A\left(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_k(0)\right) = \mathfrak{x}_1(t) - \mathfrak{x}_k(t) . \end{cases}$$

Differentiation nach t liefert

$$\frac{dA}{dt}\left(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_i(0)\right) = \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} - \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}\left(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_k(0)\right) = \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} - \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt} .$$

Nach (17) und (18) folgt

$$\frac{dA}{dt}\left(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_i(0)\right) = A\left(\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}\Big|_0 - \frac{d\mathfrak{x}_i}{dt}\Big|_0\right)$$

$$\frac{dA}{dt}\left(\mathfrak{x}_1(0) - \mathfrak{x}_k(0)\right) = A\left(\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt}\Big|_0 - \frac{d\mathfrak{x}_k}{dt}\Big|_0\right)$$

und hieraus

$$A^{-1}\frac{dA}{dt} = K = \text{konstante Matrix.}$$

Daher ist

$$A = e^{tK}. \tag{19}$$

Da man aus (17) weiter entnimmt, daß

$$k_1 \mathfrak{x}_1 + k_2 \mathfrak{x}_i + k_3 \mathfrak{x}_k = \mathfrak{v} \quad (k_i, \mathfrak{v}_0 \text{ konstant}) \tag{20}$$

d.h., daß unsere affinen Transformationen als homogen angenommen werden dürfen ($\mathfrak{v}_0$ Nullpunkt des Koordinatensystems), besagt (19), daß sie eine eingliedrige Gruppe bilden. Da die Kurve somit eine eingliedrige Gruppe von affinen Transformationen in sich zuläßt, ist sie eine Ellipse.

Als Anwendung wollen wir den Beweis für den folgenden bekannten Satz von W. BLASCHKE[1]) etwas einfacher gestalten und zugleich auf den R_n ausdehnen: *Die Ellipsoide sind die einzigen Lösungen der folgenden Extremalaufgabe: Ein konvexer Körper gegebenen Volumens ist so zu bestimmen, daß der größte Wert des Volumens aller einbeschriebenen Tetraeder möglichst klein wird.* Die Hauptschwierigkeit liegt darin, zu zeigen, daß das Ellipsoid der *einzige* Körper ist, der diese Extremalaufgabe löst Wir werden im folgenden den n-dimensionalen Fall behandeln, und zwar unter denselben Regularitätsbedingungen, wie BLASCHKE sie gefordert hat. Wir bemerken zunächst mit BLASCHKE, daß ein Extremalkörper K_n folgende einfach herzuleitende Eigenschaften besitzt:

A. Jeder Randpunkt von K_n ist Eckpunkt eines größten einbeschriebenen $(n+1)$-Flachs.

B. Hat K_n eine stetige Tangentenebene, so ist die Tangentenebene an K_n in jedem Eckpunkt P eines größten $(n+1)$-Flachs parallel zur gegenüberliegenden Seitenebene. Ein solches $(n+1)$-Flach wollen wir spezielles $(n+1)$-Flach nennen.

C. Ist $P_1, \ldots, P_{n+1}$ ein K_n einbeschriebenes größtes $(n+1)$-Flach, so ist es auch $P_1', \ldots, P_{n+1}'$, wenn nur die Geraden $P_i P_i'$ alle parallel sind. Diese Eigenschaft hat BLASCHKE für den Fall des R_2 angegeben. Sie kann ohne Modifikation des Beweises auf den R_n übertragen werden.

Es sei nun P ein Eckpunkt eines größten $(n+1)$-Flachs von K_n. Die in der P gegenüberliegenden Seitenebene E_{n-1} liegenden n Eckpunkte bilden ein spezielles n-Flach in dem durch die E_{n-1} aus K_n ausgeschnittenen K_{n-1}. Dieses n-Flach besitzt ebenfalls die unter A, B, C angeführten Eigenschaften, denn es muß ein K_{n-1} einbeschriebenes größtes n-Flach sein, womit B erfüllt ist. A, C sind erfüllt, weil die in C erwähnte Parallelenrichtung $P_i P_i'$ willkürlich gewählt werden kann, speziell also auch so, daß sie in die Ebene E_{n-1} fällt. Eine Seitenebene eines größten n-Flachs des Körpers K_{n-1} schneidet aus ihm einen K_{n-2} aus, dessen einbeschriebenen größten $(n-1)$-Flache ebenfalls die Eigenschaften A, B, C besitzen. Schließlich gelang man zu einem K_2. BLASCHKE hat bewiesen, daß ein K_2 mit den Eigenschaften A, B, C und der folgenden Eigenschaft D eine Ellipse ist.

[1]) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. 2, Berlin 1923, S. 191 bis 197.

D. Bei allen größten $(n+1)$-Flachen mit gemeinsamer Ecke P liegen die P gegenüberliegenden Seitenflächen in einer E_{n-1}. Nehmen wir nämlich an, es gäbe zu einem Punkt P als Eckpunkt zwei größte $(n+1)$-Flache, so daß die P gegenüberliegenden Seitenflächen in zwei parallelen Ebenen E_{n-1}, E'_{n-1} lägen. Nach dem Vorangegangenen ließen sich dann zwei größte $(n+1)$-Flache finden mit P als Ecke, deren Seitenflächen in E_{n-1} bzw. E'_{n-1} lägen, und bei denen weiter zwei in E_{n-1} bzw. E'_{n-1} liegende E_{n-2}, E'_{n-2} parallel wären, ebenso zwei in diesen liegende $E_{n-3}, E'_{n-3}, \ldots, E_2, E'_2$. Die Ecken des ersten $(n+1)$-Flachs seien $P_1, \ldots, P_{n+1}$, die des zweiten $P'_1, \ldots, P'_{n+1}$. Bilden wir das $(n+1)$-Flach mit den Ecken $(1-\vartheta)\,P_i + P'_i\vartheta$, $0<\vartheta<1$ (vektorielle Addition), so ist dessen Inhalt größer als der von P_i oder P'_i[2]). Andererseits liegt es in K_n, was der Voraussetzung widerspricht, daß P_i ein größtes $(n+1)$-Flach ist. Ebenso zeigt man: Haben zwei größte $(n+1)$-Flache j Eckpunkte gemeinsam, so liegen die übrigen $n+1-j$ Eckpunkte in einer E_{n-j}.

Unter Benutzung der oben erwähnten Tatsache, daß alle K_2 Ellipsen sind, zeigen wir jetzt mit Hilfe eines Induktionsschlusses, daß K_n ein Ellipsoid sein muß. Wir setzen voraus, jeder K_{n-1} sei ein Ellipsoid. Greifen wir jetzt einen Randpunkt P von K_n heraus, so können wir durch eine affine Transformation erreichen, daß der zu P gehörige K_{n-1} (Schnitt der P gegenüberliegenden E_{n-1} mit K_n) eine Kugel wird, deren sämtliche speziellen n-Flache ja regulär sind, und daß diese mit dem zugehörigen P reguläre $(n+1)$-Flache von K_n bilden. Die ganze Konfiguration dieser $(n+1)$-Flache wird durch eine Drehung um die Achse P Mittelpunkt von K_{n-1} in sich übergeführt. Da die Tangentenebenen an K_n in den Randpunkten von K_n parallel zu den gegenüberliegenden Seitenflächen dieser regulären speziellen $(n+1)$-Flache sind, umhüllen sie einen Rotationskegel mit der Drehachse P—Mittelpunkt von K_{n-1}. Nunmehr projizieren wir diese Konfiguration orthogonal auf eine E_2. Die Projektionsrichtung möge parallel zu E_{n-1} sein. Das Bild eines speziellen $(n+1)$-Flachs mit P als Spitze, dessen eine $(n-2)$-dimensionale in E_{n-1} liegende Kante parallel zur Projektionsrichtung ist, ist ein Dreieck. Zwei Punkte dieses Dreiecks, $\bar{P}, \bar{P}'$, liegen auf dem Rande der Projektion von K_n. Ein Punkt $\bar{P}''$, das Bild der $(n-2)$-dimensionalen Kante, liegt im Inneren. $\bar{P}$ sei das Bild von P. $\bar{P}'$, ebenso $\bar{P}''$ liegt dann auf dem Bilde (Gerade) der E_{n-1}, die P gegenüberliegt. Die Verlängerung von $\bar{P}', \bar{P}''$ über $\bar{P}''$ hinaus schneide R in $\bar{P}'''$. $\bar{P}\,\bar{P}'\,\bar{P}'''$ ist ein dem Rande R einbeschriebenes Dreieck. Die Tangente T in $\bar{P}$ an R ist parallel zu $\bar{P}'\,\bar{P}'''$. Die Tangente T' in $\bar{P}'$ ist parallel zu $\bar{P}\,\bar{P}''$. Die Tangente in $\bar{P}'''$ läuft durch den Schnittpunkt von T' mit der Verbindungsgeraden $\bar{P}$ Mittelpunkt von $\bar{P}'\,\bar{P}'''$. Das Teilverhältnis $\bar{P}', \bar{P}'', \bar{P}'''$ ist konstant. Nimmt man weiter $\bar{P}'''$ als Projektion der Spitze P''' eines speziellen $(n+1)$-Flachs, so muß die

[2]) Der Beweis folgt aus dem Satz: Gilt für ein Paar von je n positiven Zahlen a_i, b_i: $\Pi a_i = \Pi b_i$, so ist: $\Pi((1-\vartheta)\,a_i + \vartheta\, b_i) \geq \Pi a_i$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $a_i = b$ gilt $(0<\vartheta<1)$.

Projektion der P''' gegenüberliegenden E_{n-1} durch $\overline{P}$ gehen. $\overline{P}\,\overline{P}'''$ ist also auch die Seite eines weiteren dem Rande R einbeschriebenen Dreiecks, das Projektionsbild eines speziellen $(n+1)$-Flachs ist. Schließlich können diese Dreiecke außer im ebenen Fall keinen Dreierzyklus bilden. Bei einem Dreierzyklus nämlich müßten die Seiten eines Dreiecks parallel zu den Tangenten in den gegenüberliegenden Punkten sein, da die Tangente in $\overline{P}$ an R parallel zu $\overline{P}'\,\overline{P}'''$ ist. Das ist aber außer im ebenen Fall nicht möglich, da die Tangente in $\overline{P}'$ parallel zu $\overline{P}\,\overline{P}''$ ist. Ein Viererzyklus ist deshalb ausgeschlossen, weil sonst zwei Punkte des konvexen Körpers mit parallelen Tangentenebenen-Eckpunkten größter $(n+1)$-Flache wären, die eine E_{n-1} gemein hätten. Daß dieser Fall nicht vorkommen kann, macht man sich leicht klar, wenn man den zugehörigen K_{n-1} affin in eine Kugel transformiert. Alle Forderungen, die wir zu Anfang dieser Arbeit an eine Eilinie stellten, sind somit erfüllt. Jede zweidimensionale Projektion des K_n ist damit als Ellipse erkannt. Damit ist auch nach einem bekannten leicht zu beweisenden Satz von BLASCHKE jede 3- und, wie leicht zu beweisen, jede $(n-i)$-dimensionale Projektion und K_n selbst ein Ellipsoid.

P. O. Box 122 Holloman, New Mexico (U.S.A.).

(Eingegangen am 29. September 1953.)

FÖLLINGER, O.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 243—254 (1954)

Kontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung.

Von
OTTO FÖLLINGER.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich das Variationsproblem

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = \text{Min!}$$

unter der von den üblichen Voraussetzungen abweichenden Annahme behandelt, daß das Gefälle y' der zulässigen Kurven durch die Ungleichung $g(x, y) \leq y' \leq G(x, y)$ eingeschränkt ist, wobei $g(x, y)$ und $G(x, y)$ gegebene Funktionen sind, und zwar wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für gewisse Klassen diskontinuierlicher Lösungen angegeben. In der vorliegenden Arbeit soll diese Variationsaufgabe für einen gewissen Typ kontinuierlicher Lösungen untersucht werden, nämlich für solche Lösungen C_0, die aus zwei glatt ineinander übergehenden Bögen bestehen, von denen der erste abgesehen von seinem Endpunkt weder minimales noch maximales Gefälle besitzt, während der zweite die Maximalsteigung $y' = G(x, y)$ aufweist. Für den Spezialfall $g(x, y) = a$, $G(x, y) = b$ mit gegebenen Konstanten a, b wurde dieses Problem schon von B. FLODIN[2]) behandelt. Die im folgenden verwandte Methode zur Behandlung des Problems schließt sich an das in meiner früheren Arbeit benutzte Verfahren an, und daher ist auch die Bezeichnungsweise weitgehend dieselbe wie dort. Die erhaltenen Resultate werden zur Untersuchung einer differentialgeometrischen Fragestellung verwandt, nämlich der schon von ZERMELO[3]) angeschnittenen Frage nach den Geodätischen mit beschränkter Steigung („Gebirgsstraßenproblem").

1. Voraussetzungen.

In dem offenen Bereich $\mathfrak{G}_2$ der x, y-Ebene seien zwei Funktionen $g(x, y)$ und $G(x, y)$ der Klasse $C^{(2)}$ gegeben mit $g(x, y) < G(x, y)$. In $\mathfrak{G}_2$ seien die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ mit $x_1 < x_2$ gelegen. Weiterhin werde ein Bereich $\mathfrak{G}_3$ des x, y, y'-Raumes definiert durch $\mathfrak{G}_3$: $(x, y) \in \mathfrak{G}_2$, $g(x, y) \leq y' \leq G(x, y)$.

Die stückweis glatte Kurve C: $y = \varphi(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, mit $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$ heiße zulässig, wenn die ihr zugeordnete Kurve $\dot{C}$: $y = \varphi(x)$,

[1]) FÖLLINGER, O.: Diskontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung. Math. Ann. **126**, 466—480 (1953).

[2]) FLODIN, B.: Über eine Art stetiger Lösungen bei Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung. Acta Soc. Sci. fenn., Comment. phys.-math. **15**, Nr. 20 (1951).

[3]) ZERMELO, E.: Zur Theorie der kürzesten Linien. Jb. DMV **11**, 184—187 (1902).

$y' = \varphi'(x)$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$, in $\mathfrak{G}_3$ liegt. Der Integrand $f(x, y, y')$ des Variationsintegrals sei in dem offenen Bereich $\overline{\mathfrak{G}}_3 > \mathfrak{G}_3$ von der Klasse $C^{(4)}$. Die Definition des relativen, starken, eigentlichen Minimums ist dann die übliche.

Im folgenden wird ein glattes Kurvenstück C_0 betrachtet, welches aus den beiden Bögen E_0: $y = \varphi_0(x)$, $x_1 \leqq x \leqq x_0$, und $\overline{E}_0$: $y = \overline{\varphi}_0(x)$, $x_0 \leqq x \leqq x_2$, besteht, welche im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ zusammentreffen und für die gilt: $g(x, \varphi_0(x)) < \varphi_0'(x) < G(x, \varphi_0(x))$ in $x_1 \leqq x < x_0$, $p_0 = \varphi_0'(x_0) = G(x_0, y_0)$, $\overline{\varphi}_0'(x) = G(x, \overline{\varphi}_0(x))$ in $x_0 \leqq x \leqq x_2$, insbesondere also wegen $\overline{p}_0 = \overline{\varphi}_0'(x_0) = G(x_0, y_0)$ $\overline{p}_0 = p_0$. $\dot{E}_0$ liegt also mit Ausnahme des Endpunktes im Innern von $\mathfrak{G}_3$, während $\dot{\overline{E}}_0$ auf dem oberen Rand von $\mathfrak{G}_3$ gelegen ist, und beide Bögen haben den Punkt $\dot{P}_0 = (x_0, y_0, p_0)$ gemeinsam.

Da $\dot{E}_0$ bis auf seinen Endpunkt im $\mathfrak{G}_3$-Innern gelegen ist, ergibt sich durch geringe Abänderung der bekannten Schlußweisen, daß E_0, also auch C_0, nur dann ein Minimum liefert, wenn E_0 eine Extremale ist und die LEGENDRE-, JACOBI- und WEIERSTRASS-Bedingung erfüllt. Es wird daher im folgenden vorausgesetzt, daß diese Bedingungen in der verschärften Form erfüllt sind.

Setzt man $\varphi_0''(x_0) = y_0''$ und beachtet, daß $\overline{y}_0'' = \overline{\varphi}_0''(x_0) = G_x(x_0, y_0) + G_y(x_0, y_0)\, p_0$, so ist $G(x, \varphi_0(x)) - \varphi_0'(x) = (x - x_0)\,(\overline{y}_0'' - y_0'' + \eta\,(x - x_0))$, $x_1 \leqq x \leqq x_0$, mit $\lim\limits_{x \to x_0} \eta(x - x_0) = 0$. Da $G(x, \varphi_0(x)) - \varphi_0'(x) > 0$ in $x_1 \leqq x \leqq x_0$, muß also $\overline{y}_0'' - y_0'' \leqq 0$ sein. Im folgenden werde stärker vorausgesetzt, daß $\overline{y}_0'' - y_0'' < 0$ ist, daß also E_0 und $\overline{E}_0$ in P_0 eine Berührung von genau erster Ordnung haben.

Alle bisher gemachten Voraussetzungen seien kurz durch (V) symbolisiert.

2. Die Berührungskurve.

2.1. Sei $P_0' = (x_0', \varphi_0(x_0'))$ derjenige Punkt von E_0, dessen konjugierter Punkt P_0 ist. Da die verschärfte JACOBI-Bedingung erfüllt ist, gilt $x_0' \notin [x_1, x_0]$. Durch den Punkt $Q = (\xi, \varphi_0(\xi))$, $x_0' < \xi < x_0$, geht ein Extremalenbüschel $\mathfrak{b}: y = \Phi(x, \alpha)$, $\xi \leqq x \leqq x_0 + h$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, welches E_0 für $\alpha = \alpha_0$ enthält. Mit Ausnahme von Q bildet es ein Feld um E_0, dessen Gefällefunktion $p(x, y)$ sei. Es werde der Schnitt der durch $y' = p(x, y)$ dargestellten Fläche des x, y, y'-Raumes mit dem oberen $\mathfrak{G}_3$-Rand $y' = G(x, y)$ untersucht, also die Gleichung $G(x, \Phi(x, \alpha)) - \Phi_x(x, \alpha) = 0$ nach x aufgelöst. Diese Gleichung ist erfüllt für $x = x_0$, $\alpha = \alpha_0$, und außerdem ist $\frac{d}{dx}\{G(x, \Phi(x, \alpha)) - \Phi_x(x, \alpha)\}|_0$[4]) $= \overline{y}_0'' - y_0'' < 0$. Daher existiert ein $\delta > 0$ derart, daß in $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$ eine stetig differenzierbare Funktion $x = \hat{x}(\alpha)$ erklärt ist mit

$$G(\hat{x}, \Phi(\hat{x}, \alpha)) - \Phi_x(\hat{x}, \alpha) = 0, \quad |\alpha - \alpha_0| \leqq \delta, \tag{1}$$

und $\hat{x}(\alpha_0) = x_0$. Das glatte JORDAN-Kurvenstück $\hat{C}$: $x = \hat{x}(\alpha)$, $y = \Phi(\hat{x}(\alpha), \alpha) = \hat{y}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leqq \delta$, durch P_0 werde als Berührungskurve des Extremalenbüschels $\mathfrak{b}$ bezeichnet.

[4]) Das Zeichen $|_0$ soll andeuten, daß im vorhergehenden Ausdruck $x = x_0$ und $\alpha = \alpha_0$ zu setzen ist.

2.2. Wegen $G(\hat{x}, \Phi(\hat{x}, \alpha)) - \Phi_x(\hat{x}, \alpha) = 0$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$ und $\frac{d}{dx}(G(x, \Phi) - \Phi_x)|_0 < 0$ kann $\delta > 0$ so gewählt und ein $\varepsilon > 0$ derart bestimmt werden, daß die Funktion $d(x, \alpha) = G(x, \Phi(x, \alpha)) - \Phi_x(x, \alpha) > 0$ ist in $x_0 - \varepsilon \leq x < \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$. Da außerdem $G(x, \varphi_0(x)) - \varphi_0'(x) > 0$ in $x_1 - h \leq x < x_0$, dürfen δ und ε so angenommen werden, daß $d(x, \alpha) > 0$ in $\xi \leq x \leq x_0 - \varepsilon$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$. Infolgedessen liegt die Fläche $y' = p(x, y)$ in $\mathfrak{G}_3$ und hat mit dem $\mathfrak{G}_3$-Rand lediglich die Kurve $\hat{C}$: $x = \hat{x}(\alpha)$, $y = \hat{y}(\alpha)$, $y' = p(\hat{x}(\alpha), \hat{y}(\alpha))$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, gemeinsam.

Es soll nun das Verhalten von $\hat{C}$ in P_0 untersucht werden. Aus (1) folgt durch Differentiation nach α für den Anstieg von $\hat{C}$

$$\hat{p}(\alpha) = \frac{\dot{\hat{y}}(\alpha)}{\dot{x}(\alpha)} = \Phi_x(\hat{x}, \alpha) + \frac{G_x(\hat{x}, \hat{y}) + G_y(\hat{x}, \hat{y})\, \Phi_x(\hat{x}, \alpha) - \Phi_{xx}(\hat{x}, \alpha)}{\frac{\Phi_{x\alpha}(\hat{x}, \alpha)}{\Phi_\alpha(\hat{x}, \alpha)} - G_y(\hat{x}, \hat{y})}$$

Insbesondere in P_0 ist also, wenn man $\hat{p}(\alpha_0) = \hat{p}_0$ setzt:

$$\hat{p}_0 - p_0 \frac{y_0'' - \bar{y}_0''}{G_y(x_0, y_0) - \frac{\Phi_{x\alpha}(x_0, \alpha_0)}{\Phi_\alpha(x_0, \alpha_0)}}.$$

Nun ist $\Phi_\alpha(x, \alpha_0)$ eine in $x = \xi$ verschwindende, nichttriviale Lösung der zu E_0 gehörigen JACOBIschen Differentialgleichung (J) und daher $\Phi_\alpha(x, \alpha_0) = c\, \Delta(x, \xi)$ mit $c = c(\xi) \neq 0$ und $\Delta(x, \xi) = u_2(\xi)\, u_1(x) - u_1(\xi)\, u_2(x)$, $x_1 - h \leq x \leq x_0 + h$, $x_0' \leq \xi \leq x_0$, wobei $u_1(x)$, $u_2(x)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von (J) ist. Es ist daher

$$\hat{p}_0(\xi) = p_0 + \frac{y_0'' - \bar{y}_0''}{G_y(x_0, y_0) - \frac{\Delta_x(x_0, \xi)}{\Delta(x_0, \xi)}}, \quad x_0' < \xi < x_0.$$

Durch diese Gleichung ist die Funktion $\hat{p}_0(\xi)$ auch in x_0 und x_0' erklärt, denn wegen $\Delta(x_0, x_0) = 0 = \Delta(x_0, x_0')$, $\Delta_x(x_0, x_0)$, $\Delta_x(x_0, x_0') \neq 0$ ist $\hat{p}_0(x_0) = p_0 = \hat{p}_0(x_0')$.

Da $\Delta(x_0, \xi)\, \Delta_{x\xi}(x_0, \xi) - \Delta_x(x_0, \xi)\, \Delta_\xi(x_0, \xi) = \frac{\varkappa^2}{R(x)\, R(\xi)}$ mit $\varkappa \neq 0$ und $R(x) = f_{y'y'}(x, \varphi_0(x), \varphi_0'(x)) > 0$ in $x_1 - h \leq x \leq x_0'$, ist

$$\frac{d}{d\xi}\hat{p}_0(\xi) = \frac{\varkappa^2 (y_0'' - \bar{y}_0'')}{R(x_0)\, R(\xi)\, \Delta^2(x_0, \xi) \left\{ G_y(x_0, y_0) - \frac{\Delta_x(x_0, \xi)}{\Delta(x_0, \xi)} \right\}^2} > 0 \tag{2}$$

in $x_0' \leq \xi \leq x_0$. Bezeichnet man den Tangentenwinkel von $\hat{C}$ in P_0 mit $\hat{\Theta}_0(\xi)$, so ist $\operatorname{tg} \hat{\Theta}_0(\xi) = \hat{p}_0(\xi)$. Hierdurch ist der zunächst nur in $x_0' < \xi < x_0$ definierte Winkel $\hat{\Theta}_0(\xi)$ auch in $\xi = x_0'$ und $\xi = x_0$ erklärt. Wegen $\operatorname{tg} \hat{\Theta}_0(x_0') = p_0 = \operatorname{tg} \hat{\Theta}_0(x_0)$ ist $\hat{\Theta}_0(x_0) = \hat{\Theta}_0(x_0') + n\pi$. Da auf Grund von (2) $\hat{\Theta}_0(\xi)$ eine monoton steigende Funktion darstellt, ist $n > 0$. $\hat{p}_0(\xi) = p_0$ gilt nur für $\xi = x_0$ und $\xi = x_0'$, jedoch nicht an einer Zwischenstelle. Daher muß $n = 1$ sein, also $\hat{\Theta}_0(x_0) = \hat{\Theta}_0(x_0') + \pi$. Man hat so das Ergebnis:

Während der Träger Q des Extremalenbüschels $\mathfrak{b}$ von P_0' nach P_0 wandert, dreht sich die Berührungskurventangente in P_0 aus der durch die E_0- (und $\overline{E}_0$-) Tangente charakterisierten Grenzlage monoton um den Winkel π in dieselbe Grenzlage.

2.3. Sei nun Q so gewählt, daß $P_0' < Q < P_1$. Dann bildet das zugehörige Extremalenbüschel $\mathfrak{b}: y = \psi(x, \alpha)$, $x_1 - k \leq x \leq \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, ein Feld um E_0. Weiterhin sei $\overline{\mathfrak{b}}: y = \overline{\varphi}(x, \beta)$, $x_0 - h \leq x \leq x_2 + h$, $|\beta - \beta_0| \leq \overline{\delta}$, die Integralkurvenschar der Differentialgleichung $y' = G(x, y)$, welche $\overline{E}_0$ für $\beta = \beta_0$ enthält. Sie werde im folgenden als allgemeines Integral von $y' = G(x, y)$ bezeichnet. Es werde der Schnitt von $\overline{\mathfrak{b}}$ mit $\hat{C}$ betrachtet: $\overline{\varphi}(\hat{x}(\alpha), \beta) = \hat{y}(\alpha)$. Da diese Gleichung für $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ erfüllt und außerdem $\overline{\varphi}_\beta(x, \beta) \neq 0$ ist im ganzen Definitionsbereich des allgemeinen Integrals, existiert eine Funktion $\beta = b(\alpha)$ mit $\overline{\varphi}(\hat{x}(\alpha), b(\alpha)) = \hat{y}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, und $b(\alpha_0) = \beta_0$. Hieraus folgt $\dot{b}(\alpha_0) = \frac{\psi_\alpha(x_0, \alpha_0)}{\overline{\varphi}_\beta(x_0, \beta_0)} \neq 0$, d.h.: jede Kurve des allgemeinen Integrals mit $\beta \in |\beta - \beta_0| < \overline{\delta}$ schneidet $\hat{C}$ in genau einem Punkt, wenn nur $\overline{\delta} > 0$ genügend klein.

$\mathfrak{b}$ und $\overline{\mathfrak{b}}$ bilden ein Feld um C_0, in dem man durch $\beta = b(\alpha)$ α als gemeinsamen Scharparameter einführen kann. Dann ist $\overline{\mathfrak{b}}$: $y = \hat{\varphi}(x, b(\alpha)) = \overline{\psi}(x, \alpha)$, $\hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, wobei längs $\hat{C}$ $\overline{\psi}_x(\hat{x}, \alpha) = \overline{\varphi}_x(\hat{x}, b) = G(\hat{x}, \hat{y}) = \psi_x(\hat{x}, \alpha)$ gilt, die Kurven des Feldes also glatt sind.

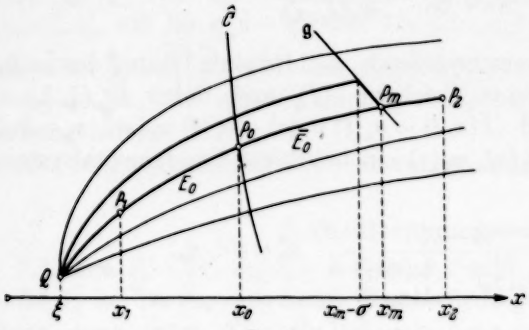

Fig. 1.

3. Herleitung einer notwendigen Bedingung.

3.1. Werde jetzt das Extremalenbüschel $\mathfrak{b}: y = \varphi(x, \alpha)$, $x_1 \leq x \leq x_0 + h$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, durch den Punkt P_1 betrachtet und dessen Berührungskurve $\hat{C}$. Mit seiner Hilfe soll eine spezielle Schar zulässiger Kurven konstruiert werden, welche C_0 enthält.

Dazu werde durch den Punkt $P_m = (x_m, y_m)$ mit $y_m = \overline{\varphi}_0(x_m)$, $x_0 < x_m \leq x_2$, die Gerade $\mathfrak{g}: x = x_m - \sigma$, $y = y_m - \tilde{p}\,\sigma$ gelegt, für deren Anstieg $\tilde{p}$ $g(x_m, y_m) < \tilde{p} < G(x_m, y_m)$ gelte. Mit $\mathfrak{g}$ werde die Kurvenschar $\overline{\mathfrak{b}}: y = \overline{\varphi}(x, \beta)$ zum Schnitt gebracht, was zu der Gleichung $\overline{\varphi}(x_m - \sigma, \beta) = y_m - \tilde{p}\,\sigma$ führt. Da sie für $\sigma = 0$, $\beta = \beta_0$ erfüllt und zudem $\overline{\varphi}_\beta(x_m, \beta_0) \neq 0$ ist, gibt es eine Funktion $\beta = b(\sigma)$ mit $b(0) = \beta_0$ und $\overline{\varphi}(x_m - \sigma, b(\sigma)) = y_m - \tilde{p}\,\sigma$. Aus dieser Identität folgt $\dot{b}(0) = \frac{y_m' - \tilde{p}}{\overline{\varphi}_\beta(x_m, \beta_0)} \neq 0$, da $y_m' = \overline{\varphi}_0'(x_m) = G(x_m, y_m) > \tilde{p}$. Man kann daher σ an Stelle von β als Scharparameter in $\overline{\mathfrak{b}}$ einführen und erhält dann

$$\overline{\mathfrak{b}}: \quad y = \overline{\varphi}(x, b(\sigma)) = \overline{\overline{\varphi}}(x, \sigma), \quad x_0 - h \leq x \leq x_2 + h, \quad |\sigma| < \sigma_0, \quad \sigma_0 > 0.$$

Jetzt werde $\overline{\mathfrak{b}}$ mit $\hat{C}$ geschnitten:

$$\overline{\overline{\varphi}}(\hat{x}(\alpha), \sigma) = \hat{y}(\alpha) = \varphi(\hat{x}(\alpha), \alpha). \tag{3}$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $\alpha=\alpha_0$, $\sigma=0$, und es ist

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\overline{\overline{\varphi}}(\hat{x},\sigma)-\varphi(\hat{x},\alpha)\right)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \sigma=0}}=\left(\overline{\overline{\varphi}}_x(x_0,0)-\varphi_x(x_0,\alpha_0)\right)\dot{\hat{x}}(\alpha_0)-\varphi_\alpha(x_0,\alpha_0)$$
$$=-\varphi_\alpha(x_0,\alpha_0)\neq 0.$$

Man kann daher (3) nach α auflösen und mit Hilfe der so erhaltenen Funktion $\alpha=a(\sigma)$ σ an Stelle von α als Scharparameter in $\mathfrak{b}$ einführen:

$$\mathfrak{b}:\quad y=\varphi\left(x,a(\sigma)\right)=\tilde{\varphi}(x,\sigma),\quad x_1-h\leq x\leq x_0+h,\quad |\sigma|<\sigma_0.$$

Die Berührungskurve $\hat{C}$ von $\mathfrak{b}$ stellt sich dann dar in der Form $\hat{C}: x=\hat{x}\left(a(\sigma)\right)=\check{x}(\sigma)$, $y=\hat{y}\left(a(\sigma)\right)=\check{y}(\sigma)$, $|\sigma|<\sigma_0$.

Jetzt werde eine Kurvenschar $\mathfrak{f}$ definiert durch

$$\mathfrak{f}:\quad \begin{aligned} &y=\tilde{\varphi}(x,\sigma), && x_1\leq x\leq\check{x}(\sigma)\\ &y=\overline{\overline{\varphi}}(x,\sigma), && \check{x}(\sigma)\leq x\leq x_m-\sigma\\ &y=y_m+\tilde{p}(x-x_m), && x_m-\sigma\leq x\leq x_m\\ &y=\overline{\varphi}_0(x), && x_m\leq x\leq x_2. \end{aligned}$$

Für $0\leq\sigma<\sigma_0$ ist jede Kurve dieser Schar zulässig, falls nur σ_0 hinreichend klein gewählt wird.

3.2. Das zu einem Minimum zu machende Integral werde längs einer Kurve der Schar $\mathfrak{f}$ betrachtet:

$$u(\sigma)=\int_{x_1}^{\check{x}(\sigma)} f\left(x,\tilde{\varphi}(x,\sigma),\tilde{\varphi}_x(x,\sigma)\right)dx+\int_{\check{x}(\sigma)}^{x_m-\sigma} f\left(x,\overline{\overline{\varphi}}(x,\sigma),\overline{\overline{\varphi}}_x(x,b)\right)dx+$$
$$+\int_{x_m-\sigma}^{x_m} f\left(x,y_m+\tilde{p}(x-x_m),\tilde{p}\right)dx+\int_{x_m}^{x_2} f\left(x,\overline{\varphi}_0(x),\overline{\varphi}_0'(x)\right)dx,\quad 0\leq\sigma<\sigma_0.$$

Durch die letzte Gleichung ist die Funktion $u(\sigma)$ in der ganzen Umgebung von $\sigma=0$ erklärt und stetig differenzierbar. Da C_0 ein relatives Minimum des Variationsproblems liefern soll, muß sie in $\sigma=0$ ein Minimum besitzen bezüglich aller Funktionswerte, für die $0\leq\sigma<\sigma_0$ gilt mit hinreichend kleinem σ_0. Daher muß $u_\sigma(0)\geq 0$ sein. Nun ist

$$u_\sigma(0)=\int_{x_1}^{x_0}\{f_y(x,\varphi_0,\varphi_0')\,\tilde{\varphi}_\sigma(x,0)+f_{y'}(x,\varphi_0,\varphi_0')\,\tilde{\varphi}_{\sigma x}(x,0)\}\,dx+$$
$$+\int_{x_0}^{x_m}\{f_y(x,\overline{\varphi}_0,\overline{\varphi}_0')\,\overline{\overline{\varphi}}_\sigma(x,0)+f_{y'}(x,\overline{\varphi}_0,\overline{\varphi}_0')\,\overline{\overline{\varphi}}_{\sigma x}(x,0)\}\,dx+$$
$$+f(x_m,y_m,\tilde{p})-f(x_m,y_m,y_m')+\check{x}_\sigma(0)\{f(x_0,y_0,p_0)-f(x_0,y_0,\overline{p}_0)\}.$$

Hierin verschwindet das letzte Glied wegen $p_0=\overline{p}_0$. Die beiden Integrale können durch partielle Integration umgeformt werden. Dabei wird aus dem ersten Integral

$$\int_{x_1}^{x_0}\tilde{\varphi}_\sigma(x,0)\left\{f_y(x,\varphi_0,\varphi_0')-\frac{d}{dx}f_{y'}(x,\varphi_0,\varphi_0')\right\}dx+f_{y'}(x,\varphi_0,\varphi_0')\,\tilde{\varphi}_\sigma(x,0)\Big|_{x_1}^{x_0}$$
$$=f_{y'}(x_0,y_0,p_0)\,\tilde{\varphi}_\sigma(x_0,0),$$

da E_0 eine Extremale ist und $\tilde{\varphi}_\sigma(x_1, 0) = 0$, da ja alle Extremalen von $\mathfrak{b}$ durch P_1 gehen und daher $\varphi_\alpha(x_1, \alpha) \equiv 0$, also auch $\tilde{\varphi}_\sigma(x_1, \sigma) \equiv 0$. Berücksichtigt man $\bar{p}_0 = p_0$, so ist

$$u_\sigma(0) = \int_{x_0}^{x_m} \bar{\bar{\varphi}}(x, 0) \left\{ f_y(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} dx +$$
$$+ f_{y'}(x_m, y_m, y_m') \bar{\bar{\varphi}}_\sigma(x_m, 0) + f_{y'}(x_0, y_0, p_0) \{\tilde{\varphi}_\sigma(x_0, 0) - \bar{\bar{\varphi}}_\sigma(x_0, 0)\} +$$
$$+ f(x_m, y_m, \tilde{p}) - f(x_m, y_m, y_m').$$

Führt man an Stelle von σ wieder die ursprünglichen Scharparameter α und β ein, so ergibt sich

$$u_\sigma(0) = \frac{y_m' - \tilde{p}}{\bar{\varphi}_\beta(x_m, \beta_0)} \int_{x_0}^{x_m} \bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0) \left\{ f_y(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} dx +$$
$$+ (y_m' - \tilde{p}) f_{y'}(x_m, y_m, y_m') + f(x_m, y_m, \tilde{p}) - f(x_m, y_m, y_m') \geq 0.$$

Diese Ungleichung gilt zunächst nur in dem Bereich $\mathfrak{B}_2$: $x_0 < x_m \leq x_2$, $g(x_m, \bar{\varphi}_0(x_m)) < \tilde{p} < G(x_m, \bar{\varphi}_0(x_m))$. Da jedoch die auf der linken Seite dieser Ungleichung stehende Funktion von x_m und $\tilde{p}$ in der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{B}_2$ stetig ist, gilt diese Ungleichung auch in der letzteren. Schreibt man statt x_m x, so hat man das Resultat:

Liefert C_0 unter den Voraussetzungen (V) ein Minimum, so gilt

$$\frac{\bar{\varphi}_0'(x) - \tilde{p}}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \int_{x_0}^{x} \bar{\varphi}_\beta(\xi, \beta_0) \left\{ f_y(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} d\xi +$$
$$+ (\bar{\varphi}_0'(x) - \tilde{p}) f_{y'}(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') + f(x, \bar{\varphi}_0, \tilde{p}) - f(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \geq 0,$$

$g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$, $x_0 \leq x \leq x_2$, *wobei* $y = \bar{\varphi}(x, \beta)$ *das allgemeine Integral der Differentialgleichung* $y' = G(x, y)$ *ist, welches* E_0 *für* $\beta = \beta_0$ *enthält. Diese Bedingung werde mit* (N) *bezeichnet.*

4. Interpretation dieser notwendigen Bedingung.

4.1. In 2.3. wurde ein Kurvenfeld konstruiert, das C_0 enthält:

$$\mathfrak{b}: \quad y = \psi(x, \alpha), \qquad x_1 - k \leq x \leq \hat{x}(\alpha), \qquad |\alpha - \alpha_0| \leq \delta : \mathfrak{A}$$

und

$$\bar{\mathfrak{b}}: \quad y = \bar{\psi}(x, \alpha), \qquad \hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_2 + k, \qquad |\alpha - \alpha_0| \leq \delta : \bar{\mathfrak{A}}.$$

$\mathfrak{b}$ bzw. $\bar{\mathfrak{b}}$ überdecke den Bereich $\mathfrak{G}$ bzw. $\bar{\mathfrak{G}}$ der x, y-Ebene, die inverse Funktion sei $a(x, y)$ bzw. $\bar{a}(x, y)$, die Gefällefunktion $p(x, y)$ bzw. $\bar{p}(x, y)$. Es ist $p(\hat{x}, \hat{y}) = \bar{p}(\hat{x}, \hat{y})$.

In der bereits zitierten Arbeit habe ich eine Funktion $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ konstruiert, welche eine Verallgemeinerung der WEIERSTRASSschen $\mathcal{E}$-Funktion auf beliebige Kurvenfelder darstellt[5]). Es soll nun $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ für das vor-

[5]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 471—474.

liegende Feld $\mathfrak{b}+\bar{\mathfrak{b}}$ bestimmt werden. Allgemein ist

$$\Gamma(x,y,\tilde{p})=\begin{cases}\gamma(x,y,\tilde{p})=f(x,y,\tilde{p})-u(x,y)-v(x,y)\,\tilde{p}, & (x,y)\in\mathfrak{G}\\ \bar{\gamma}(x,y,\tilde{p})=f(x,y,\tilde{p})-\bar{u}(x,y)-\bar{v}(x,y)\,\tilde{p}, & (x,y)\in\overline{\mathfrak{G}},\\ & g(x,y)\leq\tilde{p}\leq G(x,y)\end{cases}$$

mit

$$v(x,\psi)=\frac{1}{\psi_\alpha}\Big(\omega-\int_x^{\hat{x}}\{f_y(\xi,\psi,\psi_x)\,\psi_\alpha+f_{y'}(\xi,\psi,\psi_x)\,\psi_{\alpha x}\}\,d\xi\Big),$$

$$\bar{v}(x,\bar{\psi})=\frac{1}{\bar{\psi}_\alpha}\Big(\bar{\omega}+\int_{\hat{x}}^{x}\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\,\bar{\psi}_\alpha+f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\,\bar{\psi}_{\alpha x}\}\,d\xi\Big)$$

und

$$u(x,\psi)=f(x,\psi,\psi_x)-\psi_x v(x,\psi),\qquad \bar{u}(x,\bar{\psi})=f(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)-\bar{\psi}_x\bar{v}(x,\bar{\psi}),$$

wobei $\omega=\omega(\alpha)$ und $\bar{\omega}=\bar{\omega}(\alpha)$ in $|\alpha-\alpha_0|\leq\delta$ erklärte, stetig differenzierbare, sonst jedoch beliebige Funktionen sind.

4.2. Diese Ausdrücke für u, v und $\bar{u},\bar{v}$ sollen nun umgeformt werden. Zunächst werde das in u und v auftretende Integral durch partielle Integration beseitigt. Aus ihm wird hierdurch $\psi_\alpha(\hat{x},\alpha)\,f_{y'}\big(\hat{x},\psi(\hat{x},\alpha),\psi_x(\hat{x},\alpha)\big)-\psi_\alpha(x,\alpha)\,f_{y'}\big(x,\psi(x,\alpha),\psi_x(x,\alpha)\big)$, da $\mathfrak{b}$ ja ein Extremalenfeld ist. Setzt man nun $\omega=\psi_\alpha(\hat{x},\alpha)\,f_{y'}\big(\hat{x},\psi(\hat{x},\alpha),\psi_x(\hat{x},\alpha)\big)$, so ergibt sich

$$v=f_{y'}\big(x,\psi(x,\alpha),\psi_x(x,\alpha)\big)=f_{y'}\big(x,y,p(x,y)\big),\quad\text{also}$$

$\gamma(x,y,\tilde{p})=\mathfrak{E}\big(x,y,p(x,y),\tilde{p}\big)$. Jetzt werde $\bar{\omega}(\alpha)$ so bestimmt, daß längs $\hat{C}$ $v=\bar{v}$ ist, was zu $\bar{\omega}=\bar{\psi}_\alpha(\hat{x},\alpha)\,f_{y'}\big(\hat{x},\hat{y},p(\hat{x},\hat{y})\big)$ führt.

Formt man das Integral in $\bar{u}$ und $\bar{v}$ durch partielle Integration um, so erhält man

$$\int_{\hat{x}}^{x}\bar{\psi}_\alpha\Big\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)-\frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\Big\}\,d\xi+\bar{\psi}_\alpha(x,\alpha)\,f_{y'}(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)-\bar{\omega}(\alpha).$$

Hiermit wird

$$\bar{v}=\frac{1}{\bar{\psi}_\alpha(x,\alpha)}\int_{\hat{x}}^{x}\bar{\psi}_\alpha\Big\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)-\frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\Big\}\,d\xi+f_{y'}(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x).$$

Daher ist

$$\bar{\gamma}(x,y,\tilde{p})=\frac{\bar{\psi}_x(x,\alpha)-\tilde{p}}{\bar{\psi}_\alpha(x,\alpha)}\int_{\hat{x}}^{x}\bar{\psi}_\alpha\Big\{f_y(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)-\frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\psi},\bar{\psi}_x)\Big\}\,d\xi+\mathfrak{E}(x,\bar{\psi},\bar{\psi}_x,\tilde{p})$$

mit $\alpha=a(x,y)$.

Führt man wieder den ursprünglichen Scharparameter β ein, so ist insbesondere längs $\bar{E}_0$:

$$\bar{\gamma}\big(x,\bar{\varphi}_0(x),\tilde{p}\big)=\frac{\bar{\varphi}_0'(x)-\tilde{p}}{\bar{\varphi}_\beta(x,\beta_0)}\int_{x_0}^{x}\bar{\varphi}_\beta(\xi,\beta_0)\Big\{f_y(\xi,\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_0')-\frac{d}{dx}f_{y'}(\xi,\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_0')\Big\}\,d\xi+$$
$$+\mathfrak{E}\big(x,\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_0',\tilde{p}\big).$$

Durch Vergleich mit (N) folgt hieraus das Resultat:

Liefert C_0 unter den Voraussetzungen (V) ein Minimum, so ist $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) \geq 0$ *für* $x_0 \leq x \leq x_2$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$. *Unter (N') sei im folgenden die Aussage verstanden, daß* $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) \geq 0$ *in* $x_0 \leq x \leq x_2$, $g(x, \bar{\varphi}_0(x)) \leq \tilde{p} \leq G(x, \bar{\varphi}_0(x))$ *mit* $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) = 0$ *nur für* $\tilde{p} = \bar{\varphi}_0'(x) = G(x, \bar{\varphi}_0(x))$, $x_0 \leq x \leq x_2$.

4.3. Aus (N) kann jetzt eine weitere notwendige Bedingung hergeleitet werden. Es ist nämlich für irgendein $x \in [x_0, x_2]$

$$\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \tilde{p}) - \bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) = (\tilde{p} - \bar{\varphi}_0'(x)) \{\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) + \eta(\tilde{p} - \bar{\varphi}_0')\}$$

mit $\lim_{\tilde{p} \to \bar{\varphi}_0'} \eta(\tilde{p} - \bar{\varphi}_0') = 0$. Da $\bar{\gamma}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) = 0$ und $\tilde{p} - \bar{\varphi}_0'(x) \leq 0$ ist, muß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) \leq 0$ sein, weil sonst (N) nicht erfüllt wäre.

Wenn C_0 ein Minimum liefert, muß also

$$\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) = -\frac{1}{\bar{\varphi}_\beta(x, \beta_0)} \int_{x_0}^{x} \bar{\varphi}_\beta(\xi, \beta_0) \left\{ f_y(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') - \frac{d}{d\xi} f_{y'}(\xi, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0') \right\} d\xi \leq 0$$

sein in $x_0 \leq x \leq x_2$. Diese Ungleichung werde mit (N_1) bezeichnet. $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)) < 0$ *in* $x_0 < x \leq x_2$ *sei durch (N_1') symbolisiert.*

5. Hinreichende Bedingung.

Im folgenden soll bewiesen werden, *daß C_0 ein relatives, starkes, eigentliches Minimum des Variationsproblems liefert, wenn die Voraussetzungen (V) und außerdem (N') und (N_1') erfüllt sind.*

In 2.3. wurde ein Feld glatter Kurven konstruiert, das C_0 enthält. Für dieses Feld mögen die Bezeichnungen von 4.1. gelten. Außerdem werde das Gesamtfeld durch $y = \chi(x, \alpha)$, $x_1 - k \leq x \leq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, dargestellt. Im folgenden wird zuerst untersucht, auf welcher Punktmenge aus $\mathfrak{G}_3$ $\Gamma(x, y, \tilde{p})$ verschwindet.

Zunächst ist $f_{y'y'}(x, \varphi_0(x) \varphi_0'(x)) > 0$ in $x_1 \leq x \leq x_0$. Man kann daher $k, \delta, \varepsilon > 0$ so bestimmen, daß $f_{y'y'}(x, \psi(x, \alpha), \pi) > 0$ in $x_1 - k \leq x \leq \hat{x}(\alpha)$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $|\pi - \psi_x(x, \alpha)| < \varepsilon : \mathfrak{B}_3$. Daher ist $\mathcal{E}(x, \psi, \psi_x, \tilde{p}) \geq 0$ in $\mathfrak{B}_3$ und verschwindet nur für $\tilde{p} = \psi_x$. Ist weiterhin im x, α, y'-Raum $\mathfrak{A}_3$: $x_1 - k \leq x \leq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $g(x, \chi(x, \alpha)) \leq y' \leq G(x, \chi(x, \alpha))$ und $\mathfrak{U}_3 = \mathfrak{B}_3 \cap \mathfrak{A}_3$, so ist also $\mathcal{E}(x, \psi, \psi_x, \tilde{p}) \geq 0$ in $\mathfrak{U}_3$ und das Gleichheitszeichen gilt nur für $\tilde{p} = \psi_x$.

Nun werde das Vorzeichen von $\bar{\gamma}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p})$ in der Umgebung von (x_0, α_0, p_0) festgestellt. Da $\bar{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{p}}(x_0, y_0, p_0) = f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0) > 0$, kann man $\delta, \varepsilon > 0$ so wählen und ein $l > 0$ derart bestimmen, daß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{p}}(x, \bar{\psi}(x, \alpha), \tilde{p}) = f_{y'y'}(x, \psi(x, \alpha), \tilde{p}) > 0$ in $\hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_0 + l$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $G(x, \bar{\psi}(x, \alpha)) - \varepsilon \leq \tilde{p} \leq G(x, \bar{\psi}(x, \alpha)) : \mathfrak{Z}_3$.

Ferner ist

$$\frac{d}{dx} \bar{\gamma}_{\tilde{p}}(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x))|_{x=x_0} = -\{f_y(x_0, y_0, p_0) - f_{y'x}(x_0, y_0, p_0) - f_{y'y}(x_0, y_0, p_0) p_0 - f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0) \bar{y}_0''\}.$$

Da E_0 Extremale ist, gilt

$$f_y(x_0, y_0, p_0) - f_{y'x}(x_0, y_0, p_0) - f_{y'y}(x_0, y_0, p_0)\, p_0 - f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0)\, y_0'' = 0$$

und daher

$$\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\varphi}_0(x), \bar{\varphi}_0'(x)\right)\Big|_{x=x_0} = -f_{y'y'}(x_0, y_0, p_0)\,(y_0'' - \bar{y}_0'') < 0,$$

also auch $\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right)\Big|_{\substack{x=x_0\\ \alpha=\alpha_0}} < 0$. Infolgedessen können δ und l so gewählt werden, daß $\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right) < 0$ in $\hat{x}(\alpha) \leq x \leq x_0 + l$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$. Da $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(\hat{x}, \bar{\psi}(\hat{x},\alpha), \bar{\psi}_x(\hat{x},\alpha)\right) = 0$, folgt aus $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right) - \bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(\hat{x}, \bar{\psi}(\hat{x},\alpha), \bar{\psi}_x(\hat{x},\alpha)\right) = (x - \hat{x})\left[\frac{d}{dx}\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right)\right]_{x=\bar{x}}$ mit $\hat{x}(\alpha) < \bar{x} < x$, daß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right) < 0$ in $\hat{x}(\alpha) < x \leq x_0 + l$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$. Für $(x, \alpha, \tilde{p}) \in \mathfrak{Z}_3$ ist $\bar{\gamma}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \tilde{p}\right) - \bar{\gamma}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right) = \left(\tilde{p} - \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right)\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right) + \frac{1}{2}\left(\tilde{p} - \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right)^2 \bar{\gamma}_{\tilde{p}\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \pi\right)$ mit $\tilde{p} < \pi < \bar{\psi}_x(x,\alpha)$. Wegen $\bar{\gamma}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \bar{\psi}_x(x,\alpha)\right) = 0$ ist also $\bar{\gamma}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \tilde{p}\right) \geq 0$ in $\mathfrak{Z}_3$ mit $\bar{\gamma}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \tilde{p}\right) = 0$ nur für $\tilde{p} = \bar{\psi}_x(x,\alpha)$.

Man kann schließlich wegen $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0'\right) < 0$ in $x_0 < x \leq x_2$ l, k, δ und ε so wählen, daß $\bar{\gamma}_{\tilde{p}}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \tilde{p}\right) < 0$ ist für $x_0 + l \leq x \leq x_2 + k$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, $G\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha)\right) - \varepsilon \leq \tilde{p} \leq G\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha)\right) : \overline{\mathfrak{U}}_3$. Hieraus folgert man wieder, daß $\bar{\gamma}\left(x, \bar{\psi}(x,\alpha), \tilde{p}\right) \geq 0$ in $\overline{\mathfrak{U}}_3$ und nur verschwindet für $\tilde{p} = \bar{\psi}_x(x,\alpha)$.

Der Durchschnitt der beiden Mengen $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{U}_3 \cup \mathfrak{Z}_3 \cup \overline{\mathfrak{U}}_3$ und $\mathfrak{M}_2$: $x_1 - k \leq x \leq x_2 + k$, $\alpha = \alpha_0$, $g\left(x, \chi(x,\alpha_0)\right) \leq \tilde{p} \leq G\left(x, \chi(x,\alpha_0)\right)$ werde mit $\mathfrak{D}_2$ bezeichnet. Nach Konstruktion von $\mathfrak{U}_3$, $\mathfrak{Z}_3$, $\overline{\mathfrak{U}}_3$ und auf Grund der Gültigkeit von (N') und der verschärften WEIERSTRASS-Bedingung ist $\Gamma\left(x, \chi(x,\alpha), \tilde{p}\right) > 0$ auf der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{D}_2$.

Infolgedessen ist $\Gamma\left(x, \chi(x,\alpha), \tilde{p}\right) > 0$ in $\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{M}_3$. Man hat somit das Ergebnis: $\Gamma\left(x, \chi(x,\alpha), \tilde{p}\right) \geq 0$ in $\mathfrak{A}_3$ mit $\Gamma\left(x, \chi(x,\alpha), \tilde{p}\right) = 0$ nur für $\tilde{p} = \chi_x(x,\alpha)$. Daher ist $\Gamma(x, y, p) \geq 0$ für $(x, y) \in \mathfrak{G} + \overline{\mathfrak{G}}$, $g(x, y) \leq \tilde{p} \leq G(x, y)$ und verschwindet nur für $\tilde{p} = p(x, y)$, $(x, y) \in \mathfrak{G}$, $\tilde{p} = G(x, y)$, $(x, y) \in \overline{\mathfrak{G}}$. Hieraus folgt, daß C_0 ein relatives, starkes Minimum liefert. Daß dasselbe auch eigentlich ist, kann man in der gleichen Weise wie bei der Behandlung der diskontinuierlichen Lösungen zeigen[6]).

6. Kürzeste mit beschränktem Gefälle.

6.1. $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$, $(u, v) \in \mathfrak{G}_2$, sei ein dreimal stetig differenzierbares Flächenstück, das schlicht über der x, y-Ebene liegt und für das $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ gilt. $P_1 = (u_1, v_1)$ und $P_2 = (u_2, v_2)$ seien zwei Punkte von $\mathfrak{G}_2$ mit $u_1 < u_2$, denen die $\mathfrak{F}$-Punkte $S_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $S_2 = (x_2, y_2, z_2)$ entsprechen.

Ist C: $v = v(u)$, $u_1 \leq u \leq u_2$, eine stückweis glatte Kurve aus $\mathfrak{G}_2$ von P_1 nach P_2, so entspricht ihr die von S_1 nach S_2 führende $\mathfrak{F}$-Kurve $\mathfrak{C}$: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\left(u, v(u)\right)$. Die Steigung von $\mathfrak{C}$ werde durch $\operatorname{tg}\sigma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ definiert. C heißt zulässig,

[6]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 477.

wenn für die Steigung von $\mathfrak{C}$ $|\operatorname{tg}\sigma| \leq \operatorname{tg}\sigma_0 = k$ gilt, wo $k > 0$ eine gegebene Zahl ist.

6.2. Wegen

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{z_u + z_v v'}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v) v' + (x_v^2 + y_v^2) v'^2}}$$

folgt aus $|\operatorname{tg}\sigma| \leq k$ $g(u,v) \leq v' \leq G(u,v)$ mit

$$g(u,v) = -\frac{z_u z_v - k^2(x_u x_v + y_u y_v) + k\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 - k^2 \Delta_z^2}}{z_v^2 - k^2(x_v^2 + y_v^2)},$$

$$G(u,v) = \frac{k^2(x_u x_v + y_u y_v) - z_u z_v + k\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 - k^2 \Delta_z^2}}{z_v^2 - k^2(x_v^2 + y_v^2)},$$

sofern in $\mathfrak{G}_2$ $z_v^2 - k^2(x_v^2 + y_v^2) > 0$ und $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 - k^2 \Delta_z^2 > 0$ ist.

Für die den Lösungen von $v' = g(u,v)$ und $v' = G(u,v)$ entsprechenden Flächenkurven gilt $\operatorname{tg}\sigma = \pm k$. Sie oder ihre Urbilder in der u, v-Ebene seien nach ZERMELO[7]) als Kletterkurven bezeichnet.

6.3. Das Variationsproblem $I(C) = \int_{\mathfrak{C}} ds = \text{Min!}$ ist positiv regulär, da wegen $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}_2$ regulär ist. Infolgedessen ist $\mathfrak{E}(u,v,v',\tilde{p}) \geq 0$ und verschwindet nur für $\tilde{p} = v'$. Wenn man daher nach einer Kürzesten von S_1 nach S_2 fragt, die sich aus Kletterkurven- und Geodätischenstücken zusammensetzt, so kann es nur eine solche sein, bei der Geodätische und Kletterkurve im gemeinsamen Punkt S_0 sich berühren. Ist nämlich der zu S_0 gehörige Punkt der u, v-Ebene (u_0, v_0) und der Anstieg der Geodätischen bzw. der Kletterkurve in der u, v-Ebene p_0 bzw. $\bar{p}_0$, so müßte für $\bar{p}_0 \neq p_0$ $\mathfrak{E}(u_0, v_0, p_0, \bar{p}_0) = 0$ gelten[8]). Ebenso kann es keine Lösung des Problems geben, die lediglich aus Kletterkurvenstücken besteht, denn im gemeinsamen Punkt zweier dieser Stücke würde $\mathfrak{E}(u_0, v_0, p_0, \bar{p}_0) \leq 0$ gelten für $\bar{p}_0 \neq p_0$[9]).

Im folgenden soll am Beispiel des Kegels gezeigt werden, daß eine aus einem Geodätischen- und einem Kletterkurvenstück bestehende glatte Flächenkurve in der Tat ein relatives Minimum der Bogenlänge liefert.

6.4. Beispiel.

Ein Kegel sei gegeben durch

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} t\cos\tau \\ t\sin\tau \\ 1 - t \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} -\infty < \tau < +\infty \\ 0 < t < +\infty. \end{aligned}$$

Gibt man ein k mit $0 < k < 1$ vor, so ist $g(\tau,t) = -at, G(\tau,t) = at$ mit $a = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$. Infolgedessen sind die Kletterkurvenscharen $t = \beta e^{-a\tau}$ und $t = \beta e^{a\tau}$, $\beta > 0$. Im folgenden wird allein die zweite Schar $\bar{\mathfrak{b}}$ betrachtet, deren Steigung k ist.

[7]) ZERMELO: a. a. O., 186.
[8]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 469.
[9]) FÖLLINGER: a. a. O.[1]), 480.

Der Kegel werde nun in die Ebene abgewickelt und an Stelle von τ der Polarwinkel $\varphi = \frac{\tau}{\sqrt{2}}$ als Parameter eingeführt, wobei φ auf das Intervall $[0, \infty)$ beschränkt werde. $\bar{\mathfrak{b}}$: $t = \beta e^{a\sqrt{2}\varphi}$, $0 \leq \varphi < +\infty$, $0 < \beta < +\infty$, ist dann eine Schar logarithmischer Spiralen um 0, deren Tangenten mit dem Radiusvektor des Berührungspunktes einen Winkel ψ_0 mit $\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{1}{a\sqrt{2}}$ einschließen und deren Scharparameter β den Radiusvektor für $\varphi = 0$ darstellt.

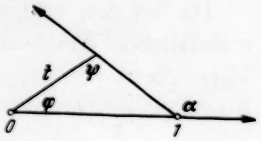

Fig. 2.

Der Integrand des Variationsintegrals ist $\sqrt{2t^2 + t'^2}$. Die Geodätischen durch den Punkt $(0, 1)$ gehen bei der Abwicklung des Kegels in die Geraden durch $(0, 1)$ über. Bezeichnet man den Winke derselben mit der Polarachse durch α, so folgt aus $t : 1 = \sin(\pi - \alpha) : \sin\psi$ und $\psi = \alpha - \varphi$ $\mathfrak{b}$: $t = \frac{1}{\cos\varphi - \operatorname{ctg}\alpha \sin\varphi} = t(\varphi, \alpha)$. Hierbei möge α auf das Intervall $(0, \pi)$ und φ auf $[0, \alpha)$ beschränkt werden. Wegen $t_\alpha = -\frac{\sin\varphi}{\sin^2(\alpha - \varphi)} < 0$ für $0 < \varphi < \alpha$, $0 < \alpha < \pi$ ist die JACOBIsche Bedingung für jede Geodätische von $\mathfrak{b}$ erfüllt, bis zu welchem Punkt man auch geht.

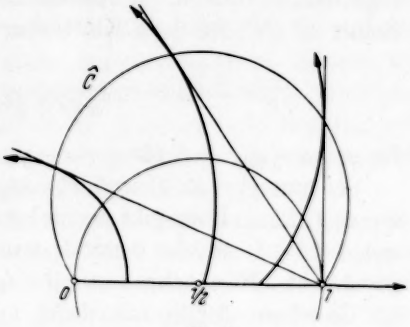

Fig. 3.

Die Berührungskurve $\hat{C}$ kann dadurch konstruiert werden, daß man von $(0, 1)$ aus die Tangenten an die logarithmischen Spiralen von $\bar{\mathfrak{b}}$ legt. Für einen Punkt von $\hat{C}$ gilt dann $t : 1 = \sin(\pi - \alpha) : \sin\psi_0$, also $\hat{t}(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\sin\psi_0}$. Damit erhält man $\hat{\varphi}(\alpha) = \alpha - \psi_0$. $\hat{C}$ stellt daher den oberhalb der Polarachse gelegenen Bogen des Kreises mit dem Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi_0)$ und dem Radius $\frac{1}{2\sin\psi_0}$ dar. Dieser Kreis geht durch 0 und $(1, 0)$ und hat in letzterem Punkt die Steigung $\operatorname{tg}\psi_0$, wird also von der durch $(1, 0)$ gehenden Spirale mit $\beta = 1$ tangiert.

Fällt man von 0 aus die Lote auf die Geraden von $\bar{\mathfrak{b}}$, so stellt die Fußpunktkurve derselben einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und dem Radius $\frac{1}{2}$ dar. Auf dem Kegel entspricht ihm der geometrische Ort der Punkte des Geodätischenbüschels durch $(0, 1)$, in denen die Geodätischen der Kegelspitze am nächsten kommen. Aus der Lage dieses Kreises zu $\hat{C}$ erkennt man, daß der Berührungspunkt von Geodätischer und Kletterkurve für $\psi_0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ vor der ersten Unendlichkeitsstelle der Geodätischen und damit erst recht vor deren höchstem Punkt gelegen ist, für $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ jedoch hinter ihrer größten Annäherung an die Spitze des Kegels, jedoch vor ihrer Unendlichkeitsstelle liegt.

Man kann in $\bar{\mathfrak{b}}$ α an Stelle von β als Scharparameter einführen, wenn man $0<\beta<1$ voraussetzt. Es ist dann

$$\bar{\mathfrak{b}}: \quad t=\frac{e^{a\sqrt{2}\psi_0}}{\sin\psi_0}\sin\alpha\, e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha)}=\bar{t}(\varphi,\alpha), \qquad 0\leq\varphi<+\infty, \qquad \psi_0\leq\alpha<\pi.$$

Längs $\hat{C}$ ist daher $\bar{t}_{\varphi\varphi}-t_{\varphi\varphi}=-\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\psi_0}<0$ wegen $0<\psi_0<\dfrac{\pi}{2}$ und $\psi_0<\alpha<\pi$. Somit sind alle Voraussetzungen (V) erfüllt.

Da bei den vorliegenden Problemen die $\mathfrak{E}$-Funktion ≥ 0 ist und nur in ordentlicher Weise verschwindet, kann man sich bei der Untersuchung des Vorzeichens von $\bar{\gamma}(\varphi,t,\tilde{p})$ auf die Betrachtung des ersten Bestandteils dieser Funktion beschränken. Dieser berechnet sich zu

$$\frac{a\sqrt{2}t-\tilde{p}}{a\sqrt{1+a^2}\,e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}}\{e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}-1\}.$$

Da $G(\varphi,t)=a\sqrt{2}t$, ist stets $a\sqrt{2}t-\tilde{p}\geq 0$. Der Klammerausdruck ist ≥ 0, sofern $\varphi\geq\alpha-\psi_0$. Das heißt aber: $\bar{\gamma}(\varphi,t,\tilde{p})\geq 0$ für jede Kletterkurve von ihrem Schnittpunkt mit $\hat{C}$ ab. Daß diese Funktion nur für $\tilde{p}=\bar{t}_\varphi$ verschwindet, folgt daraus, daß die $\mathfrak{E}$-Funktion nur in ordentlicher Weise verschwinden kann. Somit ist (N') für jede Kletterkurve erfüllt. Ebenso auch (N_1'). Denn es ist

$$\bar{\gamma}_{\tilde{p}}(\varphi,\bar{t},\bar{t}_\varphi)=-\frac{1}{a\sqrt{1+a^2}\,e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}}\{e^{a\sqrt{2}(\varphi-\alpha+\psi_0)}-1\}<0$$

für $\varphi>\alpha-\psi_0$, $=0$ für $\varphi=\alpha-\psi_0$.

Sei nun $P_1=(0,1)$ und $P_2=(t_2,\varphi_2+2\varkappa\pi)$ mit $0<t_2<+\infty$, $0\leq\varphi_2<2\pi$, $\varkappa=0,1,2,\ldots$. Dann gibt es eine logarithmische Spirale $t=\beta\, e^{a\sqrt{2}\varphi}$, $0\leq\varphi<+\infty$, mit $0<\beta<1$, welche 0 mindestens einmal umkreist und dann durch P_2 hindurchgeht. Man nehme nur $\beta=t_2\, e^{-a\sqrt{2}(\varphi_2+(n+1)2\pi)}$, $n=0,1,2,\ldots$, so daß die Gleichung der Spirale durch $t=t_2\, e^{-a\sqrt{2}(\varphi_2+(n+1)2\pi-\varphi)}$, $0\leq\varphi<+\infty$, gegeben ist. Für sie ist $\beta<1$, wenn nur n hinreichend groß gewählt wird. Außerdem ist für $\varphi=2\pi$ $t=t_2\, e^{-a\sqrt{2}(\varphi_2+n\cdot 2\pi)}$. Diese Zahl ist $<t_2$ bei geeigneter Wahl von n, so daß die Spirale bei ihrem ersten Umlauf um 0 nicht durch P_2 geht. Erst für $\varphi=\varphi_2+(n+1)2\pi$ ist $t=t_2$. Sei B der erste Schnittpunkt dieser Spirale mit $\hat{C}$, und werde die Geodätische von P_1 nach B gezogen. Dann liefert die Kurve C, bestehend aus diesem Geodätischenstück P_1B und dem anschließenden Kletterkurvenstück BP_2 ein starkes, eigentliches, relatives Minimum des vorliegenden Variationsproblems.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 21. Januar 1954.)

JURKAT, W., und A. PEYERIMHOFF
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 255—270 (1954)

Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. I*).

Von
WOLFGANG JURKAT und ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Diese Arbeit führt unsere kürzlich erschienenen Untersuchungen [1953] über Lokalisation bei absoluter Konvergenz von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen fort. Analog zu dem bekannten Satz von P. FATOU für gewöhnliche Konvergenz konnten wir zeigen, daß aus der absoluten Konvergenz der Folge $\{a_n\}$ $\left(\text{d.h. aus } \sum_1^\infty |a_n - a_{n-1}| < \infty\right)$ und der Regularität von $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ für $z = 1$ die absolute Konvergenz dieser Potenzreihe für $z = 1$ folgt. Weiter ergab sich aus diesem speziellen Lokalisationssatz sogar ein Analogon zu dem allgemeinen RIEMANNschen Lokalisationssatz für trigonometrische Reihen, nach welchem bei allen trigonometrischen Reihen mit absolut konvergenten Koeffizienten die absolute Konvergenz eine lokale Eigenschaft des zweifachen Integrals dieser Reihen ist. Dieses zweite Resultat enthält natürlich das erste, und dies ist auch die ursprüngliche Begründung von P. FATOU für seinen Satz im Falle der gewöhnlichen Konvergenz.

Wir werden in dieser Arbeit an Stelle der absoluten Konvergenz allgemeiner absolute CESÀRO-Summierbarkeit betrachten. Dabei zeigt es sich, daß gerade der Weg vom speziellen zum allgemeinen Lokalisationssatz besonders einfach und zugleich verallgemeinerungsfähig ist. Analog zu dem Satz von M. RIESZ [1911] für gewöhnliche Summierbarkeit ergibt sich die absolute C_α-Summierbarkeit $(\alpha > -1)$ der Reihe $\sum a_n$ aus der absoluten Konvergenz der Folge $\left\{\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right\}$ und der Regularität von $f(z)$ für $z = 1$. Es ist interessant, daß sich dieses Ergebnis im wesentlichen schon aus dem oben erwähnten Spezialfall $\alpha = 0$ ableiten läßt (§ 1). Von dem Lokalisationssatz für Potenzreihen kommt man dann wie im Falle der absoluten Konvergenz zu einem allgemeinen Lokalisationssatz für trigonometrische Reihen, nach welchem die absolute C_α-Summierbarkeit der trigonometrischen Reihen, deren Koeffizienten nach Division durch $(n+1)^\alpha$ absolut konvergieren, eine lokale Eigenschaft einer durch mehrfache Integration dieser Reihen entstandenen Funktion ist (§ 2). Dies entspricht vollkommen einem von ZYGMUND [1926] angegebenen Lokalisationssatz für gewöhnliche Summierbarkeit. Um die Analogie zwischen absoluter und gewöhnlicher bzw. gleichmäßiger Summierbarkeit besonders

*) This research was supported in part (as far as the work of W. JURKAT is concerned) by the United States Air Force, through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

deutlich zu machen, sind die Beweise der Arbeit so aufgebaut, daß sie bei jedem dieser Konvergenzbegriffe gültig bleiben. Dies war fast ohne Mehraufwand möglich und hat uns oft bei der Aufstellung der Sätze geleitet.

Für unsere Methode des schrittweisen Aufsteigens zu immer allgemeineren Sätzen ist es gleichgültig, welche Methode man zum Beweis des ersten dieser Sätze, d.h. des „absoluten FATOU-RIESZschen Satzes" heranzieht. Hierfür ist jede Methode geeignet, der weitere Weg liegt dann weitgehend fest. Vom RIEMANNschen Lokalisationssatz bei absoluter Summierbarkeit führt dieser Weg z.B. zu einem Analogon der RIEMANNschen Formeln (§ 3). Weiter ist es möglich, die Lokalisationsverhältnisse bei absoluter Summierbarkeit von FOURIER-Reihen zu klären. Absolute Summierbarkeit ist bekanntlich nicht bei allen erzeugenden Funktionen eine lokale Eigenschaft, aber für gewisse Klassen lassen sich die hierfür notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben. Schließlich lassen sich sehr allgemeine lokale Bedingungen für die absolute CESÀRO-Summierbarkeit von trigonometrischen Reihen und Potenzreihen angeben, die insbesondere wieder den absoluten FATOU-RIESZschen Satz enthalten. Die zuletzt genannten Punkte werden wir in Teil II dieser Arbeit besprechen.

§ 1. Der Satz von Fatou-Riesz bei $|C_\alpha|$-Summierbarkeit.

1.1. Als p-te Differenz einer (komplexen) Zahlenfolge $\{a_n\}$ definieren wir

$$\overline{\Delta}^p a_n = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} (-1)^\nu a_{n-\nu},$$

wobei $a_n = 0$ für $n < 0$ gesetzt sei. Eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt $|C_\alpha|$-summierbar bzw. C_α-summierbar ($\alpha > -1$), falls die durch $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu$ für $n \geq 1$ mit $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$ erklärte Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n$ absolut bzw. im gewöhnlichen Sinne konvergiert. Die Summe $\sum_0^\infty \alpha_n$ heißt dann die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty a_n$. Analog zu den Symbolen O und o schreiben wir

$$x_n = a(y_n),$$

wenn von einer Stelle an $x_n = a_n y_n$ ist, wobei die Folge $\{a_n\}$ absolut konvergiert, d.h. $\sum_1^\infty |a_n - a_{n-1}| < \infty$ oder $\sum_0^\infty |a_n - a_{n+1}| < \infty$ ist.

Es gilt dann der

Satz 1. *Erfüllen die Koeffizienten einer Potenzreihe $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ für eine ganze Zahl $p \geq 0$ und beliebiges $\alpha > -1$ die Bedingung*

$$\overline{\Delta}^p \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} = a(1) \tag{1}$$

oder auch

$$\overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha) \tag{2}$$

und ist $f(z)$ regulär für $z=1$ [wegen (1) bzw. (2) besitzt $\sum a_n z^n$ einen Konvergenzradius ≥ 1], so ist $\sum a_n z^n$ für $z=1$ $|C_\alpha|$-summierbar.

Zusatz 1. Betrachtet man an Stelle der absoluten Summierbarkeit die gewöhnliche C_α-Summierbarkeit, so bleibt Satz 1 wörtlich richtig, wenn man bei den Bedingungen (1) und (2) entsprechend das Symbol a durch o ersetzt. Ferner ist die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty a_n$ gleich dem Wert der Funktion $f(z)$ an der Stelle $z=1$.

Zusatz 2. Gilt (1) bzw. (2) mit o statt a und ist $f(z)$ regulär für alle Punkte eines Bogens $z=e^{i\varphi}$ mit $|\varphi|\leq\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\pi)$, so ist $\sum a_n z^n$ für alle diese Punkte sogar gleichmäßig C_α-summierbar zum Wert der Funktion $f(z)$.

Der Satz 1 stellt die Verallgemeinerung unseres früheren Ergebnisses[1]) bei absoluter Konvergenz $(\alpha=0)$ auf beliebige $|C_\alpha|$-Summierbarkeit $(\alpha>-1)$ dar. Die beiden Zusätze sind (abgesehen von der Einführung der Differenzen $\overline{\Delta}^p$) bekannt[2]) und beweisen deutlich die Analogie zwischen absoluter und gewöhnlicher Summierbarkeit. Es wird sich zeigen, daß auch die Beweise von Satz 1 und Zusatz 1 völlig einheitlich geführt werden können, indem sie auf den durchweg bekannten Spezialfall $\alpha=0$, $p=0$ zurückgeführt werden.

1.2. Dem Beweis von Satz 1 schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Ist $\overline{\Delta} a_n = a(n^\alpha)$ bzw. $=o(n^\alpha)$ für ein $\alpha>-1$, so ist $a_n = a(n^{\alpha+1})$ bzw. $=o(n^{\alpha+1})$.*

Beweis. Der o-Fall ist trivial. Im a-Fall dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß $a_0=a_1=a_2=0$ ist. Mit $\overline{\Delta}\frac{\overline{\Delta} a_n}{n^\alpha}=\beta_n$ $(n\geq 2)$ ist dann $a_n=\sum_{\nu=2}^{n}\nu^\alpha\sum_{\mu=2}^{\nu}\beta_\mu$ für $n\geq 2$ und somit für $n\geq 3$

$$\overline{\Delta}\frac{a_n}{n^{\alpha+1}}=\frac{\beta_n}{n}+\sum_{\mu=2}^{n-1}\beta_\mu\left[\frac{1}{n}+\sum_{\nu=\mu}^{n-1}\nu^\alpha\overline{\Delta}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right].$$

Wegen $\sum|\beta_\mu|<\infty$ und $\overline{\Delta}\frac{1}{n^{\alpha+1}}=-\frac{\alpha+1}{n^{\alpha+2}}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha+3}}\right)$, $\sum_{\nu=2}^{n-1}\nu^\alpha=\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}+O(n^\alpha)+O(1)$ ergibt sich nach kurzer Rechnung die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Ist $\overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha)$ bzw. $=o(n^\alpha)$ für ein $\alpha>-1$, so gilt für beliebiges (reelles) β $\overline{\Delta}^p(n+1)^\beta a_n = a(n^{\alpha+\beta})$ bzw. $=o(n^{\alpha+\beta})$; insbesondere sind also die Bedingungen (1) und (2) gleichbedeutend.*

Beweis. Die Behauptung ist richtig, wenn für jede ganze Zahl k und für $q=0,1,\ldots,p$ gilt[3])

$$(3)\qquad \overline{\Delta}^q(n+k)^\beta\,\overline{\Delta}^{p-q}a_n = a(n^{\alpha+\beta}) \quad \text{bzw.} \quad =o(n^{\alpha+\beta}) \quad \text{für } n\to\infty.$$

[1]) Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], Satz 1.

[2]) Vgl. RIESZ [1911]; ZYGMUND [1926], Satz IV, S. 91; JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], Fußnote [4]).

[3]) Es ist $\overline{\Delta}^p x_n y_n=\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\overline{\Delta}^q x_{n-p+q}\,\overline{\Delta}^{p-q}y_n$.

Durch mehrmalige Anwendung von Hilfssatz 1 folgt aus $\overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha)$ bzw. $= o(n^\alpha)$ unmittelbar $\overline{\Delta}^{p-q} a_n = a(n^{\alpha+q})$ bzw. $= o(n^{\alpha+q})$ und wegen

$$\overline{\Delta}^q (n+k)^\beta = \gamma_1 n^{\beta-q} + \gamma_2 n^{\beta-q-1} + O(n^{\beta-q-2})$$

ist (3) erfüllt[4]).

Hilfssatz 3. *Ist* $f(z) = \sum a_n z^n$ *konvergent für* $|z| < 1$ *und* $f(z)$ *regulär für* $z = 1$, *so gilt dasselbe für*

$$f_\alpha(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} z^n \qquad \textit{bei beliebigem (reellem)} \ \alpha.$$

Dieser Satz ist bekannt[5]). Er folgt z. B. aus dem HADAMARDschen Multiplikationssatz und der Tatsache, daß $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^\alpha}$ höchstens bei $z = 1$ eine Singularität besitzt. Einen direkten Beweis für Hilfssatz 3 kann man unter Verwendung der Darstellung

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} t^n \, dt$$

führen.

Hilfssatz 4. *Ist für ein* $-1 < \alpha \leq 0$ $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^\alpha}$ *absolut bzw. im gewöhnlichen Sinn konvergent, so ist die Reihe* $\sum_1^\infty a_n$ $|C_\alpha|$- *bzw.* C_α-*summierbar.*

Beweis. Im absoluten Fall benutzt man, daß die C_α-Transformation $\sum_1^\infty \alpha_n$ von $\sum_1^\infty a_n$ durch

$$\alpha_n = \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu^{\alpha+1} \beta_\nu \qquad \text{mit} \qquad \beta_n = \frac{a_n}{n^\alpha}$$

gegeben ist, woraus wegen $\sum |\beta_n| < \infty$ unmittelbar $\sum |\alpha_n| < \infty$ folgt, denn es konvergiert sogar noch die Reihe mit den Gliedern

$$\frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n |A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu^{\alpha+1} \beta_\nu| .$$

Im Fall der gewöhnlichen Summierbarkeit benutzen wir für $-1 < \alpha < 0$ die Identität

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} \sum_{\mu=1}^\nu \frac{a_\mu}{A_\mu^\alpha} A_\mu^\alpha = s_n + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} (A_{n-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^\alpha - A_{n-\nu-1}^\alpha A_{\nu+1}^{\alpha-1}) s_\nu ,$$

[4]) Aus $x_n = a(n^\gamma)$ folgt $x_n = a(n^{\gamma+1})$ und aus $x_n = O(n^\gamma)$ folgt $x_n = a(n^{\gamma+2})$.

[5]) Vgl. z. B. BIEBERBACH [1920], S. 489.

wobei $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{A_\nu^\alpha}$ konvergent ist und die von s_n nach $\sum_1^n \alpha_\nu$ führende Transformation konvergenzerhaltend ist. Von den drei dafür hinreichenden Bedingungen ist die Zeilensummen- und Spaltenbedingung trivialerweise erfüllt, während die Zeilennormbedingung sich aus folgender Rechnung ergibt:

$$\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} |A_{n-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^\alpha - A_{n-\nu-1}^\alpha A_{\nu+1}^{\alpha-1}| = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n-1} A_{n-\nu-1}^\alpha A_\nu^\alpha \left| \frac{\alpha}{n-\nu} - \frac{\alpha}{\nu+1} \right|$$

$$\leq \frac{K}{n^{\alpha-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)^{\alpha-1} (\nu+1)^{\alpha-1} \leq K'.$$

Hängt a_n von einem Parameter ab und gilt die Voraussetzung gleichmäßig in bezug auf diesen Parameter, so auch die Behauptung wie derselbe Beweis zeigt.

Hilfssatz 5. *Ist für ein* $\alpha > -1$ $\sum_1^\infty \frac{a_n}{(n+1)^\alpha}$ *absolut bzw. im gewöhnlichen Sinne konvergent, so folgt für die Reihenglieder* $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu$ $(n \geq 1)$ *der* C_1*-Transformation von* $\sum a_n$ *die Beziehung* $\alpha_n = a(n^{\alpha-1})$ *bzw.* $= o(n^{\alpha-1})$.

Beweis. Es gilt für $n \geq 2$

$$\overline{\Delta} \frac{\alpha_n}{n^{\alpha-1}} = O(1) \frac{n a_n}{n^{\alpha+1}} + \frac{O(1)}{n^{\alpha+2}} \sum_1^{n-1} \nu a_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II},$$

und auf Grund der Voraussetzungen im absoluten Fall folgt dann

$$\sum |\mathrm{I}| < \infty, \qquad \sum |\mathrm{II}| \leq K \sum_1^\infty |\nu a_\nu| \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}} < \infty.$$

Im o-Fall folgt die Behauptung aus der für $n \geq 1$ gültigen Beziehung

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_1^n \nu a_\nu = s_n - \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_1^{n-1} [(\nu+1)^{\alpha+1} - \nu^{\alpha+1}] s_\nu \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_1^n \frac{a_\nu}{\nu^\alpha}$$

nach dem Satz von TOEPLITZ.

1.3. Beweis von Satz 1. Auf Grund von Hilfssatz 2 dürfen wir als Koeffizientenbedingung stets die Bedingung (1) nehmen. Nach Hilfssatz 3 ist $f_\alpha(z)$ und folglich auch

$$(1-z)^p f_\alpha(z) = \sum_0^\infty \overline{\Delta}^p \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} z^n$$

regulär für $z=1$. Diese Funktion erfüllt aber nun die Koeffizientenbedingung von Satz 1 ($\alpha=p=0$), so daß $\sum \left|\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right| < \infty$ ist oder $\overline{\Delta}^{p-1}\frac{a_n}{(n+1)^\alpha} = a(1)$, falls $p \geq 1$. Im letzteren Fall wiederholt man denselben Schluß mit der Funktion $(1-z)^{p-1} f_\alpha(z)$ usw. und erhält somit in allen Fällen

$$\sum \left|\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right| < \infty. \tag{4}$$

Bei den Zusätzen ergibt sich ebenso, daß

$$\sum \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} \quad \text{konvergiert,} \tag{5}$$

bzw. daß für $|\varphi| \leq \varepsilon$

$$\sum \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} e^{in\varphi} \quad \text{gleichmäßig konvergiert.} \tag{5'}$$

Ist $-1 < \alpha \leq 0$, so folgt hieraus nach Hilfssatz 4 bereits die Behauptung. Die Übereinstimmung von C_α-Summe und Funktionswert ergibt sich aus der Verträglichkeit von CESÀRO- und ABEL-Summierbarkeit. Die allgemeine Gültigkeit von Satz 1 beweisen wir durch Induktion, indem wir aus der Richtigkeit des Satzes für $\alpha \leq k-1$ (k eine natürliche Zahl, p beliebig) das gleiche für $k-1 < \alpha \leq k$ erschließen:

Wie bei Hilfssatz 5 sei $\sum \alpha_n$ die C_1-Transformation von $\sum a_n$. Durch Abänderung von a_1 (hierdurch bleibt Voraussetzung und Behauptung ungeändert) können wir erreichen, daß $f'(1)=0$ ist, so daß

$$\frac{z f'(z)}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu\right) z^n$$

für $z=1$ regulär ist. Nach Hilfssatz 3 ist dann auch $\sum \alpha_n z^n$ regulär für $z=1$. Andererseits folgt aus (4) und Hilfssatz 5 die Beziehung $\alpha_n = a(n^{\alpha-1})$. Beides zusammen ergibt auf Grund der Induktionsannahme die $|C_{\alpha-1}|$-Summierbarkeit von $\sum \alpha_n$, und dies bedeutet wegen der Äquivalenz[6]) $|C_{\alpha-1}C_1| \approx |C_\alpha|$ gerade die zu beweisende $|C_\alpha|$-Summierbarkeit von $\sum a_n$. Im Fall von Zusatz 1 schließt man entsprechend. Im Fall von Zusatz 2 ist wegen (5') $a_n = o(n^\alpha)$ und es bleibt nur $\alpha > 0$ zu betrachten, so daß die Behauptung nach RIESZ [1911] folgt.

1.4. Aus dem oben dargestellten Beweis ist zu ersehen, daß die Regularitätsvoraussetzung gar nicht vollständig gebraucht wird. Sie läßt sich z. B. durch entsprechende Differenzierbarkeitsvoraussetzungen längs des Randes ersetzen, denn das ist zulässig im Fall $\alpha=0$[7]) und bei Hilfssatz 3 ebenfalls. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen, da sich aus unseren folgenden Überlegungen ohnedies weitgehende Verschärfungen ergeben werden.

Der im Beweis verwendete Äquivalenzsatz $|C_{\alpha-1}C_1| \approx |C_\alpha|$ für $\alpha > 0$ läßt sich bei etwas größerem Rechenaufwand vermeiden. Zunächst kann man

[6]) Vgl. KNOPP-LORENTZ [1950], Satz 5.

[7]) Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], S. 288 und § 5.

nämlich (ähnlich wie bei Hilfssatz 3) die Regularität von $\sum \alpha_n z^n$ für $z=1$, oder jedenfalls ausreichende Differenzierbarkeit längs des Randes nachweisen, wobei $\sum \alpha_n$ die C_α-Transformation von $\sum a_n$ sei. Aus $\sum \left|\frac{a_n}{(n+1)^\alpha}\right| < \infty$ kann man ferner (analog zu Hilfssatz 5) folgern, daß $\Delta^k \alpha_n = a(1)$ $(k < \alpha \leq k+1$, $k \geq 0$ ganz) ist, und durch Anwendung von Satz 1 ($\alpha = 0$, $\beta \geq 0$) folgt schließlich die Behauptung.

In Satz 1 ist der folgende Satz von CHOW [1947], [1953] enthalten:

Ist $a_n = O(n^\beta)$ *oder allgemeiner* $\sum \frac{|a_n|}{n^\alpha} < \infty$ *mit* $\alpha > \beta + 1 \geq 0$ *und* $f(z) = \sum a_n z^n$ *regulär für* $z=1$, *so ist* $\sum a_n$ $|C_\alpha|$*-summierbar.*

Dies ist unmittelbar klar, da unter diesen Voraussetzungen auch $a_n = a(n^\alpha)$ ist. Tatsächlich gilt dieser Satz sogar für $\alpha > -1$ bzw. $\beta \geq -2$.

In Satz 1 haben wir die Summierbarkeit von $\sum a_n z^n$ im Punkte $z=1$ betrachtet. Will man statt dessen einen beliebigen anderen Punkt $z = e^{i\varphi} \neq 1$ in Betracht ziehen, so sind nur die Koeffizienten a_n im bisherigen Satz durch $a_n e^{in\varphi}$ zu ersetzen. Im o-Fall mit $\beta = 0$ macht dies keinen Unterschied, in allen anderen Fällen sind aber die Bedingungen voneinander zu unterscheiden. Die Koeffizientenbedingungen sind dann von „lokalem" Charakter[8]). Wenn dagegen alle Voraussetzungen von Satz 1 für den Punkt $z=1$ erfüllt sind, so sind die Koeffizientenbedingungen sogar für alle Punkte $z = e^{i\varphi}$ erfüllt, wie sofort aus (4) und (5) hervorgeht. Dann ist also die Reihe $\sum a_n z^n$ in jedem Regularitätspunkt von $z=1$ absolut summierbar bzw. auf jedem (abgeschlossenen) Regularitätsbogen gleichmäßig summierbar. Das letzte gilt übrigens auch im absoluten Fall, da nach (4) aus den a-Voraussetzungen für a_n zusammen mit der Regularität die o-Voraussetzungen folgen.

Schließlich bemerken wir, daß die Bedingungen (1) und (2) von Satz 1 ersetzt werden können durch

$$(1') \qquad \Delta^\beta \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} = a(1) \quad \text{bzw.} \quad = o(1)$$

$$(2') \qquad \Delta^\beta a_n = a(n^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad = o(n^\alpha),$$

wobei

$$\Delta^\beta a_n = \sum_{\nu=0}^{\beta} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu a_{n+\nu} = (-1)^\beta \overline{\Delta}^\beta a_{n+\beta}$$

ist[9]). Eine derartige Abänderung der Koeffizientenbedingungen ist auch bei allen folgenden Sätzen dieser Arbeit zulässig.

§ 2. Der Riemannsche Lokalisationssatz bei $|C_\alpha|$-Summierbarkeit.

2.1. Im folgenden setzen wir

$$a_n = a'_n - i\, a''_n \quad \text{für} \quad n \geq 1, \qquad a_0 = \tfrac{1}{2} a'_0 \quad (a'_n, a''_n \text{ reell})$$

[8]) Betrachte z.B. $\sum z^n$ im Fall $\alpha = 0$.

[9]) Ist nämlich $b_n = a(n^\beta)$, so auch $b_n = a((n+k)^\beta)$ und umgekehrt.

und betrachten die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Re\, a_n e^{in\varphi} = \tfrac{1}{2} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos n\varphi + a_n'' \sin n\varphi$$

bzw. die dazu konjugierte Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Im\, a_n e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n'' \cos n\varphi + a_n' \sin n\varphi .$$

Durch formale q-malige Integration der trigonometrischen Reihe $\sum \Re\, a_n e^{in\varphi}$ erhalten wir die Reihe

$$\frac{1}{2} a_0' \frac{\varphi^q}{q!} + \sum_{n=1}^{\infty} \Re \frac{a_n}{(in)^q} e^{in\varphi} .$$

Ist z. B. $\bar{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha)$ mit $\alpha > -1$, also nach Hilfssatz 1 $a_n = O(n^{\alpha+p})$, so ist für $q = k+p+2$ $(k \leq \alpha < k+1$, also $k+p+2 > \alpha+p+1 > 0)$ diese integrierte Reihe (überall) absolut und gleichmäßig konvergent und stellt daher eine stetige Funktion $F_q(\varphi)$ dar.

Wir wollen aus Satz 1 den folgenden Lokalisationssatz ableiten:

Satz 2. *Zwei trigonometrische Reihen* $\sum_0^\infty \Re\, a_n e^{in\varphi}$ *und* $\sum_0^\infty \Re\, b_n e^{in\varphi}$ *sind genau dann für* $|\varphi| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ $|C_\alpha|$*-äquisummierbar*[10]) $(\alpha > -1)$, *wenn gilt*

a) *für eine ganze Zahl* $p \geq 0$ *ist*

$$\bar{\Delta}^p \frac{a_n - b_n}{(n+1)^\alpha} = a(1) \quad \text{oder auch} \quad \bar{\Delta}^p (a_n - b_n) = a(n^\alpha);$$

b) *das* $(k+p+2)$*-fache formale Integral* $G_{k+p+2}(\varphi)$ *der Reihe* $\sum_0^\infty \Re\,(a_n - b_n) e^{in\varphi}$ *läßt sich zu einer periodischen*[11]) *Funktion* $P(\varphi)$ *abändern, so daß*

$$P(\varphi) = G_{k+p+2}(\varphi) \quad \text{für} \quad |\varphi| < \varepsilon$$

ist und die $(k+p+2)$*-mal differenzierte* FOURIER*-Reihe von* $P(\varphi)$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ $|C_\alpha|$*-summierbar ist.*

Die genauen Bedingungen für die $|C_\alpha|$*-Äquisummierbarkeit der konjugierten Reihen* $\sum \Im\, a_n e^{in\varphi}$ *und* $\sum \Im\, b_n e^{in\varphi}$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ *sind:*

---

[10]) Zwei derartige Reihen heißen $|C_\alpha|$-, C_α- bzw. gleichmäßig C_α-äquisummierbar, falls die Differenz der Reihen $\sum_0^\infty \Re\,(a_n - b_n) e^{in\varphi}$ $|C_\alpha|$-, C_α- bzw. gleichmäßig C_α-summierbar ist. Äquisummierbarkeit im engeren Sinn besagt darüber hinaus Summierbarkeit gegen Null. Auf Grund dieser Definition gibt Satz 2 gleichzeitig genaue Bedingungen für die Summierbarkeit einer trigonometrischen Reihe an.

[11]) Hier und im folgenden periodisch mit 2π und integrierbar, falls die FOURIER-Reihe der Funktion auftritt.

$\bar{a}$) $=$a) *und*

$\bar{b}$) *das in* b) *definierte Integral* $G_{k+p+2}(\varphi)$ *läßt sich zu einer periodischen Funktion* $P(\varphi)$ *abändern, so daß*

$$P(\varphi) = G_{k+p+2}(\varphi) \quad \text{für} \quad |\varphi| < \varepsilon .$$

ist und die $(k+p+2)$*-mal differenzierte konjugierte* FOURIER*-Reihe*[12]) *von* $P(\varphi)$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ $|C_\alpha|$*-summierbar ist.*

Zusatz 1. Betrachtet man an Stelle der absoluten Summierbarkeit die gewöhnliche C_α-Summierbarkeit, so bleibt Satz 2 wörtlich richtig, wenn man bei den Bedingungen a) und $\bar{a}$) entsprechend das Symbol a durch o ersetzt. Ferner ist dabei die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty \Re(a_n - b_n)\, e^{in\varphi}$ [falls vorhanden] für $|\varphi| < \varepsilon$ gleich der C_α-Summe der $(k+p+2)$-mal differenzierten FOURIER-Reihe von $P(\varphi)$.

Zusatz 2. Ersetzt man in Satz 2 überall $|C_\alpha|$-Summierbarkeit für $|\varphi| < \varepsilon$ durch gleichmäßige C_α-Summierbarkeit in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $|\varphi| < \varepsilon$, so bleibt alles wörtlich richtig, wenn man nur bei den Bedingungen a) und $\bar{a}$) entsprechend das Symbol a durch o ersetzt. Ferner ist dabei die C_α-Summe der Reihe $\sum_0^\infty \Re(a_n - b_n)\, e^{in\varphi}$ für $|\varphi| < \varepsilon$ gleich (der dort vorhandenen Ableitung) $\dfrac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+2+2}} P(\varphi) = \dfrac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+p+2}} G_{k+p+2}(\varphi)$.

Der Satz 2 stellt die Verallgemeinerung unseres früheren Ergebnisses[13]) bei absoluter Konvergenz ($\alpha = 0$) auf beliebige $|C_\alpha|$-Summierbarkeit ($\alpha > -1$) dar. Die beiden Zusätze sind im wesentlichen bekannt[14]) und zeigen die Analogie zwischen den verschiedenen Konvergenzbegriffen. Die Beweise werden sich für den Satz 2 und die Zusätze einheitlich führen lassen, indem sie auf Satz 1 und die dortigen Zusätze zurückgeführt werden.

2.2. Dem Beweis von Satz 2 schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 6. *Ist eine Reihe* $\sum a_n$ $|C_\alpha|$- *bzw.* C_α*-summierbar* ($\alpha > -1$), *so ist* $a_n = a(n^\alpha)$ *bzw.* $= o(n^\alpha)$.

Beweis. Für gewöhnliche Summierbarkeit ist dies bekannt. Im absoluten Fall folgt es für $\alpha \geq 0$ z. B. aus einem Satz von KOGBETLIANTZ[15]), nach dem sogar $\sum \left| \dfrac{a_n}{(n+1)^\alpha} \right| < \infty$ ist. Im Fall $-1 < \alpha < 0$ setzen wir für $n \geq 1$ $b_n = (n+1)\, a_n - (n-1)\, a_{n-1}$ d. h. $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, b_\nu$. Die Reihe $\sum b_n$ ist

[12]) Dies soll ausführlicher heißen: die zu der FOURIER-Reihe konjugierte Reihe.
[13]) Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], Satz 2.
[14]) Vgl. ZYGMUND [1926], S. 99.
[15]) Vgl. etwa PEYERIMHOFF [1952], Satz 1.

dann $|C_\alpha C_1|$- und deshalb auch $|C_{\alpha+1}|$-summierbar [vgl. Fußnote [6])]. Daher gilt $\sum \left|\frac{b_n}{(n+1)^{\alpha+1}}\right| < \infty$, ferner wegen $|C_\alpha| \leqq |C_0|$ auch $\sum |a_n| < \infty$, und die Behauptung ist nun unmittelbar aus

$$\frac{b_n}{(n+1)^{\alpha+1}} = \frac{a_n}{(n+1)^\alpha} - \frac{a_{n-1}}{n^\alpha} + a_{n-1} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

abzulesen [vgl. Fußnote [9])].

Hilfssatz 7. *Ist für* $|\varphi| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$

$$\Re a_n e^{in\varphi} = a(1) \quad \text{d.h.} \quad \sum_1^\infty |\overline{\Delta} \Re a_n e^{in\varphi}| < \infty, \tag{6}$$

so ist $\sum |a_n| < \infty$, *insbesondere also* $a_n e^{in\varphi} = a(1)$ *für alle* φ. (Ersetzt man bei (6) das Symbol a durch o, so folgt bekanntlich nur $a_n e^{in\varphi} = o(1)$.)

Beweis. Es sei $\frac{\pi}{m} < \varepsilon$ ($m > 0$ ganz). Wegen (6) ist für $k = 1, \ldots, m-1, m$

$$\sum_{\varrho=1}^\infty |\Re a_{m\varrho+k} e^{i(m\varrho+k)\varphi} - \Re a_{m\varrho} e^{im\varrho\varphi}| < \infty, \tag{7}$$

und dies gibt für $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{m}$

$$\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho+k} - \Re a_{m\varrho}| < \infty, \qquad \sum_\varrho \left|\Re a_{m\varrho+k} e^{i\frac{k\pi}{m}} - \Re a_{m\varrho}\right| < \infty.$$

Für $k = m$ folgt hieraus $\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho}| < \infty$ und daher weiter

$$\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho+k}| < \infty, \qquad \sum_\varrho \left|\Re a_{m\varrho+k} e^{i\frac{k\pi}{m}}\right| < \infty,$$

also für $k = 1, \ldots, m-1$ auch $\sum |\Im a_{m\varrho+k}| < \infty$ oder insgesamt $\sum |a_{m\varrho+k}| < \infty$. Wegen (7) gilt dann weiter $\sum_\varrho |\Re a_{m\varrho} e^{im\varrho\varphi}| < \infty$ und daher nach einem Satz von LUSIN-DENJOY (vgl. ZYGMUND [1935], S. 131) sogar $\sum_\varrho |a_{m\varrho}| < \infty$. Zusammengenommen ist also $\sum |a_n| < \infty$, q.e.d.

Hilfssatz 8. *Notwendig für die* $|C_\alpha|$- *bzw.* C_α-*Summierbarkeit* $(\alpha > -1)$ *der Reihe* $\sum \Re a_n e^{in\varphi}$ *für* $|\varphi| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ *ist*

$$\sum_1^\infty \left|\frac{a_n}{n^\alpha}\right| < \infty \quad \textit{bzw.} \quad a_n = o(n^\alpha).$$

Im Falle der $|C_\alpha|$-*Summierbarkeit mit* $-1 < \alpha \leqq 0$ *ist diese Bedingung zugleich auch hinreichend und es liegt dann sogar absolute und gleichmäßige Summierbarkeit für alle* φ *und außerdem dasselbe für die konjugierte Reihe vor.*

Der Beweis ergibt sich durch Kombination der Hilfssätze 6, 7 und 4.

2.3. Beweis von Satz 2. Die Notwendigkeit der Koeffizientenbedingung (mit $p = 0$) folgt aus Hilfssatz 8 durch Betrachtung der Reihe $\sum \Re c_n e^{in\varphi}$, wobei

$c_n = a_n - b_n$ gesetzt ist. Im folgenden bezeichnen wir mit $\mu(\varphi) = \mu_q(\varphi, \delta, \varepsilon)$ eine periodische Funktion mit

$$\mu_q(\varphi, \delta, \varepsilon) = \frac{\delta}{2} \frac{\varphi^q}{q!} \quad \text{für} \quad |\varphi| \leq \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < \pi) \tag{8}$$

und mit FOURIER-Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n^{q+2}}\right)$, so daß ihre FOURIER-Reihe und konjugierte Reihe nach q-maliger Differentiation für jedes $\alpha > -1$ in $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gleichmäßig C_α-summierbar und $|C_\alpha|$-summierbar sind[16]). Die Notwendigkeit von b) und $\bar{b}$) folgt dann durch Betrachtung von

$$P(\varphi) = G_{k+p+2}(\varphi) - \frac{c_0'}{2} \frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p+2)!} + \mu_{k+p+2}(\varphi, c_0', \varepsilon).$$

Dies gilt einheitlich für Satz 2 und die Zusätze.

Für den hinreichenden Teil des Beweises untersuchen wir die trigonometrische Reihe $\sum_1^\infty \Re(c_n - d_n)\, e^{in\varphi}$; dabei ist $\sum_1^\infty \Re\, d_n\, e^{in\varphi}$ die $(k+p+2)$-fach formal abgeleitete FOURIER-Reihe der Funktion $P(\varphi) - \mu_{k+p+2}(\varphi, c_0', \varepsilon)$. Auf Grund der Voraussetzungen erfüllt nach Hilfssatz 8 d_n die gleichen Koeffizientenbedingungen wie c_n, und für das $(k+p+2)$-fache Integral unserer Reihe gilt

$$\begin{aligned} H_{k+p+2}(\varphi) &= \sum_1^\infty \Re \frac{c_n - d_n}{(in)^{k+p+2}} e^{in\varphi} \\ &= \left(G_{k+p+2}(\varphi) - \frac{c_0'}{2} \frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p+2)!}\right) - \left(P(\varphi) - \mu_{k+p+2}(\varphi) - \gamma\right), \end{aligned}$$

so daß $H_{k+p+2}(\varphi) = \gamma$ ist für $|\varphi| < \varepsilon$. Nach der FOURIERschen Koeffizientenformel ist für $n \geq 1$

$$c_n - d_n = \frac{(in)^{k+p+2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(H_{k+p+2}(\varphi) - \gamma\right) e^{-in\varphi}\, d\varphi$$

und daher für $|z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_1^\infty (c_n - d_n) z^n &= \frac{i^{k+p+2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(H_{k+p+2}(\varphi) - \gamma\right) \sum_1^\infty n^{k+p+2} (e^{-i\varphi} z)^n\, d\varphi \\ &= \frac{i^{k+p+2}}{\pi} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(H_{k+p+2}(\varphi) - \gamma\right) K(e^{-i\varphi} z)\, d\varphi. \end{aligned}$$

Da die Funktion $K(\xi)$ für alle $\xi \neq 1$ regulär ist, so ist $f(z)$ regulär für alle Punkte des Bogens $z = e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \varepsilon$. Da ferner $c_n - d_n$ die Koeffizientenbedingung von Satz 1 bzw. der Zusätze erfüllen, so ist nach Satz 1 und den Bemerkungen in §1.4 die Reihe $\sum_1^\infty (c_n - d_n)\, e^{i\varphi n}$ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $|\varphi| < \varepsilon$ gleichmäßig C_α-summierbar und im absoluten Fall

[16]) Vgl. Hilfssatz 8.

außerdem $|C_\alpha|$-summierbar. Weiter ist die C_α-Summe von $\sum_1^\infty \Re(c_n - d_n)\, e^{in\varphi}$ für $|\varphi| < \varepsilon$ gleich $\frac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+p+2}} H_{k+p+2}(\varphi) \equiv 0$[17]). Je nach den Voraussetzungen über $P(\varphi)$ ist die Reihe $\sum \Re d_n e^{in\varphi}$ oder $\sum \Im d_n e^{in\varphi}$ absolut, gewöhnlich oder gleichmäßig summierbar, und diese Eigenschaften übertragen sich jetzt nach unseren Ergebnissen über $\sum (c_n - d_n) e^{in\varphi}$ auf die Reihen $\sum \Re c_n e^{in\varphi}$ oder $\sum \Im c_n e^{in\varphi}$. Da weiter nach Fußnote [17]) die $(k+p+2)$-fach abgeleitete FOURIER-Reihe der Funktion $\mu_{k+p+2}(\varphi, c_0', \varepsilon)$ für $|\varphi| < \varepsilon$ zum Wert $\frac{1}{2} c_0'$ C_α-summierbar ist, so ist die Reihe $\frac{1}{2} c_0' + \sum_1^\infty \Re c_n e^{in\varphi}$ und die $(k+p+2)$-fach abgeleitete FOURIER-Reihe der Funktion $P(\varphi)$ [im Falle b)] zum gleichen Wert summierbar, bei gleichmäßiger Summierbarkeit wieder nach Fußnote [17]) zur Ableitung $\frac{d^{k+p+2}}{d\varphi^{k+p+2}} P(\varphi)$. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

2.4. Wir wollen noch einige Bemerkungen über die in Satz 2 auftretenden Bedingungen anschließen. Die Bedingungen b) und $\bar{\text{b}}$) sind (auch im Falle der Zusätze) erfüllt, wenn $G_{k+p+2}(\varphi)$ für $|\varphi| \leq \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ beliebig oft differenzierbar ist, denn $G_{k+p+2}(\varphi)$ kann dann von $|\varphi| \leq \varepsilon$ aus zu einer für alle φ hinreichend oft differenzierbaren Funktion fortgesetzt werden. Ist $G_{k+p+2}(\varphi)$ nur für $|\varphi| < \varepsilon$ beliebig oft differenzierbar, so betrachte man alle abgeschlossenen Teilintervalle $|\varphi| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$ und wende hierauf Satz 2 bzw. die Zusätze an. Dies gibt zusammengenommen das gleiche Resultat wie vorher. Die Bedingungen b) und $\bar{\text{b}}$) sind trivialerweise erfüllt, wenn $G_{k+p+2}(\varphi)$ für $|\varphi| < \varepsilon$ durch ein Polynom dargestellt werden kann. Besitzt dieses Polynom einen Grad $\leq k+p+2$, so sind die beiden (ursprünglichen, nicht notwendig die konjugierten!) Reihen sogar im engeren Sinne äquisummierbar. Ganz all-

[17]) Hierbei benutzen wir (mit geeignetem $\varkappa \geq \alpha$) den folgenden Satz: Erfüllt eine Funktionenfolge $f_n(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ $(-\infty < a < b < \infty)$ die Bedingungen

a) $f_n(x)$ ist q-mal differenzierbar $(q \geq 1)$,

b) $\sum f_n(x)$ ist $C_\varkappa$-summierbar $(\varkappa > -1)$ für $x = a_1 \ldots a_q$ mit $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$,

c) $\sum \frac{d^q}{dx^q} f_n(x)$ ist gleichmäßig $C_\varkappa$-summierbar,

so gilt für $0 \leq p \leq q$

$$\frac{d^p}{dx^p} C_\varkappa - \sum f_n(x) = C_\varkappa - \sum \frac{d^p}{dx^p} f_n(x),$$

wobei die auftretenden Summen gleichmäßig konvergieren und die zu bildenden Ableitungen vorhanden sind. [Beweis durch Zurückführung auf bekannte Sätze unter Beachtung des bezüglich $f_n(x)$ linearen Charakters der $C_\varkappa$-Transformation].

In dem obigen speziellen Fall erhält man übrigens für die $C_\alpha - \sum_1^\infty \Re(c_n - d_n)\, e^{in\varphi}$ auch direkt nach den Zusätzen zu Satz 1

$$\Re f(e^{i\varphi}) = \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} (H_{k+p+2}(\vartheta) - \gamma)\, \Re\, i^{k+p+2}\, K(e^{i(\varphi-\vartheta)})\, d\vartheta \equiv 0 \quad (|\varphi| < \varepsilon),$$

da $\Re\, i^{k+p+2}\, K(e^{it}) \equiv 0$ ist für $0 < t < 2\pi$, wie man leicht nachprüft.

gemein zeigen die Bedingungen b) und $\bar{b}$), daß das Summierbarkeitsverhalten der trigonometrischen Reihen (mit einer gewissen Koeffizientenbedingung) lokal vom Verhalten des $(k+p+2)$-fachen Integrals abhängt. Zum Beispiel entscheiden für die Summierbarkeit im Punkte $\varphi=0$ die Werte des Integrales in einer beliebig kleinen Umgebung $|\varphi|<\varepsilon$, d.h. wir haben „Lokalisation bezüglich des $(k+p+2)$-fachen Integrals".

Der Satz 2 und die Zusätze bezogen sich auf die Summierbarkeit in einer Umgebung des Punktes $\varphi=0$. Vermöge der Beziehung

$$\Re\, c_n e^{in\varphi} = \Re\,(c_n e^{in\varphi_0}\cdot e^{in\psi}) \quad \text{mit} \quad \psi=\varphi-\varphi_0$$

können aber die Überlegungen auf die Umgebung eines beliebigen Punktes φ_0 (entspricht $\psi=0$) übertragen werden. Bei den Bedingungen b) und $\bar{b}$) ist dann nur $|\varphi|<\varepsilon$ durch $|\varphi-\varphi_0|<\varepsilon$ zu ersetzen und bei den Bedingungen a) und $\bar{a}$) treten an die Stelle der Koeffizienten $c_n=c_n'-i\,c_n''$ die Koeffizienten $c_n e^{in\varphi_0}=\Re\, c_n e^{in\varphi_0}-i\,(-\Im\, c_n e^{in\varphi_0})$. Diese Bedingungen sind nur im o-Fall mit $p=0$ mit den früheren Koeffizientenbedingungen äquivalent, d.h. im allgemeinen sind die Koeffizientenbedingungen auch lokal. Ist aber einmal die Bedingung b) oder $\bar{b}$) für das Integral mit $\varphi_0=0$ erfüllt, so folgt aus der Koeffizientenbedingung für $\varphi_0=0$ die gleiche Bedingung für jedes andere φ_0, denn dann gelten nach Hilfssatz 8 sogar die nicht lokalen Bedingungen

$$\sum_1^\infty \left|\frac{c_n}{n^\alpha}\right|<\infty \quad \text{bzw.} \quad c_n=o(n^\alpha).$$

Dies zeigt auch unmittelbar, daß die Bedingungen von Satz 2 die des zugehörigen Zusatzes 1 nach sich ziehen, was auch wegen $|C_\alpha|\leqq C_\alpha$ richtig sein muß. Ferner erkennt man (vgl. Hilfssatz 8), daß für $-1<\alpha\leq 0$ die absolute Äquisummierbarkeit für $|\varphi|<\varepsilon$ das gleiche für alle φ und außerdem für die konjugierten Reihen zur Folge hat. Dann sind also die Bedingungen b) und $\bar{b}$) gleichwertig und von ε unabhängig (wenn die Koeffizientenbedingung erfüllt ist). Darüber hinaus folgen dann aus den Bedingungen von Satz 2 auch die Bedingungen des zugehörigen Zusatzes 2 (mit jedem ε).

§ 3. Die Riemannschen Formeln bei $|C_\alpha|$-Summierbarkeit.

3.1. Als Folgerung aus Satz 2 erhalten wir ein Analogon zu den RIEMANNschen Formeln, das noch einmal die Lokalisation bezüglich des $(k+p+2)$-fachen Integrals herausstellt.

Satz 3. *Es sei* $\sum_0^\infty \Re\, a_n e^{in\varphi}$ *eine trigonometrische Reihe mit Koeffizienten* $\bar{\Delta}^p \frac{a_n}{(n+1)^\alpha}=a(1)$ *oder auch* $\bar{\Delta}^p a_n=a(n^\alpha)$ $(\alpha>-1,\ p\geq 0$ *ganz). Ferner sei* $\lambda(t)$ *eine periodische Funktion mit* FOURIER*-Koeffizienten*[18] $O\left(\frac{1}{n^{k+p+5}}\right)$ $(k\leq\alpha<k+1)$

[18]) Für $\alpha\geq 0$ darf der Exponent sogar durch $k+p+4$ ersetzt werden. Im Falle $\alpha=0$ vgl. hierzu JURKAT-PEYERIMHOFF [1953], Satz 3.

und $\lambda(t)=1$ *für* $|t|\leq\varepsilon$, $\lambda(t)=0$ *für* $\varepsilon_1\leq|t|\leq\pi$ $(0<\varepsilon<\varepsilon_1<\pi)$. *Ist schließlich* $F_{k+p+2}(\varphi)$ *das zur Ausgangsreihe gehörige* $(k+p+2)$*-fache Integral, so sind für* $|\varphi|<\varepsilon$ *die Ausdrücke*

$$(9)\qquad \sum_0^m \Re\, a_n e^{in\varphi} - \frac{(-1)^{k+p}}{\pi}\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} F_{k+p+2}(t)\,\lambda(t)\,\frac{d^{k+p+2}}{dt^{k+p+2}}\,D_m(t-\varphi)\,dt$$

und

$$(10)\qquad \sum_0^m \Im\, a_n e^{in\varphi} - \frac{(-1)^{k+p+1}}{\pi}\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} F_{k+p+2}(t)\,\lambda(t)\,\frac{d^{k+p+2}}{dt^{k+p+2}}\,\overline{D}_m(t-\varphi)\,dt$$

(als Folgen in m aufgefaßt) $|C_\alpha|$*-limitierbar. Die dabei auftretenden Kerne sind*

$$D_m(t)=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\qquad \overline{D}_m(t)=\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Zusatz[19]. Ersetzt man bei den Koeffizientenbedingungen das Symbol a durch o, so sind die Ausdrücke (9) und (10) für jedes abgeschlossene Teilintervall von $|\varphi|<\varepsilon$ gleichmäßig C_α-limitierbar, (9) sogar zum Grenzwert 0.

3.2. Beweis. Das Integral in (9) mit Vorzeichen stellt die m-te Teilsumme der $(k+p+2)$-mal differenzierten FOURIER-Reihe der Funktion

$$(11)\quad F_{k+p+2}(\varphi)\,\lambda(\varphi)=\left[\left(F_{k+p+2}(\varphi)-\frac{a_0'}{2}\,\frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p+2)!}\right)+\mu_{k+p+2}(\varphi,a_0',\varepsilon_1)\right]\lambda(\varphi)$$

dar [vgl. die Definition (8) von $\mu(\varphi)$], also die m-te Teilsumme einer trigonometrischen Reihe $\sum_0^\infty \Re\, b_n e^{in\varphi}$. Entsprechend ist das Integral in (10) mit Vorzeichen die m-te Teilsumme der hierzu konjugierten Reihe. Wir haben im wesentlichen die Äquisummierbarkeit der mit a_n und b_n gebildeten Reihen zu zeigen. Dazu stellen wir fest, daß das $(k+p+2)$-fache Integral der Reihe $\sum_0^\infty \Re\,(a_n-b_n)e^{in\varphi}$ durch

$$G_{k+p+2}(\varphi)=F_{k+p+2}(\varphi)-\left(F_{k+p+2}(\varphi)\,\lambda(\varphi)-\gamma\right)\quad\text{mit}\quad\gamma=\text{const.}$$

gegeben wird, so daß $G_{k+p+2}(\varphi)=\gamma$ ist für $|\varphi|\leq\varepsilon$. Alle Behauptungen von Satz 3 (oder des Zusatzes) folgen daher aus Satz 2 (oder dem dortigen Zusatz), wenn wir den Nachweis der noch fehlenden Koeffizientenbedingung (vgl. Hilfssatz 2)

$$(12)\qquad \overline{\Delta}^p\frac{b_n}{(n+1)^\alpha}=a(1)\quad\left(\text{oder}\quad \overline{\Delta}^p\frac{b_n}{(n+1)^\alpha}=o(1)\right)$$

erbringen können.

[19] Vgl. im Falle der gewöhnlichen Summierbarkeit ZYGMUND [1935], S. 305 und 288, ferner ZYGMUND [1926].

Mit den Bezeichnungen von § 2.1 setzen wir für $n \geq 1$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2} a'_n - \frac{i}{2} a''_n, \qquad \alpha_{-n} = \frac{1}{2} \bar{a}_n = \frac{1}{2} a'_n + \frac{i}{2} a''_n$$

und

$$\alpha_0 = a_0 = \tfrac{1}{2} a'_0,$$

so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Re\, a_n e^{i n \varphi} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{i n \varphi}$$

ist und entsprechend mit anderen Buchstaben. Dann ist

$$F_{k+p+2}(\varphi) - \frac{a'_0}{2} \frac{\varphi^{k+p+2}}{(k+p+2)!} = \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{(i n)^{k+p+2}} e^{i n \varphi},$$

und weiter sei etwa

$$\mu_{k+p+2}(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{i n \varphi}, \qquad \lambda(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n e^{i n \varphi},$$

wobei auf Grund der Voraussetzungen für $n \to \infty$ gilt

$$\bar{\Delta}^p \frac{\alpha_{\pm n}}{(n+1)^{\alpha}} = a(1), \qquad \gamma_{\pm n} = O\left(\frac{1}{n^{k+p+4}}\right), \qquad \delta_{\pm n} = O\left(\frac{1}{n^{k+p+5}}\right)^{18}).$$

Eine einfache Rechnung gibt unter Benutzung von (11) für $n \geq 1$

$$b_n = 2 n^{k+p+2} \left(\sum_{\nu \neq 0} \frac{\alpha_\nu}{\nu^{k+p+2}} \delta_{n-\nu} + i^{k+p+2} \sum_{\nu} \gamma_\nu \delta_{n-\nu} \right),$$

und die behauptete Abschätzung (12) folgt sofort aus dem nachstehenden Hilfssatz 9.

3.3. Hilfssatz 9. *Es seien γ_n und δ_n Zahlenfolgen mit den Eigenschaften*

(13) $\bar{\Delta}^p (n^\lambda \gamma_{\pm n}) = a(1)$ [20] *mit* $p \geq 0$ *(ganz),* $\lambda > p + 1$

und

(14) $\delta_{\pm n} = O(n^\varrho)$ *mit* $\varrho < -(\lambda + 1), \quad \varrho < -(p+3)$.

Dann existiert $\beta_n = n^\lambda \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \gamma_\nu \delta_{n-\nu}$ für $n \geq 1$, und es gilt $\bar{\Delta}^p \beta_n = a(1)$ für $n \to \infty$.

Beweis. In der für $x > 0$ gleichmäßig gültigen Entwicklung

$$x^\lambda = \sum_{\mu=0}^{q-1} k_\mu (x-1)^\mu + O(1)\,(x-1)^q (1 + x^{\lambda - q})$$

setzen wir $x = \frac{n}{\nu}$ und $q = p + 2$ und erhalten so gleichmäßig für $n \geq 1$, $\nu \geq 1$

$$n^\lambda = \sum_{\mu=0}^{p+1} k_\mu \nu^{\lambda-\mu} (n-\nu)^\mu + O(1)\,(n-\nu)^{p+2} (\nu^{\lambda-p-2} + n^{\lambda-p-2}).$$

[20]) Hier und im folgenden sind die Glieder einer Zahlenfolge durch Null zu ersetzen, wenn der definierende Ausdruck für spezielle Werte von n sinnlos wird (so wie z. B. $n^{-\frac{1}{2}}$ für $n \leq 0$).

Damit wird

$$\beta_n = n^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{-\nu}\, \delta_{n+\nu} + \sum_{\mu=0}^{p+1} k_\mu \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\lambda-\mu}\, \gamma_\nu (n-\nu)^\mu\, \delta_{n-\nu} +$$

$$+ O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} |\gamma_\nu\, \delta_{n-\nu}|\, |n-\nu|^{p+2} (\nu^{\lambda-p-2} + n^{\lambda-p-2}) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Auf Grund der Voraussetzungen gilt $\gamma_{\pm n} = O(n^{p-\lambda})$, und daher ist $\mathrm{I} = O(n^{\lambda+\varrho}) = a(1)$ und weiter[21])

$$\mathrm{III} = O(n^{-2}) + O(n^{\varrho+p+2}) + O(n^{\varrho+\lambda}) = a(1).$$

Daher bleibt nur $\overline{\Delta}^p \mathrm{II} = a(1)$ zu zeigen, und dies folgt aus der für $\mu = 0, \ldots, p+1$ gültigen Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{\nu=-\infty}^{n-1} \overline{\Delta}_n^{p+1} [(n-\nu)^{\lambda-\mu}\, \gamma_{n-\nu}]\, \nu^\mu\, \delta_\nu \right| \leq \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |\nu^\mu\, \delta_\nu| \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\Delta}^{p+1} n^{\lambda-\mu}\, \gamma_n| < \infty,$$

wobei wegen Hilfssatz 2 $\overline{\Delta}^p (n^{\lambda-\mu}\, \gamma_n) = a(n^{-\mu}) = a(1)$ benutzt werden durfte.

Hilfssatz 9 bleibt richtig, wenn man überall $a(1)$ durch $o(1)$ ersetzt, wie ein ähnlicher (aber im ganzen einfacherer) Beweis zeigt. Hiermit folgt dann natürlich auch die o-Abschätzung in (12).

Literatur.

BIEBERBACH, L.: Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variabeln. Encykl. math. Wiss. **2**, C 4 (1920). — CHOW, H. C.: On the summability of a power series. Acad. Sinica Sci. Rec. **2**, 20—21 (1947). — CHOW, H. C.: On the summability $|C|$ of a power series. Quart. J. Math. (2) **4**, 152—160 (1953). — JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Der Satz von FATOU-RIESZ und der RIEMANNsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz. Arch. Math. **4**, 285—297 (1953). — KNOPP, K., u. G. G. LORENTZ: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math. **2**, 10—16 (1950). — PEYERIMHOFF, A.: Über einen Satz von Herrn KOGBETLIANTZ aus der Theorie der absoluten CESÀROschen Summierbarkeit. Arch. Math. **3**, 262—265 (1952). — RIESZ, M.: Über einen Satz des Herrn FATOU. J. reine angew. Math. **140**, 89—99 (1911). — ZYGMUND, A.: Sur la théorie des séries trigonométriques. Math. Z. **24**, 47—104 (1926). — ZYGMUND, A.: Trigonometrical series. Warszawa 1935.

[21]) Allgemein folgt aus $\gamma_{\pm n} = O(n^\varkappa)$, $\delta_{\pm n} = O(n^\varrho)$ mit $\varkappa, \varrho < -1$ die Abschätzung $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\gamma_\nu\, \delta_{n-\nu}| = O(n^\varkappa) + O(n^\varrho)$ für $n \to \infty$.

Dept. of Math., University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio (U.S.A.).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 3. Februar 1954.)

HORNFECK, B.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 271—273 (1954)

Ein Satz über die Primzahlmenge.

Von
BERNHARD HORNFECK.

Nach Herrn OSTMANN[1]) heißt eine Menge $\mathfrak{M}$ nicht negativer ganzer Zahlen *irreduzibel*, wenn sie nicht als SCHNIRELMANN-Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ zweier Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit mindestens je zwei Elementen darstellbar ist. Herr WIRSING[2]) nennt eine Menge $\mathfrak{M}$ *total irreduzibel*, wenn auch jede Menge $\mathfrak{M}'$, die von einer Stelle an mit $\mathfrak{M}$ übereinstimmt, irreduzibel ist, und beweist: *Fast alle Mengen* $\mathfrak{M}$ *sind total irreduzibel.*

Den Inhalt dieser Note bildet der

Satz: *Die Primzahlmenge* $\mathfrak{P}=\{p_1, p_2, \ldots\}=\{2, 3, 5, \ldots\}$ *ist total irreduzibel.*

Beweis. $\mathfrak{P}^*=\{p_1^*, p_2^*, \ldots\}$ stimme von einer Stelle an mit $\mathfrak{P}$ überein, und es sei

$$\mathfrak{P}^*=\mathfrak{A}+\mathfrak{B} \tag{1}$$

mit $\mathfrak{A}=\{a_1=p_1^*, a_2, \ldots\}$, $\mathfrak{B}=\{b_1=0, b_2, \ldots\}$, und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien nicht einelementig. Einer der Summanden $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ ist gewiß unendlich; sei dies $\mathfrak{A}$.

Zunächst muß auch $\mathfrak{B}$ unendlich sein. Wäre nämlich etwa $\mathfrak{B}=\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ endlich und $k\geq 2$, so ergäbe (1) in Verbindung mit dem Primzahlsatz

$$\varliminf_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\frac{x}{\log x}}\geq\frac{1}{k}\ ^{3}). \tag{2}$$

Andererseits gibt es nach Herrn KNÖDEL[4]) zu jedem k-tupel von nicht negativen ganzen Zahlen $b_1=0$, $b_2<b_3<\cdots<b_k$ weniger als

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)\frac{x}{\log^k x} \tag{3}$$

Primzahlen $p_i\leq x$, für die auch alle p_i+b_λ $(\lambda=1, 2, \ldots, k)$ Primzahlen sind. Demnach wäre

$$A(x)<c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)\frac{x}{\log^k x}, \qquad k\geq 2, \tag{4}$$

---

[1]) OSTMANN, H.: Über den Summenbegriff in der additiven Zahlentheorie. Math. Ann. **120**, 165—196 (1948).

[2]) WIRSING, E.: Ein metrischer Satz über Mengen ganzer Zahlen. Arch. Math. IV, 392—398 (1954).

[3]) $A(x)$ ist die Anzahlfunktion von $\mathfrak{A}$, d.h. die Anzahl aller $a_i\in\mathfrak{A}$, $0<a_i\leq x$; entsprechend $B(x)$ usw.

[4]) KNÖDEL, W.: Sätze über Primzahlen. Mh. Math. **55**, 62—75 (1951). Diese Arbeit wird im folgenden mit [K] zitiert.

oder

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\frac{x}{\log x}}=0 \tag{5}$$

im Widerspruch zu (2).

Der Satz ist also bewiesen, wenn wir die Unmöglichkeit von (1) mit unendlichen Summanden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zeigen.

Wie bei der Herleitung von (5) aus (3) erhält man bei unendlichem $\mathfrak{B}$ aus (3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\frac{x}{\log^{k-1}x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{B(x)}{\frac{x}{\log^{k-1}x}}=0 \quad \text{für alle} \quad k\geq 2$$

oder

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\frac{x}{\log^{k}x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{B(x)}{\frac{x}{\log^{k}x}}=0 \quad \text{für alle} \quad k\geq 1; \tag{6}$$

wegen $A(x)\cdot B(x)\geq c_2\cdot P^*(x)>c_3\frac{x}{\log x}$ liefert (6) noch

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\log^{k}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{B(x)}{\log^{k}x}=\infty \quad \text{für alle} \quad k\geq 1. \tag{7}$$

Hieraus erhält man für $x_0\geq c_4>e^{e^e}$ [5])

$$b_k<c_6\log^k x_0 \quad (x_0\geq c_4); \tag{8}$$

denn gäbe es immer wieder einmal ein $b_k>c_6\log^k x_0=c_6 y^k$ ($c_6>1$, beliebig), so würde immer wieder einmal (y fest)

$$\frac{B(c_6 y^k)}{\log^2(c_6 y^k)}<\frac{k}{k^2\log^2 y}\to 0 \quad (k\to\infty)$$

gelten im Widerspruch zu (7).

Ist aber (8) erfüllt, so läßt sich in (3) die Konstante $c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ weiter nach oben abschätzen. In [K] zeigt Herr KNÖDEL, daß

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)=c_7\left\{\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^{k-v_s}\right\}^{-1} \tag{9}$$

ist, wobei v_s die Anzahl der mod p_s inkongruenten Lösungen von $\prod_{i=1}^{k}(z+b_i)\equiv 0$ (p_s) ist. (In [K] können $c_4(k)$ und $c_{16}(k)$ durch 1 ersetzt werden, ebenso $c_{22}(k)$ durch c_{22} wegen $e^{-\gamma}<1$, wo γ die EULERsche Konstante ist; das Produkt in (9) kann bis ∞ erstreckt werden, weil von einer Stelle an $v_s=k$ ist.) Für $v_s\neq k$ kommen nur Primzahlen p_s in Frage, für die aus

$$z+b_i\equiv 0\,(p_s) \quad \text{für ein gewisses} \quad i\in\{1, 2, \ldots, k\}$$

auch folgt

$$z+b_j\equiv 0\,(p_s) \quad \text{für ein gewisses} \quad j\in\{1, 2, \ldots, k\},\ j\neq i,$$

oder

$$b_j-b_i\equiv 0\,(p_s). \tag{10}$$

[5]) x_0 wird so gewählt, daß neben (8) auch die Abschätzungen (16) und (17) richtig sind; dazu muß $\log\log\log x_0\geq c_5>1$ sein. Das hier fest gewählte x_0 wird in der folgenden Rechnung beibehalten, um den Aufbau der Abschätzung (18) erkennen zu lassen, von der in einer späteren Arbeit Gebrauch gemacht wird.

Seien p_λ die hierfür in Frage kommenden p_s ($v_\lambda < k$). Wegen $v_\lambda > 0$ gilt

$$\frac{1}{\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^{k-v_s}} < \prod_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)^{-k}. \tag{11}$$

Da es weniger als k^2 Differenzen $b_j - b_i$ gibt, ist wegen (10) und (8)

$$\prod_{\lambda} p_\lambda < \prod_{i<j}(b_j - b_i) < (c_6)^{k^2}\log^{k^3} x_0. \tag{12}$$

In (11) wird die rechte Seite höchstens größer, wenn wir statt der p_λ die ersten Primzahlen $p_1, p_2, \ldots$ nehmen. Dies wollen wir tun, und zwar so weit, daß gerade noch (12) erfüllt ist. Es wird also

$$\left\{\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^{k-v_s}\right\}^{-1} < \prod_{t=1,2,\ldots}\left(1-\frac{1}{p_t}\right)^{-k}, \tag{13}$$

wobei

$$\prod_{t=1,2,\ldots} p_t < (c_6)^{k^2}\log^{k^3} x_0 \tag{14}$$

erfüllt ist.

Statt (14) gilt auch

$$\sum_{t=1,2,\ldots} \log p_t < c_8\, k^5 \log\log x_0. \tag{15}$$

Bekanntlich ist $\vartheta(y) = \sum_{p \le y} \log p > c_9\, y$. Daher folgt mit $y = \frac{c_8}{c_9} k^5 \log\log x_0$ in Verbindung mit (15)

$$p_t < c_{10}\, k^5 \log\log x_0. \tag{16}$$

Deshalb wird in (13)

$$\prod_{t=1,2,\ldots}\left(1-\frac{1}{p_t}\right)^{-k} < c_{11}^k \log^k k \cdot (\log\log\log x_0)^k. \tag{17}$$

Gilt also für die Elemente von $\mathfrak{B}$ die Abschätzung (8), so hat man für $c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ noch

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k) < c_{12}^k \log^k k \cdot (\log\log\log x_0)^k. \tag{18}$$

Wie beim Übergang von (3) zu (4) wäre also, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unendlich sind,

$$f(k, x, x_0) = c_{12}^k (\log k)^k \frac{x}{(\log x)^k} (\log\log\log x_0)^k > A(x). \tag{19}$$

Halten wir x_0 fest ($x_0 \ge c_4$), wählen $x = k^{\log k}$ und beachten

$$\lim_{k\to\infty} f(k, k^{\log k}, x_0) = 0, \tag{20}$$

so hieße das, daß $\mathfrak{A}$ kein Element enthielte im Widerspruch zur Annahme. Damit ist der Satz bewiesen.

Berlin, Mathematisches Institut der Freien Universität.

(Eingegangen am 29. Januar 1954.)

GASCHÜTZ, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 274—286 (1954)

Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden*).

Von
WOLFGANG GASCHÜTZ.

1. Bettet man eine endliche Gruppe $\mathfrak{g}$ als Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{f}$ in eine freie Gruppe $\mathfrak{F}$ ein und betrachtet den kleinsten Normalteiler $\mathfrak{f}_p$ von $\mathfrak{f}$, für den $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$ abelsch und von Primzahlexponenten p ist, so induzieren offenbar die inneren Automorphismen von $\mathfrak{F}$ eine Darstellung $\mathsf{F}^{(p)}$ von g im Restklassenkörper $\Gamma^{(p)}$ der ganzen rationalen Zahlen modulo p. Wird $\mathfrak{F}$ von e und nicht weniger Elementen erzeugt, so ist ihr Grad nach O. SCHREIER [*10*][1]) gleich

$$1 + (e - 1)(\mathfrak{g} : 1). \tag{1.1}$$

Bei der Bedeutung, die der Zusammenhang endliche Gruppe — freie Gruppe einerseits und die modulare Darstellungstheorie andererseits für das Studium der endlichen Gruppen immer mehr erlangen, scheint mir die Untersuchung dieser Darstellungen eine naheliegende Aufgabe zu sein. Die merkwürdige Abhängigkeit der Zahl (1.1) von e und $\mathfrak{g}$ läßt dabei erwarten, daß die zu gewinnenden Einsichten keine allzu glatte Formulierung gestatten werden. In der vorliegenden Arbeit soll der algebraische Teil dieser Untersuchung durchgeführt und die Struktur der Darstellung $\mathsf{F}^{(p)}$ durch die der regulären Darstellung[2]) beschrieben werden. Alles weitere muß dann der heute noch nicht vollständig durchgeführten feineren, arithmetischen Untersuchung der modularen Gruppenringe überlassen bleiben.

Ein erstes Ergebnis rechtfertigt die Fragestellung weiterhin: Bei festem e gehören alle so gewonnenen Darstellungen zur gleichen Darstellungsklasse, $\mathsf{F}^{(p)}$ hängt also bis auf Transformationen mit einer festen Matrix (Äquivalenz) nicht von der gewählten Einbettung, d.h. nicht von $\mathfrak{f}$ und der elementweisen Identifizierung von $\mathfrak{F}/\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$, sondern nur von $\mathfrak{g}$, p und e ab.

Der Einfluß der Erzeugendenzahl e auf die Darstellung kann mit dem Verfahren von K. REIDEMEISTER zur Bestimmung von Erzeugenden und Relationen für Untergruppen in einfacher Weise angegeben werden. Für jede Erzeugende von $\mathfrak{F}$, die zur Erzeugung von $\mathfrak{g}$ „überflüssig" ist, tritt jeweils einmal die reguläre Darstellung als direkter Summand hinzu. Nach abermaliger Anwendung des REIDEMEISTER-Verfahrens auf eine geeignete Einbettung von $\mathfrak{g}$ läßt sich sodann mit einem Gedanken von H. G. SCHUMANN [*11*]

*) Herrn Prof. Dr. KURT REIDEMEISTER zum 60. Geburtstag.

[1]) Die eckigen Klammern beziehen sich auf die Literaturübersicht am Ende der Arbeit.

[2]) Etwa unter Zugrundelegung der Ergebnisse in [*1*], IX, 7.

die grobe Struktur der Darstellung klären: Ihre irreduziblen Diagonalbestandteile stimmen (auch hinsichtlich der Vielfachheit des Auftretens) bis auf Äquivalenz mit denen der $(e-1)$-fachen regulären Darstellung vermehrt um eine Einsdarstellung vom Grade 1 überein. Für $p \nmid g : 1$ ist damit nach dem Satz von H. MASCHKE $\mathsf{F}^{(p)}$ vollständig bestimmt.

Diese einfache Beschreibung von $\mathsf{F}^{(p)}$ im Falle $p \nmid g : 1$ überträgt sich nicht auf den Fall $p \mid g : 1$. Die dann eintretenden Abweichungen werden im wesentlichen beeinflußt von der Struktur desjenigen unzerlegbaren direkten Summanden der regulären Darstellung von $\mathfrak{g}$, dessen „Kopf" die Einsdarstellung ist. Sie gestattet anzugeben, wie oft ein beliebiger direkter Summand der regulären Darstellung direkter Summand von $\mathsf{F}^{(p)}$ ist, und wie der verbleibende Rest $\mathsf{H}^{(p)}$ beschaffen ist. $\mathsf{H}^{(p)}$ kann auch folgendermaßen invariant durch $\mathfrak{g}$ und p beschrieben werden: Man bilde eine möglichst große Gruppe $\mathfrak{H}$ mit abelschem Normalteiler $\mathfrak{h}$ vom Exponenten p, $\mathfrak{H}/\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \leqq \Phi(\mathfrak{H})$[3]. Wird dann $\mathfrak{h}$ bei den inneren Automorphismen von $\mathfrak{H}$ als Darstellungsmodul für $\mathfrak{g}$ angesehen, so wird durch ihn gerade $\mathsf{H}^{(p)}$ induziert.

Als Nebenresultat stellt sich sogar $\mathfrak{H}$ als Invariante von $\mathfrak{g}$ und p heraus[4]). $\mathfrak{H}$ als Erweiterung mit $\mathfrak{g}$ scheint mir für die SCHREIERsche Erweiterungstheorie[5]) von besonderer Bedeutung zu sein. Sie kann als Träger der Faktorensystembesonderheiten für Erweiterungen mit $\mathfrak{g}$ über abelschen Gruppen vom Exponenten p betrachtet werden[6]). Über ihre Ordnung läßt sich mit dem Vorstehenden und einem Satz von DICKSON eine Aussage machen.

Zum Abschluß werden ein Beispiel behandelt und Anwendungen auf die Bestimmung der Erzeugendenzahlen endlicher Gruppen gemacht.

Die Arbeit bedient sich der Sprache der Darstellungsmoduln, die hier dem Matrixkalkül vorzuziehen ist, da keine Charakterenrechnungen angestellt werden[7]).

2. Es sei $\mathfrak{g}$ im folgenden stets eine endliche Gruppe, die von e Elementen erzeugt wird. Ist $\mathfrak{W}$ eine Gruppe und ω ein Homomorphismus von $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{g}$, so nennen wir das Paar $(\mathfrak{W}, \omega)$ eine $\mathfrak{g}$-*Erweiterung*. Wird durch ω eine Untergruppe von $\mathfrak{W}$ isomorph auf $\mathfrak{g}$ abgebildet, so sagen wir $(\mathfrak{W}, \omega)$ *zerfällt*. Wird durch ω eine echte Untergruppe von $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{g}$ abgebildet, so sagen wir $(\mathfrak{W}, \omega)$ *zerspaltet*. Diese Begriffe decken sich mit den in [4] definierten, wenn man für den dort betrachteten Normalteiler den Kern von ω setzt.

Ist der Kern $\mathfrak{w}$ von ω abelsch, so definieren wir gemäß

$$w + v = w\,v, \qquad W^{\omega}\,w = W\,w\,W^{-1}$$
$$w, v \in \mathfrak{w}, \qquad W \in \mathfrak{W}$$

---

[3]) $\Phi(\mathfrak{G})$ = Durchschnitt der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

[4]) Herr Prof. H. WIELANDT machte mich schon früher in einem Gespräch auf die Existenz einer Gruppe mit den Eigenschaften von $\mathfrak{H}$ aufmerksam.

[5]) Siehe [9].

[6]) Bei geeigneter Induktion läßt sich nach G. FRATTINI jede Erweiterung auf diesen Fall zurückführen; s. z.B. [5].

[7]) Man ziehe herüber etwa [1], III, 2 oder [11], § 110 oder [4] zu Rate.

den (additiv verknüpften) *Kernmodul* von $(\mathfrak{W}, \omega)$ und bezeichnen ihn, da er $(1 = 0$ gesetzt) dieselben Elemente wie $\mathfrak{w}$ enthält, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, ebenfalls mit $\mathfrak{w}$. Er ist ein $\mathfrak{g}$-*Modul* in der Bezeichnungsweise von [4]. Hat er Primzahlexponenten p, d.h. gilt $p\,w = 0$ für alle $w \in \mathfrak{w}$, so kann $\mathfrak{w}$ in Übereinstimmung mit [4] in natürlicher Weise als $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-*Modul* aufgefaßt werden, $\Gamma^{(p)}$ Restklassenkörper der ganzen rationalen Zahlen modulo p. Alle Modulbegriffe wie Teilmodul, Homomorphismus, Isomorphismus ($\cong$), direkte Summe ($\oplus$) usw. sollen, wenn nicht besonders vermerkt, stets $\mathfrak{g}$ als Operatorenbereich zulassen.

Es ist nach Definition des Kernmoduls klar, daß der Verband der Normalteiler von $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}$ als Untergruppe aufgefaßt, mit dem Verband der Teilmoduln von $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}$ als $\mathfrak{g}$-Modul aufgefaßt, verbandsisomorph ist.

Zu jedem $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{w}$ existiert eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit einem Kernmodul, der zu $\mathfrak{w}$ isomorph ist; z.B. die aus der Gruppe der Elemente (w, g) mit der Verknüpfung

$$(w, g)\,(v, h) = (w + g\,v, g\,h)$$

$w, v \in \mathfrak{w}$; $g, h \in \mathfrak{g}$ und dem Homomorphismus $(w, g) \to g$ bestehende. Sie ist eine zerfallende $\mathfrak{g}$-Erweiterung.

Existiert für zwei $\mathfrak{g}$-Erweiterungen $(\mathfrak{W}, \omega)$, $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ ein Homomorphismus (Isomorphismus) σ von $\mathfrak{W}$ auf $\hat{\mathfrak{W}}$ bei dem

$$W^{\hat{\omega}\sigma} = W^{\omega}, \qquad W \in \mathfrak{W} \tag{2.1}$$

gilt, so heiße σ ein *Homomorphismus* (*Isomorphismus*) von $(\mathfrak{W}, \omega)$ auf $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$. Die Isomorphismen von $\mathfrak{g}$-Erweiterungen sind klassenbildend.

Hilfssatz 1. Ein Homomorphismus (Isomorphismus) σ von $(\mathfrak{W}, \omega)$ auf $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ induziert einen Homomorphismus (Isomorphismus) des Kernmoduls $\mathfrak{w}$ von $(\mathfrak{W}, \omega)$ auf den Kernmodul $\hat{\mathfrak{w}}$ von $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$.

Beweis. Wir setzen $w^{\sigma} = \sigma\,w$ für $w \in \mathfrak{w}$. Dann gilt trivialerweise $\sigma(w + v) = \sigma\,w + \sigma\,v$, $w, v \in \mathfrak{w}$ und

$$\sigma(W^{\omega}\,w) = \sigma(W\,w\,W^{-1}) = (W\,w\,W^{-1})^{\sigma} = W^{\sigma}\,w^{\sigma}\,W^{-\sigma} = W^{\hat{\omega}\sigma}(\sigma\,w);$$

nach (2.1) also $\sigma(W^{\omega}w) = W^{\omega}(\sigma\,w)$. Ist σ eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{W}$, so offenbar auch von $\mathfrak{w}$; w. z. b. w.

Man kann jedoch im allgemeinen nicht aus der Existenz eines Homomorphismus (Isomorphismus) von einem Kernmodul auf einen anderen die Existenz eines Homomorphismus (Isomorphismus) für die zugehörigen $\mathfrak{g}$-Erweiterungen erschließen. Speziell gilt aber

Hilfssatz 2. Sind $\mathfrak{w}$ und $\hat{\mathfrak{w}}$ $\mathfrak{g}$-Moduln, σ ein Homomorphismus (Isomorphismus) von $\mathfrak{w}$ auf $\hat{\mathfrak{w}}$, $(\mathfrak{W}, \omega)$ und $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ zerfallende $\mathfrak{g}$-Erweiterungen mit den Kernmoduln $\mathfrak{w}$ bzw. $\hat{\mathfrak{w}}$, so kann σ zu einem Homomorphismus (Isomorphismus) von $(\mathfrak{W}, \omega)$ auf $(\hat{\mathfrak{W}}, \hat{\omega})$ fortgesetzt werden.

Beweis. $R_{\mathfrak{W}^{\omega}}$ bzw. $\hat{R}_{\hat{\mathfrak{W}}^{\hat{\omega}}}$ seien die Elemente einer Gruppe, die durch ω bzw. $\hat{\omega}$ isomorph auf $\mathfrak{g}$ abgebildet wird. $W \in \mathfrak{W}$ bzw. $\hat{W} \in \hat{\mathfrak{W}}$ ist dann eindeutig darstellbar in der Form $W = w\,R_{W^{\omega}}$, $w \in \mathfrak{w}$ bzw. $\hat{W} = \hat{w}\,\hat{R}_{\hat{W}^{\hat{\omega}}}$, $\hat{w} \in \hat{\mathfrak{w}}$.

Die gemäß $(wR_g)^\sigma = (\sigma w)\hat{R}_g$ erklärte Abbildung von $\mathfrak{W}$ ist ein Homomorphismus der verlangten Art; w. z. b. w.

Wir werden des öfteren Aussagen über die Erzeugendenzahlen von Gruppenerweiterungen machen. Das erleichtert der

Hilfssatz 3. Es sei $(\mathfrak{W}, \omega)$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung und der Kern $\mathfrak{w}$ nilpotent von endlicher Ordnung.

$\mathfrak{W}$ wird dann und nur dann von e Elementen erzeugt, wenn $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$[8]) von e Elementen erzeugt wird. $\mathfrak{w}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$ ist abelsch und als Kernmodul von $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}), \omega)$ direkte Summe von einfachen $\mathfrak{g}$-Moduln. $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}), \omega)$ zerfällt.

Beweis. Nach bekannten Eigenschaften der Φ-Untergruppe folgt aus $\{E_1(\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})), \ldots, E_e(\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}))\} = \mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$[8]) sogar $\{E_1, \ldots, E_e\} = \mathfrak{W}$. Die weiteren Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus [5], Satz 7.

3. Eine Gruppe, die n freie Erzeugende besitzt, nennen wir kurz *n-frei*. $\mathfrak{F}$ sei e-frei und $(\mathfrak{F}, \varphi)$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung. Der Kern $\mathfrak{f}$ von $(\mathfrak{F}, \varphi)$ ist nach O. Schreier[9]) eine $[1+(e-1)(\mathfrak{g}:1)]$-freie Gruppe. Für eine Primzahl p sei $\mathfrak{f}_p$ der kleinste Normalteiler von $\mathfrak{f}$ mit einer Faktorgruppe $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$, die abelsch und vom Exponenten p ist. $\mathfrak{f}_p$ ist Normalteiler von $\mathfrak{F}$. Die Bilder von $\mathfrak{F}, \mathfrak{f}, F \in \mathfrak{F}$ usw. bei dem natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}/\mathfrak{f}_p$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}^{(p)}, \mathfrak{f}^{(p)}, F^{(p)}$ usw. $(\mathfrak{F}, \varphi)$ ist dann ebenfalls $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit dem Kernmodul $\mathfrak{f}^{(p)}$, der den $\Gamma^{(p)}$-Rang $[1+(e-1)(\mathfrak{g}:1)]$ hat.

Satz 1. *Die $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ ist bis auf Isomorphismen nur von $\mathfrak{g}$, p und e, nicht von φ abhängig:*

Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 4. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, die von n Elementen erzeugt wird, $\mathfrak{A}$ kleinster abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

In jedem Erzeugendensystem $E_1\mathfrak{A}, \ldots, E_n\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ existiert ein Erzeugendensystem $\overline{E}_1 \in E_1\mathfrak{A}, \ldots, \overline{E}_n \in E_n\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{G}$.

Beweis. $D_1, \ldots, D_n$ sei ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{G}$. Jedes Elementsystem

$$\widetilde{E}_1 \in E_1\mathfrak{A}, \ldots, \widetilde{E}_n \in E_n\mathfrak{A} \tag{3.1}$$

erzeugt eine Gruppe $\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\}$ mit $\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{A}$ ist entweder $\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} = \mathfrak{G}$ oder

$$\{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} \cap \mathfrak{A} = 1. \tag{3.2}$$

Im letzteren Falle wird $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n$ vermöge $\widetilde{D}_1 = \{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} \cap D_1\mathfrak{A}, \ldots, \widetilde{D}_n = \{\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_n\} \cap D_n\mathfrak{A}$ eineindeutig ein Elementsystem

$$\widetilde{D}_1 \in D_1\mathfrak{A}, \ldots, \widetilde{D}_n \in D_n\mathfrak{A} \tag{3.3}$$

mit

$$\{\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n\} \cap \mathfrak{A} = 1 \tag{3.4}$$

[8]) $\{\mathfrak{K}\}$ ist die von dem Komplex $\mathfrak{K}$ erzeugte Gruppe.

[9]) Siehe [10].

zugeordnet. Würde (3.2) für alle $(\mathfrak{A}:1)^n$ Elementsysteme (3.1) gelten, so würde auch (3.4) für alle $(\mathfrak{A}:1)^n$ Elementsysteme (3.3) gelten, im Widerspruch zur Definition von $D_1, \ldots, D_n$.

Hilfssatz 5. Es werde $\mathfrak{G}$ von n Elementen erzeugt. $\mathfrak{N}$ sei endlicher, auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

In jedem Erzeugendensystem $E_1\mathfrak{N}, \ldots, E_n\mathfrak{N}$ für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ existiert ein Erzeugendensystem $\overline{E}_1 \in E_1\mathfrak{N}, \ldots, \overline{E}_n \in E_n\mathfrak{N}$ für $\mathfrak{G}$[10]).

Beweis. Der Satz ist zunächst richtig, wenn $\mathfrak{N}:1 = 1$ ist. Es sei daher $\mathfrak{N}:1 > 1$ und der Satz bewiesen für auflösbare Normalteiler mit kleinerer Ordnung als $\mathfrak{N}:1$. $\mathfrak{A}$ sei ein kleinster (notwendig abelscher) Normalteiler von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$. Dann wird auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ von n Elementen erzeugt, und es ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ mit einer Ordnung $< \mathfrak{N}:1$. Ist $E_i\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ Bild der Restklasse $E_i\mathfrak{N}$ bei dem natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, so erzeugen $E_1\mathfrak{N}/\mathfrak{A}, \ldots, E_n\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$ die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}/\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$. Nach der Induktionsvoraussetzung existieren daher Elemente $\overline{\overline{E}}_1\mathfrak{A} \in E_1\mathfrak{N}/\mathfrak{A}, \ldots, \overline{\overline{E}}_n\mathfrak{A} \in E_n\mathfrak{N}/\mathfrak{A}$, die $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ erzeugen. Hieraus folgt nach Hilfssatz 3 die Existenz von Elementen

$$\overline{E}_1 \in \overline{\overline{E}}_1\mathfrak{A} < E_1\mathfrak{N}, \ldots, \overline{E}_n \in \overline{\overline{E}}_n\mathfrak{A} < E_n\mathfrak{N},$$

die $\mathfrak{G}$ erzeugen.

Beweis zu Satz 1. Es sei $\hat{\mathfrak{F}}$ e-frei und $(\hat{\mathfrak{F}}, \hat{\varphi})$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung. Wir zeigen, daß die entsprechend $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ gebildete $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\hat{\mathfrak{F}}^{(p)}, \hat{\varphi})$ mit $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ isomorph ist.

$E_1, \ldots, E_e$ sei ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{F}$. $E_1^{\varphi}, \ldots, E_e^{\varphi}$ erzeugen dann $\mathfrak{g}$. Nach Hilfssatz 4 existieren Elemente

$$\hat{E}_1^{(p)}, \ldots, \hat{E}_e^{(p)} \in \hat{\mathfrak{F}}^{(p)}, \qquad \hat{E}_i^{(p)\hat{\varphi}} = E_i^{\varphi} \tag{3.5}$$

die $\hat{\mathfrak{F}}^{(p)}$ erzeugen. Die Abbildungen $E_1 \to \hat{E}_1^{(p)}, \ldots, E_e \to \hat{E}_e^{(p)}$ definieren daher einen Homomorphismus σ von $\mathfrak{F}$ auf $\hat{\mathfrak{F}}^{(p)}$, für den $F^{(p)\hat{\varphi}\sigma} = F^{(p)\varphi}$, $F^{(p)} \in \mathfrak{F}^{(p)}$ und speziell $\hat{\mathfrak{f}}^{(p)\sigma^{-1}} = \mathfrak{f}$ gilt. Da $\mathfrak{f}_p$ einziger Normalteiler von $\mathfrak{f}$ ist, für den $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$ direktes Produkt von $1 + (e-1)(\mathfrak{g}:1)$ zyklischen Gruppen der Ordnung p ist, ist $\mathfrak{f}_p$ Kern von σ. Nach (2.1) sind daher $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ und $(\hat{\mathfrak{F}}^{(p)}, \hat{\varphi})$ isomorph; w. z. b. w.

Den hiermit und nach Hilfssatz 1 bis auf Isomorphie nur von $\mathfrak{g}$, p und e abhängenden Kernmodul von $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$. Diese Bezeichnung hat dann und nur dann einen Sinn, wenn $\mathfrak{g}$ von e Elementen erzeugt wird.

4. Wir klären jetzt, in welcher Weise die Struktur von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ von e abhängt. Dazu verwenden wir das von K. REIDEMEISTER zuerst angegebene, von O. SCHREIER[9]) verfeinerte Verfahren zur Bestimmung von Erzeugendensystemen und Relationen für Untergruppen.

[10]) Der Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes aus der Zahlentheorie; siehe H. HASSE, Zahlentheorie, Berlin 1949, S. 48. Wie man sich leicht am Beispiel der unendlichen zyklischen Gruppe klar macht, gilt er nicht für beliebige Normalteiler $\mathfrak{N}$. Diesem Mangel ist es zuzuschreiben, daß Satz 1 nicht allgemeiner und unabhängig von p für $(\mathfrak{F}, \psi)$ bewiesen werden kann.

$\mathfrak{F}, \varphi$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie in **3**; desgleichen die daraus abgeleiteten Bezeichnungen. $E_1, \ldots, E_e$ sei ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{F}$,

$$R_g, \quad g \in \mathfrak{g}, \tag{4.1}$$

ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{F}$, das der Bedingung $(\Sigma)^{11}$) genügt. Nach SCHREIER bilden dann die $1+(e-1)(\mathfrak{g}:1)$ von 1 verschiedenen unter den Elementen

$$R_g E_i R_{(R_g E_i)^\varphi}^{-1}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \quad i = 1, \ldots, e, \tag{4.2}$$

ein freies Erzeugendensystem für $\mathfrak{f}$.

$\tilde{\mathfrak{F}}$ sei $(e+1)$-frei und, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, von $E_1, \ldots, E_e, E_{e+1}$ erzeugt. φ sei der durch

$$E_i^{\tilde{\varphi}} = E_i^{\varphi}, \qquad i = 1, \ldots, e$$
$$E_{e+1}^{\tilde{\varphi}} = 1$$

erzeugte Homomorphismus von $\tilde{\mathfrak{F}}$ auf $\mathfrak{g}$. $\tilde{\mathfrak{f}}$ sei der Kern von φ. Die Elemente (4.1) bilden dann auch ein Repräsentantensystem für $\mathfrak{g}$ in $\tilde{\mathfrak{F}}$, das der Bedingung $(\Sigma)^{11}$) genügt. Es bilden daher die von 1 verschiedenen der Elemente (4.2) zusammen mit den Elementen

$$R_g E_{e+1} R_{(R_g E_{e+1})^{\tilde{\varphi}}}^{-1} = R_g E R_g^{-1}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \tag{4.3}$$

ein freies Erzeugendensystem für $\tilde{\mathfrak{f}}$. Hieraus und aus dem für $\mathfrak{F}$ Festgestellten ergibt sich, daß die von 0 verschiedenen unter den Elementen

$$(R_g E_i R_{(R_g E_i)^\varphi}^{-1})^{(p)}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \quad i = 1, \ldots, e$$

eine $\Gamma^{(p)}$-Basis für $\mathfrak{f}^{(p)}$ und diese und die Elemente

$$(R_g E_{e+1} R_g^{-1})^{(p)} = g E_{e+1}^{(p)}, \qquad g \in \mathfrak{g}, \tag{4.4}$$

eine solche für $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)}$ bilden. Die Elemente (4.4) bilden eine Basis eines Teilmoduls von $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)}$, die bei $\mathfrak{g}$ regulär permutiert wird. Daher ist dieser Teilmodul isomorph zum regulären $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ [12]). $\mathfrak{f}^{(p)}$ ist ebenfalls Teilmodul von $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)}$. Also gilt $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)} \cong \mathfrak{f}^{(p)} \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$. Da nach Satz 1 $\mathfrak{f}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und $\tilde{\mathfrak{f}}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e+1}^{(p)}$ ist, erhalten wir somit

Satz 2. *Es ist* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e+1}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$.

5. Bei der weiteren Untersuchung von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ legen wir nach den Ergebnissen der vorangehenden Abschnitte eine spezielle Einbettung von $\mathfrak{g}$ zugrunde: $\mathfrak{F}$ sei $(\mathfrak{g}:1-1)$-frei und von den Elementen

$$E_g, g \in \mathfrak{g}, g \neq 1 \tag{5.1}$$

erzeugt. φ sei der durch $E_g \to g$ erzeugte Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{g}$. Die hieraus resultierenden Begriffe bezeichnen wir wieder wie in **3**. Die Elemente

[11]) Siehe [8], S. 69—80.
[12]) Siehe [4].

(5.1) und $E_1 = 1$ sind dann ein Repräsentantensystem, das der Bedingung (Σ)[11]) genügt. Daher bilden die von 1 verschiedenen Elemente der Form $E_g E_h E^{-1}_{(E_g E_h)^\varphi}$ ein freies Erzeugendensystem für $\mathfrak{f}$. Das sind die $(\mathfrak{g}:1-1)^2$ Elemente

$$E_g E_h E_{gh}^{-1}; \qquad g, h \in \mathfrak{g}; \qquad g, h \neq 1.$$

Wir setzen allgemein $c_{g,h} = (E_g E_h E_{gh}^{-1})^{(p)}$; $g, h \in \mathfrak{g}$. Dabei ist

$$c_{g,h} = 0 \quad \text{für} \quad g = 1 \quad \text{oder} \quad h = 1.$$

$\mathfrak{f}^{(p)}$ wird dann von den Elementen $c_{g,h}$, $g, h \neq 1$ erzeugt. Wie man leicht bestätigt, gelten in $\mathfrak{f}^{(p)}$ die folgenden Relationen:

$$g\, c_{h,i} = c_{g,h} + c_{gh,i} - c_{g,hi}, \qquad g, h, i \in \mathfrak{g}. \tag{5.2}$$

$(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$[13]) werde von den unabhängigen Elementen c_g, $g \in \mathfrak{g}$, $g \neq 1$ erzeugt. Die Abbildung $c_{g,h} \to c_g + g\, c_h - c_{gh}$, $g, h \in \mathfrak{g}$, erzeugt einen Homomorphismus λ von $\mathfrak{f}^{(p)}$ in $(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$, wie sich aus (5.2) ergibt. Wir zeigen, λ ist ein Isomorphismus und $(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}/\lambda\, \mathfrak{f}^{(p)} \cong \Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)}$; dabei ist $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ der von den Elementen $c - g\, c$, $g \in \mathfrak{g}$, erzeugte Teilmodul von $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ und c erzeugendes Element von $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$. — Sei μ der durch die Abbildung $c_g \to c - g\, c$, $g \in \mathfrak{g}$, definierte Homomorphismus von $(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ in $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$. $\lambda\, \mathfrak{f}^{(p)}$ liegt, (5.2) zufolge, im Kern von μ. $\mu[(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}]$ hat den $\Gamma^{(p)}$-Rang $\mathfrak{g}:1-1$, da $c \notin \Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ und $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} = \Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} + \Gamma^{(p)} c$. Ist f der $\Gamma^{(p)}$-Rang von $\lambda\, \mathfrak{f}^{(p)}$, so gilt daher

$$f \leq (\mathfrak{g}:1-1)(\mathfrak{g}:1) - (\mathfrak{g}:1-1) = (\mathfrak{g}:1-1)^2.$$

Andererseits ist

$$(\mathfrak{g}:1-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} = \lambda\, \mathfrak{f}^{(p)} + \sum_{\substack{g \in \mathfrak{g} \\ g \neq 1}} \Gamma^{(p)} c_g$$

also

$$(\mathfrak{g}:1-1)(\mathfrak{g}:1) \leq f + (\mathfrak{g}:1-1)$$

oder

$$(\mathfrak{g}:1-1)^2 \leq f.$$

Da $\mathfrak{f}^{(p)}$ den $\Gamma^{(p)}$-Rang $(\mathfrak{g}:1-1)^2$ hat, ist also λ ein Isomorphismus und $\lambda\, \mathfrak{f}^{(p)}$ der Kern von μ.

Ist $\mathfrak{e}_1$ der einfache $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul, in dem $\mathfrak{g}$ invariant operiert, so ist offenbar $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}/\Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \mathfrak{e}_1$.

Hieraus erhalten wir zunächst

Satz 3. $\mathfrak{f}^{(p)}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}$ *und* $[(\mathfrak{g}:1-2) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}] \oplus \mathfrak{e}_1$ *sind von gleicher Komposition*[14]).

Durch Satz 2 und Satz 3 ist die Komposition für jedes $\mathfrak{f}^{(p)}_{\mathfrak{g},e}$ bestimmt, genauer, auf die der regulären Moduln $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ zurückgeführt.

[13]) $n \oplus \mathfrak{a}$ für einen $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{a}$ bedeute hier und im folgenden die n-fache direkte Summe $\underbrace{\mathfrak{a} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}}_{n}$.

[14]) Unter der *Komposition* einer Gruppe mit Kompositionsreihe verstehen wir die Zahlenmenge, die für alle Typen einfacher Gruppen angibt, wie oft diese in einer Kompositionsreihe der Gruppe als Kompositionsfaktor auftreten.

Für $p \nmid \mathfrak{g}:1$ ist wegen der Gültigkeit des Satzes von H. MASCHKE[15]) durch Satz 3 die Struktur von $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ eindeutig bestimmt. Es gilt also

Satz 4. *Für* $p \nmid \mathfrak{g}:1$ *ist* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong [(e-1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}] \oplus \mathfrak{e}_1$.

6. Bevor wir an eine Verfeinerung der Ergebnisse von **5** gehen, müssen wir einiges über $\mathfrak{g}$-Moduln zwischenschalten.

Mit $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir den Durchschnitt der maximalen Teilmoduln des $\mathfrak{g}$-Moduls $\mathfrak{a}$. Der Restklassenmodul $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ ist dann direkte Summe von einfachen $\mathfrak{g}$-Moduln. Die Anzahl der darin auftretenden Summanden bezeichnen wir mit $r(\mathfrak{a})$. Man bestätigt leicht die folgenden Tatsachen: $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}) \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{b}/\mathfrak{r}(\mathfrak{b})$. Ist $\mathfrak{a}$ Teilmodul von $\mathfrak{b}$, so gilt $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) + \mathfrak{a})$.

$\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ besitzt nach bekannten Sätzen[16]) eine Darstellung

$$\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong (r_1 \oplus \mathfrak{d}_1) \oplus (r_2 \oplus \mathfrak{d}_2) \oplus \cdots \oplus (r_t \oplus \mathfrak{d}_t) \tag{6.1}$$

mit $\mathfrak{d}_i \not\cong \mathfrak{d}_k$ für $i \neq k$, $\mathfrak{d}_i/\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_i) = \mathfrak{e}_i$ einfach, $\mathfrak{e}_i \not\cong \mathfrak{e}_k$ für $i \neq k$. Die $\mathfrak{e}_i$, $i = 1, \ldots, t$ repräsentieren alle Typen einfacher $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Moduln. $\mathfrak{e}_1$ sei wie vor Satz 3 definiert. Es ist $r_1 = 1$. Für $p \mid \mathfrak{g}:1$ ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) \neq 0$.

In [4] zeigten wir, daß für ein geeignetes n jeder $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul mit einem Restklassenmodul von $n \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ isomorph ist. Wir beweisen jetzt genauer

Hilfssatz 6. Zu jedem $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul $\mathfrak{a}$ existiert eine direkte Summe

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{d}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{i_{r(\mathfrak{a})}}$$

und ein Teilmodul $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{c}$ derart, daß $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{c}/\mathfrak{a}$ ist. Es ist dann $\mathfrak{c}/\mathfrak{r}(\mathfrak{c}) \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

Beweis. Wie schon vorher bemerkt ist $\mathfrak{a}$ jedenfalls isomorph einem Restklassenmodul $\mathfrak{c}^*/\tilde{\mathfrak{a}}$ einer direkten Summe $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{d}_{j_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{j_s}$. Da $r(\mathfrak{d}_i) = 1$ ist, ist $r(\mathfrak{c}^*) = s$ die Anzahl der darin auftretenden Summanden $\mathfrak{d}_j$. Ist $r(\mathfrak{c}^*) = r(\mathfrak{a})$, so ist der Satz also richtig. Sei $r(\mathfrak{c}^*) > r(\mathfrak{a})$ und der Satz bewiesen, für $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Moduln $\mathfrak{a}$, die Restklassenmoduln einer direkten Summe von $\mathfrak{d}_j$ mit weniger als $r(\mathfrak{c}^*)$ Summanden sind. Wir setzen

$$\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} = \mathfrak{d}_{j_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{j_{\nu-1}} \oplus \mathfrak{d}_{j_{\nu+1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{j_s}, \qquad \nu = 1, \ldots, s.$$

Dann ist $\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} + \tilde{\mathfrak{a}} \neq \mathfrak{c}^*$ nicht für alle $\nu = 1, \ldots, s$, da $\mathfrak{d}_{j_\nu}$ nur einen maximalen Teilmodul enthält und zufolge $\mathfrak{c}^*/\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} \cong \mathfrak{d}_{j_\nu}$ anderenfalls $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \bigcap_\nu (\bar{\mathfrak{d}}_{j_\nu} \oplus \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_{j_\nu})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{c}^*)$ und dann $r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{c}^*)$ wäre. Sei daher $\bar{\mathfrak{d}}_{j_n} + \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}^*$. Nach den Isomorphiesätzen ist dann $\bar{\mathfrak{d}}_{j_n}/\bar{\mathfrak{d}}_{j_n} \cap \tilde{\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}$. Da $\bar{\mathfrak{d}}_{j_n}$ direkte Summe von $r(\mathfrak{c}^*) - 1$ Summanden ist, folgt die erste Behauptung des Satzes aus der Induktionsannahme. Die zweite Aussage ergibt sich unmittelbar aus dem im zweiten Absatz dieses Abschnittes Gesagten und $r(\mathfrak{d}_i) = 1$; w. z. b. w.

Ferner benötigen wir

Hilfssatz 7. Aus $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{a} \cong (m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}$.

---

[15]) Siehe [4].

[16]) Siehe [1], IX, 7.

Beweis. σ sei ein Isomorphismus von $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{a}$ auf $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{b}$. Nach dem gleichen Schlußschema wie beim Beweis des Hilfssatzes 5 läßt sich zunächst zeigen, daß in jedem Erzeugendensystem

$$c_1 + \mathfrak{a}, \ldots, c_m + \mathfrak{a}$$

und

$$d_1 + \mathfrak{b}, \ldots, d_m + \mathfrak{b}, \qquad \sigma(c_i + \mathfrak{a}) = d_i + \mathfrak{b},$$

für $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{a}$ bzw. $(m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)})/\mathfrak{b}$ ein Erzeugendensystem

$$\bar{c}_1 \in c_1 + \mathfrak{a}, \ldots, \bar{c}_m \in c_m + \mathfrak{a}$$

bzw.

$$\bar{d}_1 \in d_1 + \mathfrak{b}, \ldots, \bar{d}_m \in d_m + \mathfrak{b}$$

für $m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ existiert. Aus $\Gamma^{(p)}$-Rangabzählung ergibt sich, daß die $\bar{c}_i$, $i = 1, \ldots, m$ mit $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ isomorphe Teilmoduln erzeugen, deren Durchschnitte paarweise 0 ist. Gleiches gilt für $\bar{d}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Die Abbildungen $\bar{c}_i \to \bar{d}_i$ induzieren daher einen Automorphismus von $m \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$. Nach Wahl der Erzeugenden wird hierbei $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ abgebildet; w. z. b. w.

7. Satz 5'. *Für $p \mid \mathfrak{g} : 1$ ist*

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}^{(p)} \cong\ & [(\mathfrak{g} : 1 - 1 - s_1) \oplus \mathfrak{d}_1] \\ & \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_2 - s_2) \oplus \mathfrak{d}_2] \oplus \cdots \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_t - s_t) \oplus \mathfrak{d}_t] \\ & \oplus \mathfrak{h}.\end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)/\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)) \cong (s_1 \oplus \mathfrak{e}_1) \oplus \cdots \oplus (s_t \oplus \mathfrak{e}_t)$ *und* $\mathfrak{h}$ *ein beliebiger und stets existierender Teilmodul von* $\mathfrak{s} = (s_1 \oplus \mathfrak{d}_1) \oplus \cdots \oplus (s_t \oplus \mathfrak{d}_t)$ *mit* $\mathfrak{s}/\mathfrak{h} \cong \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)$.

$\mathfrak{h}$ *enthält keinen direkten Summanden* $\cong \mathfrak{d}_i$, $i = 1, \ldots, t$.

Beweis. Nach **5** und Hilfssatz 7 ist $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}^{(p)}$ mit jedem Teilmodul von $(\mathfrak{g} : 1 - 1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ isomorph, dessen Restklassenmodul mit $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ isomorph ist. Da $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}/\Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \mathfrak{e}_1$ ist, muß nach Hilfssatz 7 $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) \oplus (r_2 \oplus \mathfrak{d}_2) \oplus \cdots \oplus (r_t \oplus \mathfrak{d}_t)$ sein. Auf Grund der im zweiten Absatz von **6** gemachten Bemerkungen sind also die Zahlen $(\mathfrak{g} : 1 - 1 - s_1)$, $(\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_2 - s_2, \ldots, (\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_t - s_t \geq 0$. Nach Hilfssatz 6 ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)$ isomorph mit einem Restklassenmodul $\mathfrak{s}/\mathfrak{h}$. Daher ist $\Delta_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong (\mathfrak{g} : 1 - 1) \oplus \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}/\mathfrak{f}^*$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}^* \cong\ & [(\mathfrak{g} : 1 - 1 - s_1) \oplus \mathfrak{d}_1] \\ & \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_2 - s_2) \oplus \mathfrak{d}_2] \oplus \cdots \oplus [((\mathfrak{g} : 1 - 2)\, r_t - s_t) \oplus \mathfrak{d}_t] \oplus \mathfrak{h}.\end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 7 hat also $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}:1-1}^{(p)}$ die im Satz angegebene Struktur.

Wäre $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{d} \oplus \bar{\mathfrak{d}}$, $\mathfrak{d} \cong \mathfrak{d}_k$, so wäre $\mathfrak{d}$ auch direkter Summand von $\mathfrak{s}$. Denn mit $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ sind nach [4] Satz 2 auch die direkten Summanden von $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-m-Moduln, und diese definitionsgemäß direkte Summanden eines jeden $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Moduls, der sie enthält. Nach dem Satz von W. KRULL[17]) wäre also $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1)$ schon Restklassenmodul einer direkten Summe von $\mathfrak{d}_i$, die weniger Summanden enthält als $\mathfrak{s}$, was auf Grund von $r(\mathfrak{s}) = r(\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1))$ nicht sein kann; w. z. b. w.

[17]) [6], Fundamentalsatz.

Mit Satz 2 folgt aus Satz 5′ allgemeiner

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong [(e-s_1)\oplus \mathfrak{d}_1]\oplus[((e-1)r_2-s_2)\oplus \mathfrak{d}_2]\oplus\cdots\oplus[((e-1)r_t-s_t)\oplus \mathfrak{d}_t]\oplus \mathfrak{h}.$$

Die hierin auftretenden Summandenanzahlen sind alle ≥ 0. Setzen wir

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong [(e-s_1)\oplus \mathfrak{d}_1]\oplus[((e-1)r_2-s_2)\oplus \mathfrak{d}_2]\oplus\cdots\oplus[((e-1)r_t-s_t)\oplus \mathfrak{d}_t]$$

$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \begin{cases} \mathfrak{h} \text{ für } p \mid \mathfrak{g}:1 \\ 0 \text{ für } p \nmid \mathfrak{g}:1, \end{cases}$$

so erhalten wir also aus Satz 4 (unter Beachtung des Satzes von MASCHKE und, dementsprechend, $s_i = 0$, $i = 1, \ldots, t$, für $p \nmid \mathfrak{g}:1$) und Satz 5′

Satz 5. $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong \mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$, p *beliebig.* $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ *enthält keinen direkten Summanden* $\cong \mathfrak{d}_i$, $i = 1, \ldots, t$.

Ohne Beweis bemerken wir, daß die Zahlen $s_1, \ldots, s_t$ auch die folgende Darstellung gestatten:

$$s_i = \frac{z_i}{k_i}.$$

Dabei ist z_i die Anzahl der verschränkten Homomorphismen[18]) von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{e}_i$ und k_i die Anzahl der Elemente des Automorphismenkörpers von $\mathfrak{e}_i$.

8. Es soll für $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ noch eine andere Charakterisierung angegeben werden.

$(\mathfrak{M}, \mu)$ sei eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit folgenden Eigenschaften

m_1) $\mathfrak{M}$ wird von e Elementen erzeugt,

m_2) $(\mathfrak{M}, \mu)$ zerfällt,

m_3) der Kern von μ ist abelsch vom Exponenten p,

m_4) $\mathfrak{M}$ ist möglichst groß.

$(\mathfrak{H}, \eta)$ sei eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit folgenden Eigenschaften

h_1) $(\mathfrak{H}, \eta)$ zerspaltet nicht,

h_2) der Kern von η ist abelsch vom Exponenten p,

h_3) $\mathfrak{H}$ ist möglichst groß.

$\mathfrak{H}$ wird dann von e Elementen erzeugt, wie Hilfssatz 3 lehrt.

$\mathfrak{F}$ mit den Erzeugenden $E_1, \ldots, E_e$ und φ mögen die gleiche Bedeutung wie in 3 haben. Nach Hilfssatz 5 existieren

$$M_1, \ldots, M_e \in \mathfrak{M}, \qquad H_1, \ldots, H_e \in \mathfrak{H}$$

mit

$$M_i^{\mu} = H_i^{\eta} = E_i^{(p)\varphi}, \qquad i = 1, \ldots, e.$$

Die Abbildungen $E_i^{(p)} \to M_i$ bzw. $E_i^{(p)} \to H_i$ erzeugen dann einen Homomorphismus σ bzw. τ von $(\mathfrak{F}^{(p)}, \varphi)$ auf $(\mathfrak{M}, \mu)$ bzw. $(\mathfrak{H}, \eta)$. Es sei $\overline{\mathfrak{h}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{m}}$ der Kern von σ bzw. τ. $(\mathfrak{M}, \mu)$ bzw. $(\mathfrak{H}, \eta)$ ist dann mit der $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ bzw. $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{m}}, \varphi)$ isomorph.

[18]) [3], I, 3; dort auch „*cocycle*" genannt.

Satz 6. *Es ist*

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong \overline{\mathfrak{m}} \oplus \overline{\mathfrak{h}} \tag{8.1}$$

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)} \cong \overline{\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \overline{\mathfrak{h}}. \tag{8.2}$$

Der Kernmodul von $(\mathfrak{M}, \mu)$ *bzw.* $(\mathfrak{H}, \eta)$ *ist also mit* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ *bzw.* $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ *isomorph.*

Beweis. Es ist $\overline{\mathfrak{m}} + \overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{f}^{(p)}$, denn die $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\mathfrak{F}^{(p)}/\{\overline{\mathfrak{m}}, \overline{\mathfrak{h}}\}, \varphi)$ muß nach Wahl von $(\mathfrak{M}, \mu)$ und $(\mathfrak{H}, \eta)$ gleichzeitig zerfallend und nicht zerspaltend sein.

Es ist $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}} = 1^{(p)}$: Sei $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}} \neq 1^{(p)}$ und $\mathfrak{n}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{F}^{(p)}$ in $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}}$. Dem Zerfallen von $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ entsprechend werde $\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}$ durch φ isomorph auf $\mathfrak{g}$ abgebildet. Wäre $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}/\mathfrak{n}$ eine Untergruppe von $\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\mathfrak{n}$ und

$$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}/\mathfrak{n} = (\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{n})\,(\overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}/\mathfrak{n}), \qquad \overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{n} \cap \overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}/\mathfrak{n} = \mathfrak{n}, \tag{8.3}$$

so wäre $(\mathfrak{F}^{(p)}/\mathfrak{f}^{(p)} \cap \overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}, \varphi)$ zerfallend und $\mathfrak{F}^{(p)}/\mathfrak{f}^{(p)} \cap \overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}$ größer als $\mathfrak{M}$. Bestünde (8.3) für kein $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}$, so wäre $(\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\mathfrak{n}, \varphi)$ nicht zerspaltend und $\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\mathfrak{n}$ größer als $\mathfrak{H}$. In jedem Falle folgt aus $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{h}} \neq 1^{(p)}$ ein Widerspruch.

Da $\mathfrak{f}^{(p)} \cong \mathfrak{f}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$, ist hiermit (8.1) bewiesen.

Mit $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ ist auch $(\mathfrak{F}^{(p)}/\mathfrak{r}(\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}), \varphi)$ zerfallend. Ist $\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{r}(\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}})/\overline{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{e}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{e}_{i_e}$, so wird nach Hilfssatz 3 auch die zerfallende $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit dem Kernmodul $\mathfrak{d}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{d}_{i_e}$ von e Elementen erzeugt. Dieser ist Hilfssatz 6 zufolge größter $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Modul $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{e}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{e}_{i_e}$. Daher ist $\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}} \cong \overline{\mathfrak{m}}$ direkte Summe von $\mathfrak{d}_i$.

$\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{m}} \cong \overline{\mathfrak{h}}$ enthält keinen direkten Summanden $\cong \mathfrak{d}_i$: Wäre $\mathfrak{f}^{(p)}/\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{d}/\overline{\mathfrak{m}} \oplus \overline{\mathfrak{d}}/\overline{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{d}/\overline{\mathfrak{m}} \cong \mathfrak{d}_i$, so wäre $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{d}}, \varphi)$ eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung mit einem Kernmodul $\cong \mathfrak{d}_i$. $\mathfrak{d}_i$ ist nach [4] Satz 2 $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-m-Modul; daher wäre nach [4] Satz 7 $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{d}}, \varphi)$ zerfallend, was dem Nichtzerspalten von $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{m}}, \varphi)$ widerspräche.

Aus Satz 5 und den letzten beiden Absätzen folgt wegen der Gültigkeit des Satzes von W. KRULL[17]) $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und $\overline{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ sein; w. z. b. w.

Da $\overline{\mathfrak{m}}$ unabhängig von $\overline{\mathfrak{h}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}^{(p)}$ bestimmt wurde und $(\mathfrak{F}^{(p)}/\overline{\mathfrak{m}}, \varphi)$ und $(\overline{\mathfrak{F}}^{(p)}/\overline{\mathfrak{h}}, \varphi)$ isomorphe $\mathfrak{g}$-Erweiterungen sind, erhalten wir aus dem Beweis zu Satz 6 noch als Nebenresultat

Satz 7. $(\mathfrak{H}, \eta)$ *ist durch* h_1, h_2, h_3 *bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt.*

Jede $\mathfrak{g}$-Erweiterung $(\mathfrak{W}, \omega)$ mit Kern $\mathfrak{w}$ vom Exponenten p enthält offenbar eine Untergruppe $\mathfrak{U}$, so daß $(\mathfrak{U}, \omega)$ nicht zerspaltet. Es läßt sich nun leicht einsehen, daß es dann stets einen Homomorphismus von $(\mathfrak{H}, \eta)$ auf $(\mathfrak{U}, \omega)$ gibt. — Da die Struktur von $(\mathfrak{U}, \omega)$ und die Einbettung des Kernes von $(\mathfrak{U}, \omega)$ in $\mathfrak{w}$ die Erweiterung $(\mathfrak{W}, \omega)$ vollständig bestimmen, nennen wir $(\mathfrak{H}, \eta)$ die $\mathfrak{g}$-Haupterweiterung zum Exponenten p.

Über ihre Ordnung gilt

Satz 8. *Für* $p \mid \mathfrak{g}:1$ *läßt der* $\Gamma^{(p)}$-*Rang von* $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(p)}$ *durch die Ordnung einer* p-*Sylowgruppe von* $\mathfrak{g}$ *geteilt den Rest* 1.

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 5 und einem Satz von L. E. DICKSON[19]). Letzterer besagt, daß der $\Gamma^{(p)}$-Rang von $\mathfrak{d}_i$, $i=1,\ldots,t$ für $p \mid \mathfrak{g}:1$ durch die Ordnung einer p Sylowgruppe von $\mathfrak{g}$ teilbar ist.

9. Beispiel. $\mathfrak{g}$ sei die nichtabelsche Gruppe der Ordnung 6.

$p \nmid \mathfrak{g}:1$: Nach Satz 4 ist

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},2}^{(p)} \cong \Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} \oplus \mathfrak{e}_1 \cong \mathfrak{m}_{\mathfrak{g},2}^{(p)}$$

$p=2$: $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus (2 \oplus \mathfrak{d}_2)$, $\mathfrak{d}_1$ einreihig, $\mathfrak{d}_1 > \mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) > 0$, $\mathfrak{r}(\mathfrak{d}_1) \cong \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{e}_2$ einfach. Daher ist nach Satz 5

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},2}^{(p)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus (2 \oplus \mathfrak{d}_2) \oplus \mathfrak{e}_1$$
$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},2}^{(2)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus (2 \oplus \mathfrak{d}_2)$$
$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(2)} \cong \mathfrak{e}_1.$$

$p=3$: $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(3)} \cong \mathfrak{d}_1 \oplus \mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ einreihig,

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_1^0 > \mathfrak{d}_1^1 > \mathfrak{d}_1^2 > \mathfrak{d}_1^3 = 0$$
$$\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_2^0 > \mathfrak{d}_2^1 > \mathfrak{d}_2^2 > \mathfrak{d}_2^3 = 0$$
$$\mathfrak{d}_1^0/\mathfrak{d}_1^1 \cong \mathfrak{d}_1^2/\mathfrak{d}_1^3 \cong \mathfrak{d}_2^1/\mathfrak{d}_2^2 \cong \mathfrak{e}_1$$
$$\mathfrak{d}_2^0/\mathfrak{d}_2^1 \cong \mathfrak{d}_2^2/\mathfrak{d}_2^3 \cong \mathfrak{d}_1^1/\mathfrak{d}_1^2 \cong \mathfrak{e}_2.$$

Daher ist nach Satz 5

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g},2}^{(3)} \cong (2 \oplus \mathfrak{d}_1) \oplus \mathfrak{e}_2$$
$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},2}^{(3)} \cong (2 \oplus \mathfrak{d}_1)$$
$$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{(3)} \cong \mathfrak{e}_2.$$

In ähnlicher Weise lassen sich leicht die $\mathfrak{g}$ und p behandeln, für die die unzerlegbaren $\mathfrak{g}$-$\Gamma^{(p)}$-Moduln einreihig sind; näheres über diese in [7].

Es folgen Anwendungen, die Aussagen über die Erzeugendenzahlen von Gruppenerweiterungen machen.

Satz 9. *$(\mathfrak{W}, \omega)$ sei eine $\mathfrak{g}$-Erweiterung, deren Kern $\mathfrak{w}$ eine endliche p-Gruppe ist.*

Ist gemäß Hilfssatz 3

$$\mathfrak{w}^* = \mathfrak{w}/\mathfrak{w} \cap \Phi(\mathfrak{W}) \cong (i_1 \oplus \mathfrak{e}_1) \oplus \cdots \oplus (i_t \oplus \mathfrak{e}_t),$$

so wird $\mathfrak{W}$ dann und nur dann von e Elementen erzeugt, wenn

$$i_1 \leq e - s_1, \qquad i_2 \leq (e-1)\, r_2 - s_2, \ldots, i_t \leq (e-1)\, r_t - s_t \tag{9.1}$$

ist.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 genügt es, einzusehen, daß dann und nur dann $\mathfrak{W}/\mathfrak{w} \cap \Phi(\mathfrak{W})$ von e Elementen erzeugt wird.

Wird $\mathfrak{W}/\mathfrak{w} \cap \Phi(\mathfrak{W})$ von e Elementen erzeugt, so existiert in der Bezeichnungsweise von 8 ein Homomorphismus von $(\mathfrak{M}, \mu)$ auf $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w} \cap \Phi(\mathfrak{W}), \omega)$. Nach Hilfssatz 1 und Satz 6 wird hierdurch ein Homomorphismus von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ auf $\mathfrak{w}^*$ induziert. Das ist nach Definition von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ und Satz 6 nur möglich, wenn die Ungleichungen (9.1) bestehen.

[19]) Siehe [2].

Ist umgekehrt (9.1) erfüllt, so existiert ein Homomorphismus von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g},e}^{(p)}$ auf $\mathfrak{w}^*$, der nach Satz 6 und Hilfssatz 2 zu einem Homomorphismus von $(\mathfrak{M},\mu)$ auf $(\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W}),\omega)$ fortgesetzt werden kann. $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}\cap\Phi(\mathfrak{W})$ ist also mit einer Faktorgruppe der von e Elementen erzeugbaren Gruppe $\mathfrak{M}$ isomorph; w. z. b. w.

Satz 10. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *abelsch und* $(\mathfrak{W},\omega)$ *eine* $\mathfrak{g}$*-Erweiterung, deren Kern endliche* p*-Gruppe ist,* $p\nmid\mathfrak{g}:1$.

$\mathfrak{W}$ *wird dann und nur dann von* e *Elementen erzeugt, wenn in der Bezeichnungsweise von Satz* 9

$$e\geq i_1,\qquad e\geq i_2+1,\ldots,e\geq i_t+1$$

ist.

Beweis. Da für abelsches $\mathfrak{g}$ jede absolut irreduzible Darstellung von $\mathfrak{g}$ genau einmal in der regulären Darstellung auftritt und für $p\nmid\mathfrak{g}:1$ der Satz von MASCHKE gilt, ist $\Gamma_{\mathfrak{g}}^{(p)}\cong\mathfrak{e}_1\oplus\mathfrak{e}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{e}_t$.

Alles weitere folgt aus Satz 9; w. z. b. w.

Die Sätze 9 und 10 lassen sich sinngemäß auf $\mathfrak{g}$-Erweiterungen mit nilpotentem Kern verallgemeinern.

Im nächsten Satz sei allgemein $e_{\mathfrak{G}}$ die minimale Erzeugendenzahl der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Satz 11. *Es sei* $\mathfrak{W}$ *eine endliche Gruppe und*

$$\mathfrak{W}=\mathfrak{w}_0>\mathfrak{w}_1>\cdots>\mathfrak{w}_{r-1}>\mathfrak{w}_r=1 \tag{9.2}$$

eine Normalreihe, $\mathfrak{w}_i$ *in* $\mathfrak{w}_{i-1}$ *maximaler und auflösbarer Normalteiler von* $\mathfrak{W}$ *für* $i=2,\ldots,r$; $(\mathfrak{w}_{i-1}:\mathfrak{w}_i,\ \mathfrak{w}_{k-1}:\mathfrak{w}_k)=1$ *für* $i,k=1,\ldots,r,\ i\neq k$.

Ist $e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1}\neq 1$, *so ist* $e_{\mathfrak{W}}=e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1}$. *Ist* $e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1}=1$, *so ist* $e_{\mathfrak{W}}=1$ *oder* 2.

Beweis. Trivialerweise gilt $e_{\mathfrak{W}}\geq e_{\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_1}$.

Der Satz ist richtig für $r=1$. Sei $r>1$ und der Satz für Gruppen mit (9.2) entsprechender Normalreihe einer Länge $<r$ bewiesen. Dann gilt er für $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_{r-1}$. Wir setzen $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_{r-1}=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{w}_{r-1}:1=p$, p Primzahl, und betrachten $\mathfrak{W}$ mit dem natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{W}$ auf $\mathfrak{W}/\mathfrak{w}_{r-1}$ als $\mathfrak{g}$-Erweiterung. Da $\mathfrak{w}_{r-1}$ abelsch ist folgt alles weitere aus Satz 10, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{w}_{r-1}$ als Kernmodul einfach ist.

Literatur.

[1] ARTIN, E., C. J. NESBITT and R. M. THRALL: Rings with minimum condition. Ann Arbor 1948. — [2] DICKSON, L. E.: Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 389—398 (1907). — [3] EILENBERG, S., and S. MACLANE: Ann. of Math. (II) **48**, 51—78 (1947). — [4] GASCHÜTZ, W.: Math. Z. **56**, 376—387 (1952). — [5] GASCHÜTZ, W.: Math. Z. **58**, 160—170 (1953). — [6] KRULL, W.: Math. Z. **23**, 151—196 (1925). — [7] MORITA, K.: Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A **4**, 177—194 (1951). — [8] REIDEMEISTER, K.: Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig 1932. — [9] SCHREIER, O.: Mh. Math. u. Phys. **34**, 165—180 (1926). — [10] SCHREIER, O.: Abh. math. Seminar Hamburg **5**, 161—183 (1927). — [11] SCHUMANN, H. G.: Math. Ann. **114**, 385—413 (1937). — [12] WAERDEN, B. L. v. D.: Moderne Algebra, 2. Aufl., Bd. II. 1940.

Kiel, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 12. März 1954.)

STOLL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 287—304 (1954)

Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen.

Von

WILHELM STOLL.

§ 1. Einleitung.

Eine Teilmenge $\mathfrak{R}$ einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}^n$ der (komplexen) Dimension n heißt *analytisch*[1]), wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{H}^n$ eine offene Umgebung $\mathfrak{U}$ und eine Menge $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{U}$ analytischer Funktionen f gibt, deren gemeinsame Nullstellen $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U} = \bigcap_{P \in \mathfrak{F}} \{P \mid f(P) = 0\}$ ergeben. Ist eine analytische Menge $\mathfrak{R} \neq \varnothing$ die Vereinigung $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$ zweier analytischer Mengen $\mathfrak{R}_1 \not\supseteq \mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_2 \not\supseteq \mathfrak{R}_1$ so ist $\mathfrak{R}$ *reduzibel*, andernfalls *irreduzibel*. Eine analytische, Menge $\mathfrak{R} \neq \varnothing$ ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler irreduzibler analytischer Mengen $\mathfrak{R}_\lambda$ mit $\mathfrak{R}_\mu \not\supseteq \mathfrak{R}_\lambda$ für $\mu \neq \lambda$. Diese „irreduziblen Teile" von $\mathfrak{R}$ sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. In jeden kompakten Teil von $\mathfrak{H}^n$ dringen nur endlich viele irreduzible Teile von $\mathfrak{R}$ ein.

Um die *Dimension*[1]) von $\mathfrak{R}$ in einem Punkt $P_0 \in \mathfrak{R}$ zu definieren, wählt man eine Abbildung $\zeta(P)$, die eine offene Umgebung $\mathfrak{U}$ von P_0 auf eine offene Menge $\mathfrak{U}'$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ pseudokonform abbildet. Die Menge der analytischen Ebenen $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{R}^n$, für die $\zeta(P_0)$ isolierter Punkt von $\mathfrak{E} \cap \zeta(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U})$ ist, sei $\mathfrak{D}$, wobei ein Punkt als nulldimensionale analytische Ebene aufgefaßt werde. Mit $\dim \mathfrak{E}$ werde die Hälfte der topologischen Dimension von $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Dann hängt die Zahl $p = n - \operatorname{Max}_{\mathfrak{E} \in \mathfrak{D}} \dim \mathfrak{E}$ nicht von der Wahl von $\mathfrak{U}$ und $\zeta(P)$ ab. Sie heißt die Dimension von $\mathfrak{R}$ in P_0 und werde mit $p = \dim_{P_0} \mathfrak{R}$ bezeichnet. Für $P_0 \in \mathfrak{H}^n - \mathfrak{R}$ ist $\dim_{P_0} \mathfrak{R} = -1$. Die Dimension von $\mathfrak{R}$ ist $\dim \mathfrak{R} = \operatorname{Max}_{P \in \mathfrak{H}^n} \dim_P \mathfrak{R}$. Gilt $\dim \mathfrak{R} = \dim_P \mathfrak{R}$ für alle Punkte $P \in \mathfrak{R}$, so heißt $\mathfrak{R}$ *rein-dimensional*. Eine irreduzible analytische Menge ist rein-dimensional. Sind $\mathfrak{R}_\lambda$ die irreduziblen Teile von $\mathfrak{R}$, so ist $\dim \mathfrak{R} = \operatorname{Max}_{\lambda = 1, 2, \ldots} \dim \mathfrak{R}_\lambda$.

Der Punkt $P_0 \in \mathfrak{R}$ heißt *gewöhnlicher* Punkt[1]) der analytischen Menge $\mathfrak{R}$, wenn eine Abbildung $\zeta(P)$ eine offene Menge $\mathfrak{U}$ von P_0 pseudokonform so auf eine offene Menge $\mathfrak{V}$ des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{R}^n$ abbildet, daß dabei $\mathfrak{R}$ in den Teil $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{V} = \zeta(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U})$ einer analytischen Ebene $\mathfrak{E}$ übergeht. Mit $\mathfrak{R}'$ werde die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{R}_\lambda$

[1]) Zum Begriff der analytischen Menge vergleiche man KNESER [6], REMMERT und STEIN [12] und HERMES [4].

ein irreduzibler Teil der Dimension p_λ von $\mathfrak{R}$, so sind $\mathfrak{R}_\lambda^*$ und $\mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}^*$ zusammenhängende, komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension p_λ. Es gilt

$$(1.1) \qquad \mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}^*}, \qquad \mathfrak{R}_\lambda = \overline{\mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}^*},$$

$$(1.2) \qquad \mathfrak{R}_\lambda^* \supseteq \mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{R}_\lambda \cap \mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}^* = \varnothing \quad \textit{für} \quad \lambda \neq \mu.$$

Die Reste $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{R}_\lambda - \mathfrak{R}^*$ sind analytische Mengen mit

$$(1.3) \qquad \dim_P(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}^*) < \dim_P \mathfrak{R} \quad \textit{für} \quad P \in \mathfrak{R},$$

$$(1.4) \qquad \dim_P(\mathfrak{R}_\lambda - \mathfrak{R}) < \dim_P \mathfrak{R}_\lambda \quad \textit{für} \quad P \in \mathfrak{R}_\lambda.$$

Eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{R}$ heiße auch eine *analytische Fläche*. Dann und nur dann ist $\mathfrak{R}$ eine analytische Fläche, wenn es eine Menge $\mathfrak{F}$ analytischer Funktionen gibt, für die gilt:

a) Jeder Funktion $f \in \mathfrak{F}$ ist eindeutig ein Gebiet $\mathfrak{U}_f \subseteq \mathfrak{H}^n$ zugeordnet.

b) In $\mathfrak{U}_f$ ist f analytisch und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}_f = \{P \mid f(P) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f.

c) Sind $f_1 \in \mathfrak{F}$ und $f_2 \in \mathfrak{F}$, so ist $f_1 f_2^{-1}$ in $\mathfrak{U}_{f_1} \cap \mathfrak{U}_{f_2}$ analytisch.

d) Es ist $\mathfrak{H}^n = \bigcup_{f \in \mathfrak{F}} \mathfrak{U}_f$.

Die Menge $\mathfrak{F}$ ist eine *Cousin-Verteilung* II. Art.

Die *Vielfachheit*[2]) der Nullstelle $\nu(P)$ der Funktion f im Punkt P ist unabhängig von $f \in \mathfrak{F}$ und heiße die Vielfachheit von $\mathfrak{R}$. Einer analytischen Fläche $\mathfrak{R}$ können verschiedene Funktionen $\nu(P)$ als Vielfachheit zugeordnet werden. Es gibt aber genau eine „natürliche" Vielfachheit $\nu(P, \mathfrak{R})$, die in jedem gewöhnlichen Punkt $P \in \mathfrak{R}$ den Wert $\nu(P, \mathfrak{R}) = 1$ hat. Wird jedem irreduziblen Teil $\mathfrak{R}_\lambda$ von $\mathfrak{R}$ eine natürliche Zahl p_λ zugeordnet $(\lambda = 1, \ldots, \Lambda \leq \infty)$, so ist $\nu(P) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} p_\lambda \nu(P, \mathfrak{R}_\lambda)$ eine mögliche Wahl der Vielfachheit von $\mathfrak{R}$, und auf diese Weise erhält man auch jede mögliche Wahl.

Ist $\mathfrak{R}$ eine analytische Menge in der offenen Teilmenge $\mathfrak{G} < \mathfrak{H}^n$ und gibt es eine analytische Menge $\mathfrak{R}_1$ aus $\mathfrak{H}^n$ mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{R}_1$, so heiße $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}^n$ *fortsetzbar*. Man kann $\mathfrak{R}_1$ minimal wählen, da der Durchschnitt analytischer Mengen analytisch ist. Durch diese Minimalforderung ist $\mathfrak{R}_1$ eindeutig bestimmt und heiße die *Fortsetzung* von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H}^n$. Eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{G}$ heiße in einem Punkt $P \in \mathfrak{H}^n$ *regulär*, wenn sich $\mathfrak{R}$ in eine offene Menge $\mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{G}$ mit $P \in \mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{H}^n$ fortsetzen läßt.

Nun kann man die folgende Frage stellen:

Die offene Menge $\mathfrak{G}$ der n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ unterscheide sich von $\mathfrak{H}$ nur um die analytische Menge $\mathfrak{S} = \mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ mit $\dim \mathfrak{S} = q < n$. Unter welchen Bedingungen läßt sich eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ fortsetzen?

Zwei Kriterien werden von REMMERT und STEIN [*12*] aufgestellt:

1. *Ist $\dim_P \mathfrak{R} > q$ für jeden Punkt $P \in \mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}$ fortsetzbar.*

[2]) Zur Definition der Vielfachheit vergleiche man STOLL [*15*] S. 144.

2. *Ist $\mathfrak{R}$ rein q-dimensional und in wenigstens einem Punkt eines jeden irreduziblen Teils von $\mathfrak{S}$ regulär, so ist $\mathfrak{R}$ fortsetzbar.*

Für analytische Flächen wurden diese Kriterien bereits früher von THULLEN [17] bewiesen und werden hier mit THULLEN 1 bzw. THULLEN 2 bezeichnet.

In § 2 wird nun für analytische Flächen bewiesen:

I. *Dann und nur dann läßt sich eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$, der die Vielfachheit $\nu(P)$ zugeordnet sei, in $\mathfrak{H}$ fortsetzen, wenn es ein stetiges alternierendes Differential*[3])

$$(1.5)\quad \begin{cases} \chi(P) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-2} \left\{ \sum\limits_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, d\bar{z}_\mu\, dz_\nu\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots \overset{\nu}{\|} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n + \right. \\ \qquad \left. + \sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}(P)\, dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\|} \ldots dz_n\, d\bar{z}_n \right\} \end{cases}$$

gibt, so daß für jeden Punkt $P \in \mathfrak{H}$ durch $\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, x_\mu \bar{x}_\nu$ eine positiv definite Hermitesche Form gegeben wird, und daß für jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{K} < \mathfrak{H}$ das Integral $\int\limits_{\mathfrak{K} \cap \mathfrak{R}} \nu(P)\, \chi$ existiert[4]).

Ob und inwieweit ein analoges Kriterium für rein p-dimensionale analytische Mengen mit $0 < p < n-1$ gilt, bleibt ungeklärt.

Im Falle, daß $\mathfrak{G}$ der euklidische Vektorraum $\mathfrak{R}^n$ und $\mathfrak{H}$ der projektiv abgeschlossene Raum $\mathfrak{P}^n$ ist, heiße eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}^n$ *algebraisch*, wenn es endlich viele Polynome $p_\varrho(\mathfrak{z})$ gibt, $\varrho = 1, \ldots, r$, deren gemeinsame Nullstellen $\mathfrak{R} = \bigcap\limits_{\varrho=1}^{r} \{\mathfrak{z} \mid p_\varrho(\mathfrak{z}) = 0\}$ ergeben. Eine analytische Fläche $\mathfrak{R} \subseteqq \mathfrak{R}^n$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ ist dann und nur dann algebraisch, wenn es ein Polynom $p(\mathfrak{z})$ gibt, das auf $\mathfrak{R}$ und nur auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, und zwar mit der gegebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$. Der Grad von $p(\mathfrak{z})$ heiße die *Ordnung* von $\mathfrak{R}$. Ein Kriterium zur obigen Frage gibt CHOW [3]:

3. *Eine analytische Menge $\mathfrak{R}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ ist dann und nur dann in den projektiv abgeschlossenen Raum $\mathfrak{P}^n$ fortsetzbar, wenn $\mathfrak{R}$ algebraisch ist*[5]).

Für analytische Flächen wurde dieses Kriterium bereits von THULLEN [17] aufgestellt und werde mit THULLEN 3 bezeichnet. Ein anderes Kriterium gibt RUTISHAUSER [14]:

4. *Eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ ist dann und nur dann algebraisch, wenn $\mathfrak{R} \cap \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}| \leq r\}$ einen euklidischen Oberflächeninhalt $V(r) = \underset{r \to \infty}{0}(r^{2n-2})$ hat.*

---

[3]) Da in dieser Arbeit nur alternierende Differentiale auftreten, wird für deren Produkt kein besonderes Zeichen eingeführt; statt $dz \wedge dw$ wird also $dz\, dw$ geschrieben. Das Zeichen $\overset{\mu}{\|}$ bedeutet das Fehlen des Faktors $dz_\mu\, d\bar{z}_\mu$.

[4]) Man vgl. Satz 4.

[5]) Man vgl. auch H. KNESER [6], REMMERT und STEIN [12] und CARTAN [2].

In § 3 werden zwei Beweise hierzu gegeben werden, die sich vom RUTISHAUSERschen Beweis wesentlich unterscheiden[6],[7]). Anschließend wird eine Verallgemeinerung bewiesen, zu deren Formulierung jedoch noch einige Vorbereitungen zu treffen sind: Die analytische Menge $\mathfrak{N}$ werde mit der ihr zugeordneten Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ durch eine Cousin-Verteilung $\mathfrak{F}$ gegeben. Ist $f \in \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{a} \neq 0$, so ist die Vielfachheit $\nu(z, \mathfrak{a})$ der Nullstelle z der Funktion $f(z\,\mathfrak{a})$ (bei festem Vektor $\mathfrak{a}$) unabhängig von $f \in \mathfrak{F}$. Es ist

$$(1.6) \qquad n^*(\mathfrak{a}) = \sum_z \nu(z, \mathfrak{a}) \leq \infty \quad \text{mit} \quad n^*(\mathfrak{a}) = n^*(\lambda\,\mathfrak{a}) \quad \text{für} \quad \lambda \neq 0.$$

Durch die Zuordnung

$$(1.7) \qquad \mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \to \hat{\mathfrak{a}} = (a_1 : \ldots : a_n)$$

wird $\mathfrak{R}^n - \{0\}$ analytisch auf den projektiven Raum $\mathfrak{P}^{n-1}$ abgebildet. Es sei

$$(1.8) \qquad n(\hat{\mathfrak{a}}) = n^*(\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_k = \{\hat{\mathfrak{a}} \,|\, n(\hat{\mathfrak{a}}) \leq k\}.$$

Ist $V(r)$ der euklidische Oberflächeninhalt von $\mathfrak{N} \cap \{\mathfrak{z} \,||\, \mathfrak{z}| \leq r\}$, so sei

$$(1.9) \qquad n(r) = \frac{(n-1)!}{(\pi r^2)^{n-1}} V(r).$$

Dann besagt die angekündigte Verallgemeinerung[8]):

II. *Eine analytische Menge $\mathfrak{N}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$, die den Nullpunkt nicht enthält, ist dann und nur dann algebraisch, wenn gilt*:

1. *Das Integral* $\int_0^\infty n(r) \frac{dr}{r^2}$ *existiert.*

2. *Für wenigstens eine natürliche Zahl k ist $\mathfrak{M}_k$ keine analytische Menge mit einer Dimension kleiner als $n-1$.*

In § 3 wird der Satz von RUTISHAUSER unter einer zusätzlichen Voraussetzung auf eine rein p-dimensionale analytische Menge verallgemeinert werden[9]):

III. *Eine rein p-dimensionale analytische Menge des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ läßt sich dann und nur dann in den projektiv abgeschlossenen Raum $\mathfrak{P}^n$ fortsetzen, wenn $\mathfrak{N} \cap \{\mathfrak{z} \,||\, \mathfrak{z}| \leq r\}$ einen euklidischen Oberflächeninhalt $V(r) = \underset{r \to \infty}{0}(r^{2p})$ hat und wenn $\mathfrak{N}$ längs einer analytischen Ebene $\mathfrak{E}$, die in der unendlichfernen Ebene $\mathfrak{S}$ liegt und die Dimension $n-p-2$ hat, analytisch ist. Dabei sei $0 < p < n$.*

Hiermit ist ein Fortsetzbarkeitskriterium auch im Falle $\dim \mathfrak{N} < \dim \mathfrak{S}$ gegeben, im Gegensatz zu den Kriterien von THULLEN, REMMERT und STEIN sowie RUTISHAUSER, bei denen $\dim_P \mathfrak{N} \geq \dim \mathfrak{S}$ für $P \in \mathfrak{N}$ vorausgesetzt wird.

[6]) Über die Sätze in § 3 und ihre Beweise habe ich auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Mainz (1953) berichtet.

[7]) Siehe S. 295. Der erste Beweis ist eine triviale Folgerung aus STOLL [*16*] Satz 4, S. 229. Inzwischen hat P. LELONG in [*11*] eine ähnliche Integraldarstellung wie bei STOLL [*16*] (4.15), für die ebenfalls die Abschätzung STOLL [*16*] (5.1) gilt, angekündigt, woraus er in derselben trivialen Schlußweise den Satz von RUTISHAUSER ableitet.

[8]) Man vgl. Satz 5.

[9]) Man vgl. Satz 9.

§ 2. Analytische Flächen endlichen Inhalts.

Eine Funktion $V(\mathfrak{z})$, die in einem Gebiet $\mathfrak{D}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ erklärt ist, heißt *plurisubharmonisch* oder *pseudokonform*[10]) in $\mathfrak{D}$, wenn gilt:

1. Die Funktionswerte $V(\mathfrak{z})$ sind reelle Zahlen oder $-\infty$, also
$$-\infty \leq V(\mathfrak{z}) < \infty.$$

2. In $\mathfrak{D}$ ist $V(\mathfrak{z})$ nach oben halbstetig, d.h. $\overline{\lim\limits_{\mathfrak{z}\to\mathfrak{z}_0}} V(\mathfrak{z}) \leq V(\mathfrak{z}_0)$.

3. Ist $\mathfrak{a} \neq 0$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{D}) = \{\mathfrak{z} | \mathfrak{z} = \mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a} \in \mathfrak{D}\} \neq \varnothing$, so ist $V(\mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a})$ als Funktion von z auf $\mathfrak{E}$ subharmonisch.

Ist $V(\mathfrak{z})$ in der offenen Kugel $\mathfrak{K}$ plurisubharmonisch und gibt es einen Punkt $\mathfrak{b} \in \mathfrak{K}$ mit $V(\mathfrak{b}) \neq -\infty$, so hat die Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{K} \cap \{\mathfrak{z} | V(\mathfrak{z}) = -\infty\}$ das Lebesguesche Maß Null; denn $\mathfrak{M}$ ist meßbar und in jedem Kreis $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{K})$ ist $V(\mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a})$ subharmonisch, gilt also $V(\mathfrak{b} + z\,\mathfrak{a}) = -\infty$ nur für eine Nullmenge des zweidimensionalen Lebesgueschen Maßes. Das ergibt:

Hilfssatz 1. *Ist die Funktion $V(\mathfrak{z}) \not\equiv -\infty$ im Gebiet $\mathfrak{D}$ plurisubharmonisch, so ist $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{z} | V(\mathfrak{z}) = -\infty\}$ eine Nullmenge.*

Beweis. Für einen Punkt $\mathfrak{b} \in \mathfrak{D}$ ist $V(\mathfrak{b}) \neq -\infty$. Zu einer offenen Kugel $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{D}$ gibt es endlich viele Kugeln $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_r$ aus $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_\varrho \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1} \neq \varnothing$ für $\varrho = 1, \ldots, r-1$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_r$. Wegen $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{M} \neq \mathfrak{K}_1$ ist $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{M}$ eine Nullmenge. Ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_\varrho$ eine Nullmenge, so ist $\mathfrak{K}_\varrho \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1} \cap \mathfrak{M} \neq \mathfrak{K}_\varrho \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1}$, also ist $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1} \neq \mathfrak{K}_{\varrho+1}$, d.h. $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_{\varrho+1}$ ist eine Nullmenge. Schließlich erweist sich $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_r = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}$ als eine Nullmenge. Da abzählbar viele Kugeln $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{D}$ das Gebiet $\mathfrak{D}$ überdecken, ist $\mathfrak{M}$ eine Nullmenge, w. z. b. w.

Ein Punkt $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathfrak{R}^n$ wird durch $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{z}) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ in den Raum $\mathfrak{R}^{n-1}$ projiziert. Bezeichnet man die Koordinate z_n auch mit w, so wird $\mathfrak{z} = (\mathfrak{x}, w)$. Mit Hilfssatz 1 folgt nun:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{D}$ ein Gebiet des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^{n-1}$, wird*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D} \times \{w | 0 < |w| < \varepsilon\} \qquad (\textit{mit } \varepsilon > 0) \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{D} \times \{w | |w| < \varepsilon\} \tag{2.2}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{D} \times \{w | \delta \leq |w| \leq \varepsilon\} \qquad (\textit{mit } 0 < \delta < \varepsilon) \tag{2.3}$$

gesetzt und liegt in $\mathfrak{G}$ eine analytische Fläche $\mathfrak{N} \neq \varnothing$, die $\mathfrak{M}$ nicht schneidet, so hat die Menge $\mathfrak{F}$ der Punkte $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$, für die $\mathfrak{N} \cap \pi^{-1}(\mathfrak{x})$ leer ist, das Lebesguesche Maß Null[11]).

Beweis. Wird

$$\varrho(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \max\limits_{(\mathfrak{x}, w) \in \mathfrak{N}} \log |w| & \textit{für } \mathfrak{x} \in \mathfrak{D} - \mathfrak{F} \\ -\infty & \textit{für } \mathfrak{x} \in \mathfrak{F} \end{cases} \tag{2.4}$$

gesetzt, so ist $-\infty \leq \varrho(\mathfrak{x}) \leq \log \delta$. Nun werde ein offener Polyzylinder $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{D}$ beliebig gewählt. Im Cousinschen Gebiet $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} \times \{w | 0 < |w| < \varepsilon\}$ gibt es

[10]) Man vgl. LELONG [7] bis [10] und BREMERMANN [1].

[11]) Für $n = 2$ vgl. man ROTHSTEIN [13] Satz 7 und seinen Beweis.

eine analytische Funktion $g(\mathfrak{z}) = g(\mathfrak{x}, w)$ mit $\{\mathfrak{z} \mid g(\mathfrak{z}) = 0\} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{K}^*$. Die Funktion $\frac{1}{g}$ werde in eine Laurentreihe $\frac{1}{g} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} g_\mu(\mathfrak{x})\, w^\mu$ entwickelt. Der Radius der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} g_{-\mu}(\mathfrak{x})\, w^\mu$ ist $e^{-\varrho(\mathfrak{x})} \geq \frac{1}{\delta}$. Daher ist $\varrho(\mathfrak{x})$ in dem (beliebigen) Polyzylinder $\mathfrak{K}$, also auch in $\mathfrak{D}$, plurisubharmonisch[12]). Da $\mathfrak{R} \neq \varnothing$ ist, hat $\mathfrak{F}$ das Maß Null, w. z. b. w.

Der analytischen Fläche $\mathfrak{R}$ aus dem Gebiet $\mathfrak{G}$ sei durch eine Cousin-Verteilung $\mathfrak{F}$ die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ zugeordnet. Ist $\mathfrak{z}_0 = (\mathfrak{x}_0, w_0) \in \mathfrak{D}$ und $f \in \mathfrak{F}$ eine Funktion der Verteilung mit $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{U}_f$, so habe die Funktion $f(\mathfrak{x}_0, w)$ der einen Veränderlichen w in w_0 eine Nullstelle der Vielfachheit $\nu_n(\mathfrak{x}_0, w_0) = \nu_n(\mathfrak{z}_0) \geq 0$. Die Zahl $\nu_n(\mathfrak{z}_0)$ hängt nicht von der Wahl von $f \in \mathfrak{F}$ ab. Daher ist

$$n(\mathfrak{x}) = \sum_{(\mathfrak{x}, w) \in \mathfrak{G}} \nu_n(\mathfrak{x}, w) \leq \infty \tag{2.5}$$

eindeutig als Funktion in der Projektion $\pi(\mathfrak{G})$ erklärt.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{H}$ ein Gebiet im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$, enthält das Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\}$, eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, die in einem Punkt von $\mathfrak{S} = \mathfrak{H} \cap \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\}$ singulär ist, und ist die Projektion $\mathfrak{S}^* = \pi(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{S}$ ein Gebiet, so hat die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}^*$, in denen die in* (2.5) *erklärte Schnittpunktzahl $n(\mathfrak{x}) < \infty$ ist, das Maß Null.*

Beweis. Nach THULLEN 2 ist $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt von $\mathfrak{S}$ singulär. Für jede ganze Zahl $m \geq 0$ werde $\mathfrak{M}_m = \{\mathfrak{x} \mid n(\mathfrak{x}) = m\} \cap \mathfrak{S}^*$ gesetzt. Der Punkt $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{M}_m$ werde beliebig gewählt. Man kann eine Zahl $\varepsilon > 0$ so wählen, daß auf dem Kreis $\{\mathfrak{z} \mid \pi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{x}_0,\ 0 < |w| \leq \varepsilon\}$ kein Punkt von $\mathfrak{R}$ liegt. Es ist also $m = n(\mathfrak{x}_0) = \sum_{(\mathfrak{x}_0, w) \in \mathfrak{G}} \nu_n(\mathfrak{x}_0, w) = \sum_{|w| > \varepsilon} \nu_n(\mathfrak{x}_0, w)$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz gibt es eine Kugel $\mathfrak{K}$ um $\mathfrak{x}_0$, so daß gilt

a) In $\mathfrak{H}$ liegt $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} \times \{w \mid |w| \leq \varepsilon\}$ und $\pi^{-1}(\mathfrak{M}_m) \cap \mathfrak{K}^* \cap \mathfrak{R}$ ist leer.

b) Es ist $[\mathfrak{K} \times \{w \mid \delta \leq |w| \leq \varepsilon\}] \cap \mathfrak{R} = \varnothing$ für ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon$.

Da $\mathfrak{R}$ im Punkt $(\mathfrak{x}_0, 0)$ singulär wird, ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{K}^*$ nicht leer; nach Satz 1 ist also $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{M}_m$ eine Nullmenge. Da abzählbar viele Kugeln die Menge $\mathfrak{M}_m$ überdecken, ist $\mathfrak{M}_m$ eine Nullmenge. Also hat auch $\mathfrak{M} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathfrak{M}_m$ das Maß Null, w. z. b. w.

Satz 3. *Das alternierende Differential*[3])

$$\begin{cases} \chi = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})\, d\bar{z}_\mu\, dz_\nu\, dz_1\, d\bar{z}_1 \dots \overset{\mu}{\dots} \dots \overset{\nu}{\dots} \dots dz_n\, d\bar{z}_n + \\ \quad + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})\, dz_1\, d\bar{z}_1 \dots \overset{\mu}{\dots} \dots dz_n\, d\bar{z}_n \end{cases} \tag{2.6}$$

[12]) Man vgl. BREMERMANN [1] S. 34—39.

sei im Gebiet $\mathfrak{H}$ des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ stetig. Zu jeder kompakten Teilmenge $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$ gebe es eine Konstante $c_{\mathfrak{K}} > 0$, so daß

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(\mathfrak{z})\, t_\mu \bar{t}_\nu \geq c_{\mathfrak{K}} |t_n|^2 \tag{2.7}$$

für alle $\mathfrak{z} \in \mathfrak{K}$ und alle Zahlen $t_1, \ldots, t_n$ gelte. Ist nun im Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\}$ eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ gegeben, so läßt sich $\mathfrak{R}$ dann und nur dann in $\mathfrak{H}$ fortsetzen, wenn für jeden kompakten Teil $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ das Integral $\int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z})\,\chi$ existiert.

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ fortsetzbar, so existiert das Integral $\int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z})\,\chi$; denn χ ist stetig[13]). Nun existiere für jeden kompakten Teil $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ das Integral $\int_{\mathfrak{K}\cap\mathfrak{R}} \nu(\mathfrak{z})\,\chi$. Für eine beliebige abgeschlossene Kugel $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$ ist dann

$$\infty > \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z})\,\chi \geq c_{\mathfrak{K}} \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z}) \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dz_1 d\bar{z}_1 \ldots dz_{n-1} d\bar{z}_{n-1}. \tag{2.8}$$

In der Projektion $\mathfrak{B} = \pi(\mathfrak{K})$ ist $n(\mathfrak{x}) = \sum_{(\mathfrak{x},w)\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu_n(\mathfrak{x}, w)$ erklärt. Also gilt[14])

$$\begin{cases} \infty > \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(\mathfrak{z}) \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dz_1 d\bar{z}_1 \ldots dz_{n-1} d\bar{z}_{n-1} \\ \qquad = \int_{\mathfrak{B}} n(\mathfrak{x}) \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} dx_1 d\bar{x}_1 \ldots dx_{n-1} d\bar{x}_{n-1}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Fast überall in $\mathfrak{B}$ ist daher $n(\mathfrak{x}) < \infty$. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{R}$ in allen Punkten des Ebenenstücks $\mathfrak{K} - \mathfrak{G}$ regulär. Da $\mathfrak{K}$ beliebig gewählt war, ist $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ regulär. Weil $\mathfrak{H} - \mathfrak{G}$ keinen inneren Punkt hat, ist $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ fortsetzbar, w. z. b. w.

Nunmehr folgt sofort das in der Einleitung angekündigte Kriterium I:

Satz 4. Ein Fortsetzbarkeitskriterium.

Voraussetzung. 1. *Die n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ enthalte die analytische Menge $\mathfrak{S}$ mit* $\dim \mathfrak{S} \leq n-1$.

2. *In der offenen Menge $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \mathfrak{S}$ sei eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(P)$ gegeben.*

3. *Auf $\mathfrak{H}$ gebe es ein stetiges alternierendes Differential*[3])

$$\begin{cases} \chi(P) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, dz_1 d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\overset{|}{\ldots}} \ldots \overset{\nu}{\overset{|}{\ldots}} \ldots dz_n d\bar{z}_n + \\ \qquad + \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}(P)\, dz_1 d\bar{z}_1 \ldots \overset{\mu}{\overset{|}{\ldots}} \ldots dz_n d\bar{z}_n. \end{cases} \tag{2.10}$$

In jedem Punkt $P \in \mathfrak{H}$ sei $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(P)\, x_\mu \bar{x}_\nu$ eine positiv definite Hermitesche Form.

4. *Ist $\mathfrak{K}$ ein kompakter Teil von $\mathfrak{H}$, so existiere das Integral $\int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{K}} \nu(P)\,\chi$.*

---

[13]) Man vgl. Stoll [15] Satz 11, S. 153.

[14]) Man vgl. Stoll [15] Hilfssatz 7, S. 150.

Behauptung. *Die analytische Fläche $\mathfrak{R}$ läßt sich in $\mathfrak{H}$ fortsetzen.*

Beweis. Nach Satz 3 ist $\mathfrak{R}$ in jedem gewöhnlichen Punkt P von $\mathfrak{S}$ mit $\dim_P \mathfrak{S} = n-1$ regulär. Nach THULLEN ist also $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt von $\mathfrak{S}$ regulär, w. z. b. w.

Sind übrigens die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt und ist $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt von $\mathfrak{S}$ regulär, also in $\mathfrak{H}$ fortsetzbar, so werden die Voraussetzungen 3 und 4 durch ein alternierendes Differential χ erfüllt, und jedes alternierende Differential χ, das der Voraussetzung 3 genügt, erfüllt auch die 4. Voraussetzung.

§ 3. Algebraische Flächen[6]).

Im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ der komplexen Vektoren $\mathfrak{z} = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \mathfrak{e}_\nu$ werde durch

$$(3.1) \qquad (\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{w}) = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu \overline{w}_\mu, \qquad |\mathfrak{z}| = \sqrt{(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})}$$

eine Hermitesche Metrik eingeführt. Die euklidische Maßbestimmung wird durch[15])

$$(3.2) \qquad v_2(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}\,(d\mathfrak{z}\,|\,d\mathfrak{z}), \qquad v_{2k}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{k!}\,\{v_2(\mathfrak{z})\}^k$$

und die projektive durch[15])

$$(3.3) \qquad \omega_2(\mathfrak{z}) = \frac{i}{2}\left(d\,\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\,\middle|\,d\,\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\right), \qquad \omega_{2k}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{k!}\,\{\omega_2(\mathfrak{z})\}^k$$

gegeben. Ist $\mathfrak{R}$ eine analytische Fläche aus $\mathfrak{R}^n$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, so beträgt der euklidische Flächeninhalt des in der Kugel $\mathfrak{B}_r = \{\mathfrak{z}\,|\,|\mathfrak{z}| \leq r\}$ gelegenen Teils

$$(3.4) \qquad \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_r} \nu(\mathfrak{z})\, v_{2n-2}(\mathfrak{z}).$$

Setzt man

$$(3.5) \qquad W_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \quad \text{und} \quad V_{2n}(r) = W_{2n} r^{2n},$$

so ist

$$(3.6) \qquad n(r) = \frac{1}{V_{2n-2}(r)} \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_r} \nu(\mathfrak{z})\, v_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_r} \nu(\mathfrak{z})\, \omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) + \nu(0)$$

die *Anzahlfunktion*, die mit r monoton wächst[16]). Definiert man die Abbildung $\hat{\mathfrak{a}}$ gemäß (1.7), die Vielfachheit $\nu(z, \mathfrak{a})$ wie vor (1.6) und ist $\varphi(\mathfrak{z})$ eine auf $\mathfrak{R}$ meßbare Funktion, so ist

$$(3.7) \qquad \Phi(\hat{\mathfrak{a}}) = \sum_{|z|>0} \nu(z, \mathfrak{a})\, \varphi(z\,\mathfrak{a})$$

eindeutig auf dem projektiven Raum $\mathfrak{P}^{n-1}$ erklärt und es gilt[17])

$$(3.8) \qquad \int_{\mathfrak{R}} \varphi(\mathfrak{z})\, \omega_{2n-2} = \int_{\mathfrak{P}^{n-1}} \Phi(\hat{\mathfrak{a}})\, \omega_{2n-2}(\hat{\mathfrak{a}}),$$

---

[15]) Man vgl. H. KNESER [5] § 1 bis § 3.

[16]) Man vgl. H. KNESER [5] S. 8, Hilfssatz und STOLL [15] Satz 10.

[17]) Man vgl. STOLL [15] Satz 9, S. 148.

falls wenigstens eines der beiden Integrale für $|\varphi|$ statt φ existiert. Ist $n(\hat{a}) = \sum_{\nu} \nu(z_\nu, a)$, so besteht insbesondere die Beziehung

$$\lim_{r\to\infty} n(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int_{\mathfrak{P}^{n-1}} n(\hat{a})\, \omega_{2n-2}(\hat{a}) + \nu(0), \tag{3.9}$$

falls entweder $n(r)$ beschränkt ist oder das Integral in (3.9) existiert. Ist $\mathfrak{R}$ algebraisch mit der Ordnung m, und, was o. B. d. A. angenommen werden kann, $0 \notin \mathfrak{R}$, so ist $n(\hat{a}) = m$ fast überall auf $\mathfrak{P}^{n-1}$; also ist $n(r)$ gemäß (3.9) beschränkt und $\lim_{r\to\infty} n(r) = m$. Für die Umkehrung, d.h. für den

Satz von RUTISHAUSER: *Ist $\mathfrak{R}$ eine analytische Fläche des euklidischen Raumes $\mathfrak{R}^n$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, deren Anzahlfunktion beschränkt ist, so ist $\mathfrak{R}$ algebraisch*[18]).

sollen nun zwei Beweise gegeben werden.

1. Beweis[7]). (Folgerung aus STOLL [*16*] Satz 4.) Bei einer Parallelverschiebung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ bleibt der Flächeninhalt (3.4) erhalten, also besteht zwischen den zugehörigen Anzahlfunktionen die Beziehung $n^*(r) = O(n(r))$. Daher kann man o. B. d. A. $\nu(0) = 0$ annehmen. Dann gibt es nach STOLL [*16*] Satz 4 (man vergleiche auch LELONG [*11*]) eine ganze Funktion f, die auf $\mathfrak{R}$ und nur auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, und zwar mit der gegebenen Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ und die sich für $|\mathfrak{z}| \leq r$ durch

$$\log|f(\mathfrak{z})| = O\left(2\int_0^{4r} n(t)\,\frac{dt}{t} + \int_{4r}^{\infty} n(t)\,\frac{dt}{t^2} + n(4r)\right) = O(\log r) \tag{3.10}$$

abschätzen läßt. Mit einer Konstanten c und einer ganzen Zahl $m \geq 0$ gilt

$$|f(\mathfrak{z})| \leq c|\mathfrak{z}|^m \quad \text{für} \quad |\mathfrak{z}| \geq 1. \tag{3.11}$$

Daher ist $f(\mathfrak{z})$ ein Polynom, dessen Grad die Zahl m nicht übersteigt, w. z. b. w.

2. Beweis. (Folgerung aus Satz 3 und THULLEN 3.) Man setzt

$$\mathfrak{z} = u_n^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} u_\nu \mathfrak{e}_\nu + \mathfrak{e}_n\right), \qquad \mathfrak{w} = \sum_{\nu=1}^{n-1} u_\nu \mathfrak{e}_\nu, \qquad u = (\mathfrak{w}, u_n). \tag{3.12}$$

Dann gilt

$$\left\{\begin{aligned}
&\omega_{2n-2}(\mathfrak{z}) = \omega_{2n-2}(\mathfrak{w} + \mathfrak{e}_n) = \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}\left(d\,\frac{\mathfrak{w}+\mathfrak{e}_n}{|\mathfrak{w}+\mathfrak{e}_n|}\,\middle|\, d\,\frac{\mathfrak{w}+\mathfrak{e}_n}{|\mathfrak{w}+\mathfrak{e}_n|}\right)^{n-1} \\
&= \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{2-2n}\left[\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)(d\mathfrak{w}\,|\,d\mathfrak{w}) - (d\mathfrak{w}\,|\,\mathfrak{w})\,(\mathfrak{w}\,|\,d\mathfrak{w})\right]^{n-1} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{2-2n}\Big[\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{n-1} du, d\bar{u}, \ldots du_{n-1}\, d\bar{u}_{n-1} - \\
&\quad - \left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{n-2} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \bar{u}_\mu u_\nu\, du_\mu\, d\bar{u}_\nu \sum_{\varrho=1}^{n-1} du_1\, d\bar{u}_1 \ldots \overset{\varrho}{|} \ldots du_{n-1}\, d\bar{u}_{n-1}\Big] \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{-n} du_1\, d\bar{u}_1 \ldots du_{n-1}\, d\bar{u}_{n-1} \\
&= \left(|\mathfrak{w}|^2+1\right)^{-n} v_{2n-2}(\mathfrak{w}).
\end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

[18]) Man vgl. RUTISHAUSER [*14*] § 13, S. 293—295.

Ist $\mathfrak{H}$ der Raum der Veränderlichen $(u_1, \ldots, u_n) = \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \{\mathfrak{u} | u_n = 0\}$, so existiert das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{G}} \nu(\mathfrak{u}) \, (|\mathfrak{w}|^2 + 1)^{-n} v_{2n-2}(\mathfrak{w})$. Nach Satz 3 läßt sich $\mathfrak{R}$ über die Ebene $u_n = 0$ analytisch fortsetzen, ist also (nach THULLEN 3) algebraisch, w. z. b. w.

Für den letzten Beweis hätte es genügt, wenn für eine Umgebung $\mathfrak{U}$ eines unendlichfernen Punktes das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{U}} \nu(\mathfrak{z}) \, \omega_{2n-2}(\mathfrak{z})$ existiert hätte. Die Bedingung $n(r) = O(1)$ läßt sich also abschwächen, wie auch durch den folgenden Satz (*Kriterium II*) in etwas anderer Weise bestätigt wird.

Satz 5. *Im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ ist eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$, die den Nullpunkt nicht enthält, dann und nur dann algebraisch, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:*

1. *Ist $n(r)$ die Anzahlfunktion von $\mathfrak{R}$, so existiert das Integral $\int\limits_0^\infty n(t) \frac{dt}{t^2}$.*

2. *Ist $n(\hat{\mathfrak{a}})$ wie in (1.8) erklärt, so sei für eine ganze Zahl $k \geq 0$ die Menge $\mathfrak{M}_k = \{\hat{\mathfrak{a}} | n(\hat{\mathfrak{a}}) \leq k\}$ keine analytische Menge aus dem projektiven Raum $\mathfrak{P}^{n-1}$ mit einer Dimension kleiner als $n-1$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ algebraisch, so sind offensichtlich beide Bedingungen erfüllt. Gelten aber die Bedingungen 1 und 2 für eine analytische Fläche $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}^n$, die nicht durch den Nullpunkt geht und die Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ hat, so gibt es eine ganze Funktion f, die auf $\mathfrak{R}$ und nur auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, und zwar mit der Vielfachheit $\nu(\mathfrak{z})$ und für die

$$f(z\,\mathfrak{a}) = \prod_{|y| < \infty} \left(1 - \frac{z}{y}\right)^{\nu(y, \mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{a} \neq 0) \tag{3.14}$$

gilt[19]). Sie werde nach homogenen Polynomen entwickelt: $f(\mathfrak{z}) = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} g_\mu(\mathfrak{z})$, wobei $g_\mu \equiv 0$ oder ein homogenes Polynom vom Grad μ ist. Nach (3.14) ist $\mathfrak{M}_k = \bigcap\limits_{\mu > k} \{\hat{\mathfrak{a}} | g_\mu(\mathfrak{a}) = 0\}$. Daher ist $\mathfrak{M}_k$ analytisch, hat also die Dimension $n-1$, woraus $g_\mu(\mathfrak{a}) \equiv 0$ für $\mu > k$ folgt. Somit ist f ein Polynom, w. z. b. w.

Man kann diesen Satz als ein Analogon zu der bekannten Tatsache ansehen, daß eine ganze transzendente Funktion einer Veränderlichen, deren Ordnung kleiner als 1 ist, unendlich viele Nullstellen hat.

§ 4. Algebraische Mengen.

Vermutlich gelten die vorhergehenden Sätze weitgehend auch für rein p-dimensionale analytische Mengen mit $0 < p < n-1$. Hier wird es jedoch nur gelingen, den Satz von RUTISHAUSER für solche analytische Mengen zu beweisen, und zwar unter einer zusätzlichen Voraussetzung, von der offen bleibt, ob sie überhaupt erforderlich ist. Sicherheitshalber sollen nur solche

[19]) Man vgl. STOLL [*16*] Satz 5, S. 230 ($q = 0$).

Eigenschaften analytischer Mengen als bekannt vorausgesetzt werden, die bei REMMERT und STEIN [12] bewiesen wurden.

Eine Teilmenge $\mathfrak{K}$ des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n$ heiße ein *Kegel mit der Spitze* S, wenn sie die Vereinigung von eindimensionalen analytischen Ebenen durch S ist. Wenn S ein Punkt des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n$ und $\mathfrak{W}$ eine $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene ist, die S nicht enthält, so gibt es zu jedem Punkt $Q \in \mathfrak{P}^n$ mit $Q \neq S$ genau einen Punkt $\pi(Q) \in \mathfrak{W}$, so daß $Q, \pi(Q)$ und S auf einer eindimensionalen analytischen Ebene liegen. Die Abbildung π heiße die Projektion aus S in $\mathfrak{W}$.

Satz 6. Die Dimension projizierter analytischer Mengen.

Voraussetzung. 1. *Der Kegel* $\mathfrak{K}$ *mit der Spitze* S *liege im Gebiet* $\mathfrak{G}$ *des projektiven Raumes* $\mathfrak{P}^n$. *Der Kegel ohne Spitze, also* $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} - \{S\}$, *sei ein Gebiet.*

2. *Die analytische Ebene* $\mathfrak{W} < \mathfrak{P}^n$ *der Dimension* $n-1$ *gehe nicht durch* S.

3. *Die in* $\mathfrak{G}$ *analytische Menge* $\mathfrak{N}$ *enthalte* S *nicht.*

Behauptung. *Ist* π *die Projektion aus* S *in* $\mathfrak{W}$, *so gilt:*

1. *Im Gebiet* $\mathfrak{K}' = \pi(\mathfrak{K}_1)$ *auf* $\mathfrak{W}$ *ist* $\mathfrak{N}' = \pi(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K})$ *analytisch.*
2. *Im Gebiet* $\mathfrak{K}_1$ *ist* $\mathfrak{N}^* = \pi^{-1}(\mathfrak{N}')$ *analytisch.*
3. *Für* $Q \in \mathfrak{N}^*$ *ist* $\dim_Q \mathfrak{N}^* = 1 + \dim_{\pi(Q)} \mathfrak{N}'$.
4. *Für* $Q' \in \mathfrak{K}'$ *ist* $\dim_{Q'} \mathfrak{N}' = \max_{Q \in \pi^{-1}(Q')} \dim_Q \mathfrak{N}$.

Beweis. 1. Der Punkt $Q_0' \in \mathfrak{K}'$ werde beliebig gewählt. In $\mathfrak{P}^n$ führt man homogene Koordinaten $z_0 : z_1 : \ldots : z_n$ ein, so daß $Q_0' = (1:0:\ldots:0)$ der Nullpunkt, $\mathfrak{W}$ die Ebene $z_n = 0$ und $S = (0:\ldots:0:1)$ der uneigentliche Punkt der z_n-Achse ist. Die Projektion des Punktes $(z_0:\ldots:z_n) \neq S$ ist $(z_0:\ldots:z_{n-1}:0)$. Wegen $S \notin \mathfrak{N}$ enthält $\pi^{-1}(Q_0') \cap \mathfrak{N}$ höchstens endlich viele Punkte; diese seien $Q_\nu = (1:0:\ldots:0:a_\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, r$. Nach dem Einbettungssatz[20]) gibt es Umgebungen

$$(4.1) \qquad \mathfrak{W}' = \{(1 : z_1 : \ldots : z_{n-1} : 0) \mid |z_\mu| < \varepsilon_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, \ldots, n-1\}$$

$$(4.2) \qquad \mathfrak{V} = \pi^{-1}(\mathfrak{W}')$$

$$(4.3) \qquad \mathfrak{V}_\nu = \mathfrak{V} \cap \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \mid |z_n - a_\nu| < \varepsilon_n\} \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

mit

$$(4.4) \quad \pi(\mathfrak{V}) = \pi(\mathfrak{V}_\nu) = \mathfrak{W}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{V}_\nu \cap \mathfrak{V}_\mu = \varnothing \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,$$

so daß $\mathfrak{N}_\nu' = \pi(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{V}_\nu)$ eine analytische Menge in $\mathfrak{V}'$ ist. Dann ist $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{V}' = \bigcup_{\nu=1}^{r} \mathfrak{N}_\nu'$ ebenfalls eine in $\mathfrak{V}'$ analytische Menge. Weil $Q_0' \in \mathfrak{K}'$ beliebig gewählt war, ist $\mathfrak{N}'$ im Gebiet $\mathfrak{K}'$ analytisch.

2. Da $\mathfrak{N}'$ in $\mathfrak{K}'$ analytisch ist und $\mathfrak{K}_1$ durch π analytisch auf $\mathfrak{K}'$ abgebildet wird, ist $\mathfrak{N}^* = \pi^{-1}(\mathfrak{N}')$ in $\mathfrak{K}_1$ analytisch.

---

[20]) REMMERT und STEIN [12] Satz 1, S. 267.

3. Der Punkt $Q_0 \in \mathfrak{R}^*$ werde beliebig gewählt. Es sei $Q_0' = \pi(Q_0)$ seine Projektion. Das Koordinatensystem werde wie in 1. gewählt. Die Menge der analytischen Ebenen, die $\mathfrak{R}^*$ (bzw. $\mathfrak{R}'$) in Q_0 (bzw. in Q_0') isoliert schneiden sei $\mathfrak{D}$ (bzw. $\mathfrak{D}'$). Eine analytische Ebene $\mathfrak{E}$ durch Q_0 gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{D}$, wenn $\pi(\mathfrak{E})$ zu $\mathfrak{D}'$ gehört und $\mathfrak{E}$ nicht $\pi^{-1}(Q_0)$ enthält. Also ist

$$\dim_{Q_0} \mathfrak{R}^* = n - \operatorname*{Max}_{\mathfrak{E} \in \mathfrak{D}} \dim \mathfrak{E} = 1 + (n-1) - \operatorname*{Max}_{\mathfrak{E}' \in \mathfrak{D}'} \dim \mathfrak{E}' = 1 + \dim_{Q_0'} \mathfrak{R}'.$$

4. Die 4. Behauptung wird durch Induktion nach $s = \dim \mathfrak{R}$ bewiesen. Ist $s = 0$, so bestehen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ nur aus isolierten Punkten, also ist $\dim_{Q'} \mathfrak{R}' = \operatorname*{Max}_{Q \in \pi^{-1}(Q')} \dim_Q \mathfrak{R} = 0$ für $Q' \in \mathfrak{R}'$. Die 4. Behauptung werde nun für $\dim \mathfrak{R} = 0, 1, \ldots, s-1$ als richtig angenommen. Im Falle $\dim \mathfrak{R} = s$ werden Q_0', Q_ν, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{R}_\nu'$ wie oben bestimmt. Es seien

$$(4.5) \qquad p_\nu = \dim_{Q_0'} \mathfrak{R}_\nu', \quad q_\nu = \dim_{Q_\nu} \mathfrak{R}, \quad p = \dim_{Q_0'} \mathfrak{R}', \quad q = \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,r} q_\nu.$$

a) *Es ist $p_\nu \geq q_\nu$ und $p \geq q$*: Es gibt eine analytische Ebene $\mathfrak{E}$ aus $\mathfrak{B}$ der Dimension $n-1-p_\nu$, die $\mathfrak{R}_\nu'$ in Q_0' isoliert schneidet. Die analytische Ebene $\pi^{-1}(\mathfrak{E})$ der Dimension $n-p_\nu$ schneidet $\mathfrak{R}$ in Q_ν isoliert. Also ist $n-p_\nu \leq n-q_\nu$ oder $p_\nu \geq q_\nu$, woraus $p = \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,r} p_\nu \geq \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,r} q_\nu = q$ folgt.

b) *Es ist $p_\nu \leq q_\nu$, falls der Punkt Q_ν gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{R}$ ist und $\mathfrak{R}$ in Q_ν eine Tangentialebene $\mathfrak{T}_\nu$ hat, die $\pi^{-1}(Q_0')$ nicht enthält.* Durch Q_ν geht eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_\nu$ der Dimension $n-q_\nu$, die $\pi^{-1}(Q_0')$ enthält und $\mathfrak{T}_\nu$ nur in Q_ν schneidet. Da $\mathfrak{T}_\nu$ die Tangentialebene in Q_ν ist, schneidet $\mathfrak{E}_\nu$ die Menge $\mathfrak{R}$ in Q_ν isoliert. Weil $\mathfrak{B}_\nu \cap \mathfrak{R} \cap \pi^{-1}(Q_0')$ nur Q_ν enthält, schneidet $\pi(\mathfrak{E}_\nu)$ die Menge $\mathfrak{R}_\nu'$ in Q_0' isoliert. Weil $\pi(\mathfrak{E}_\nu)$ die Dimension $n-1-q_\nu$ hat, ist $n-1-p_\nu \geq n-1-q_\nu$ also $p_\nu \leq q_\nu$. Daraus folgt unmittelbar:

c) *Es ist $p \leq q$, falls für $\nu = 1, 2, \ldots, r$ die Punkte Q_ν gewöhnliche Punkte von $\mathfrak{R}$ sind und $\mathfrak{R}$ in Q_ν eine Tangentialebene $\mathfrak{T}_\nu$ hat, die $\pi^{-1}(Q_0')$ nicht enthält.*

d) *Es ist $p_\nu \leq q_\nu$, falls Q_ν gewöhnlicher Punkt von $\mathfrak{R}$ ist.* Wählt man nämlich η_μ mit $0 < 2\eta_\mu < \varepsilon_\mu$ genügend klein und setzt

$$(4.6) \qquad \mathfrak{U} = \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \mid |z_\mu| < 2\eta_\mu \text{ für } \mu = 1, \ldots, n-1 \text{ und } |z_n - a_\nu| < \varepsilon_n\}$$

$$(4.7) \qquad \mathfrak{U}_1 = \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \mid |z_\mu| < \eta_\mu \text{ für } \mu = 1, \ldots, n-1 \text{ und } |z_n - a_\nu| < \varepsilon_n\}$$

$$(4.8) \qquad \mathfrak{U}' = \pi(\mathfrak{U}), \qquad \mathfrak{U}_1' = \pi(\mathfrak{U}_1),$$

so gibt es eine offene Umgebung $\mathfrak{U}^*$ des Nullpunkts im Raum der Vektoren $\mathfrak{u} = (u_1, \ldots, u_{q_\nu})$ und eine pseudokonforme Abbildung $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ von $\mathfrak{U}^*$ auf $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}$, deren Funktionalmatrix den Rang q_ν hat. Die Projektion von $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{U}' \cap \mathfrak{R}_\nu'$. Sie hat die Parameterdarstellung $\mathfrak{z}'(\mathfrak{u}) = \pi(\mathfrak{z}(\mathfrak{u}))$. Dabei kann man $z_{\mu_\varrho}(\mathfrak{u}) \equiv u_\varrho$ für $\varrho = 1, \ldots, q_\nu$ annehmen. Ist $\mu_\varrho \neq n$ für $\varrho = 1, \ldots, q_\nu$, so liegt Fall b) mit $p_\nu \leq q_\nu$ vor. Ist $\mu_\varrho = n$ für ein ϱ, so kann man o. B. d. A.

$\mu_\varrho = n - q_\nu + \varrho$ für $\varrho = 1, \ldots, q_\nu$ annehmen. Dann hat die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_1}, 1, 0, \ldots, 0, 0, 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_2}, 0, 1, \ldots, 0, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z_1}{\partial u_{q_\nu-1}}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_{q_\nu-1}}, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial u_{q_\nu}}, \ldots, \frac{\partial z_{n-q_\nu}}{\partial u_{q_\nu}}, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0 \end{pmatrix}$$

der Abbildung $\mathfrak{z}'(u) = \big(z_1(u), \ldots, z_{n-1}(u), 0\big)$ den Rang q_ν, falls nur $\mathfrak{z}'_{u_{q_\nu}}(u) \not\equiv 0$ ist. Da kein Projektionsstrahl $\pi^{-1}(Q')$ für $Q' \in \mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{N}$ liegt, ist $\frac{\partial}{\partial u_{q_\nu}} \mathfrak{z}(u) \not\equiv 0$ in jedem Teilgebiet von $\mathfrak{U}^*$. Daher ist $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(u)$ und $\mathfrak{z}'_{u_{q_\nu}}(u) = 0\}$ eine analytische Menge mit $\dim \mathfrak{M} < q_\nu$ auf $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$. Da aber $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$ nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, ist $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{U}$ analytisch. Wählt man nur die Zahlen η_μ hinreichend klein, so ist $\mathfrak{N} \cap \{(1 : z_1 : \ldots : z_n) \,|\, |z_\mu| \leq \eta_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, n-1$ und $|z_n - a_\nu| = \varepsilon_n\}$ leer. Also ist $\overline{\mathfrak{M}} \cap \pi^{-1}(\mathfrak{U}') = \mathfrak{M} \cap \pi^{-1}(\mathfrak{U}')$ und somit $\mathfrak{M}$ sogar in $\pi^{-1}(\mathfrak{U}')$ mit $S \notin \overline{\mathfrak{M}}$ analytisch. Nach Induktionsannahme ist $\mathfrak{M}' = \pi(\mathfrak{M})$ eine analytische Menge aus $\mathfrak{U}'$, für die $\dim \mathfrak{M}' = \dim \mathfrak{M} < q_\nu$ gilt. In allen Punkten $Q \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{M}$ enthält die zugehörige Tangentialebene nicht den Projektionsstrahl $\pi^{-1}(Q')$. Nach c) ist $\dim_{Q'} \mathfrak{N}'_\nu = q_\nu$ für $Q' \in (\mathfrak{N}'_\nu - \mathfrak{M}') \cap \mathfrak{U}'_1$. Da $\dim_{Q'} \mathfrak{M}' < \dim_{Q'_0} \mathfrak{N}'_\nu$ ist, gibt es einen Punkt $Q' \in (\mathfrak{N}'_\nu - \mathfrak{M}') \cap \mathfrak{U}'$, für den $p_\nu = \dim_{Q'_0} \mathfrak{N}'_\nu = \dim_{Q'} \mathfrak{N}'_\nu \leq q_\nu$ gilt.

e) *Es ist* $p_\nu \leq q_\nu$. Man kann $\mathfrak{B}_\nu$ so klein wählen, daß $q_\nu = \dim_{Q_\nu} \mathfrak{N} \geq \dim_Q \mathfrak{N}$ für $Q \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}_\nu$ gilt. Die nichtgewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}_\nu$ liegen in einer analytischen Menge $\mathfrak{M}$ mit $\dim \mathfrak{M} < q_\nu$. Wie am Schluß des Beweises von d) folgt $p_\nu = \dim_{Q'_0} \mathfrak{N}'_\nu \leq q_\nu$. Es ergibt sich $p_\nu \leq q_\nu$ und insgesamt $p = q$, w. z. b. w.

Nun möge zunächst bewiesen werden, daß der Flächeninhalt eines kompakten Teiles einer rein p-dimensionalen analytischen Menge endlich ist.

Satz 7. *Ist in der n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ eine rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{N}$ mit $p > 0$ enthalten, ist das alternierende Differential*

$$\chi = \sum_{\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_p, \nu_p = 1}^{n} a_{\mu_1 \nu_1 \ldots \mu_p \nu_p}(P)\, dz_{\mu_1}\, d\bar{z}_{\nu_1} \ldots dz_{\mu_p}\, d\bar{z}_{\nu_p} \tag{4.9}$$

in $\mathfrak{N}$ erklärt, hat es lokal-beschränkte Koeffizienten und ist es, als Differential auf $\mathfrak{N}$ betrachtet, meßbar, so existiert für jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$ das Integral $\int\limits_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}} \chi$.

Beweis. Die Behauptung wird durch Induktion nach $n > p$ bewiesen. Für $n = p + 1$ ist sie richtig[13]). Sie werde nun für $p + 1, \ldots, n - 1$ vorausgesetzt und für n bewiesen. Zu jedem Punkt $P_0 \in \mathfrak{N}$ gibt es eine ortsuniformisierende

Abbildung $\alpha(\mathfrak{z})$, die eine Nullpunktsumgebung $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{R}^*$ auf eine offene Menge $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{G}$ pseudokonform abbildet. Es sei $\mathfrak{R}^* = \alpha^{-1}(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{V})$. Dabei kann man $\mathfrak{U}, \alpha$ und eine Konstante $M > 0$ so wählen, daß gilt:

1. Es ist $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| < \varepsilon_\mu \text{ für } \mu = 1, \ldots, n\}$ und $\alpha(0) = P_0$.

2. Die Koordinatenachsen schneiden $\mathfrak{R}^*$ nur im Nullpunkt. Jede zweidimensionale analytische Ebene parallel zu einer Koordinatenachse schneidet $\mathfrak{R}^*$ in höchstens m Punkten.

3. Für $\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}$ ist $|a_{\mu_1 \nu_1 \ldots \mu_p \nu_p}(\mathfrak{z})| \leq \dfrac{M}{n^p\, p!}$.

Ist $\mathfrak{z}(u)$ eine Parameterdarstellung in einer Umgebung eines gewöhnlichen Punktes von $\mathfrak{R}^*$, so gilt

$$(4.10)\quad \left| \sum_{\mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_p, \nu_p = 1}^{n} a_{\mu_1 \nu_1 \ldots \mu_p \nu_p} \frac{\partial(z_{\mu_1}, \bar{z}_{\nu_1}, \ldots, z_{\mu_p}, \bar{z}_{\nu_p})}{\partial(u_1, \bar{u}, \ldots, u_p, \bar{u}_p)} \right| \leq M \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq n} \left| \frac{\partial(z_{\mu_1}, \ldots, z_{\mu_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)} \right|^2.$$

Die Dichte von χ längs $\mathfrak{R}^*$ ist also nicht größer als die Dichte von $M\, v_{2p}$ längs $\mathfrak{R}^*$.

Nun werden Zahlen η_μ mit $0 < 2\eta_\mu < \varepsilon_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, n$ so gewählt, daß

$$(4.11)\quad \mathfrak{R}^* \cap \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| \leq 2\eta_\mu, \quad |z_n| = \eta_n \quad \text{für} \quad \mu = 1, \ldots, n-1\} = \varnothing$$

ist. Es werde $\mathfrak{U}_n = \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| < 2\eta_\mu\}$ und $\mathfrak{W}_n = \{\mathfrak{z} \mid |z_\mu| \leq \eta_\mu\}$ gesetzt. Die Abbildung π projiziere $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ auf $\pi(\mathfrak{z}) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. In $\mathfrak{U}_n' = \pi(\mathfrak{U}_n)$ ist $\mathfrak{R}' = \pi(\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{U}_n)$ eine analytische Menge der Dimension p. Es gibt eine analytische Menge $\mathfrak{M}'$ der Dimension $p-1$, so daß $\mathfrak{R}' - \mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{U}_n - \pi^{-1}(\mathfrak{M}')$ nur gewöhnliche Punkte haben. Wie im Beweis von Satz 6 gezeigt wurde, gibt es in $\mathfrak{U}_n' - \mathfrak{R}'$ eine analytische Menge $\mathfrak{M}_1' \subseteq \mathfrak{R}'$ mit $\dim \mathfrak{M}_1' < p$, so daß die Tangentialebene von $\mathfrak{R}$ in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{z} \in \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{U}_n - \pi^{-1}(\mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}_1') = \tilde{\mathfrak{R}}$ den Vektor $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ (parallel zur z_n-Achse) nicht enthält. Die p-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathfrak{R}}$ wird durch π lokal-pseudokonform auf $\tilde{\mathfrak{R}}' = \mathfrak{R}' - \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_1'$ abgebildet. Setzt man

$$(4.12)\quad v_{2p}' = \left(\frac{i}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} dz_\nu\, d\bar{z}_\nu \right)^p \quad \text{und} \quad \nu(\mathfrak{z}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{z} \notin \mathfrak{R}^*, \\ 1 & \text{für } \mathfrak{z} \in \mathfrak{R}^*, \end{cases}$$

so existiert nach Induktionsannahme das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}'} v_{2p}' = \int\limits_{\tilde{\mathfrak{R}}'} v_{2p}'$. Ist $\mathfrak{W}_n' = \pi(\mathfrak{W}_n)$, so gilt[21])

$$(4.13)\quad m \int\limits_{\tilde{\mathfrak{R}}' \cap \mathfrak{W}_n'} v_{2p}' \geq \int\limits_{\mathfrak{x} \in \tilde{\mathfrak{R}}' \cap \mathfrak{W}_n'} \sum_{(\mathfrak{x}, z_n) \in \mathfrak{W}_n} \nu(\mathfrak{x}, z_n)\, v_{2p}'(\mathfrak{x}) = \int\limits_{\tilde{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{W}_n} v_{2p}'.$$

Da $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{R}$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{R}$ ist, existiert das Integral $\int\limits_{\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{W}_n} v_{2p}' = \int\limits_{\tilde{\mathfrak{R}} \cap \mathfrak{W}_n} v_{2p}'$. Entsprechend folgt für kompakte Umgebungen $\mathfrak{W}_\nu$ des Nullpunktes, daß die Integrale

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{W}_\nu} \frac{1}{p!} \left(\frac{i}{2}\right)^p \left(\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} dz_\mu\, d\bar{z}_\nu \right)^p$$

[21]) Man vgl. STOLL [15] Satz 6, S. 128.

existieren. Der Durchschnitt $\mathfrak{W} = \bigcap_{\nu=1}^{n} \mathfrak{W}_\nu$ ist eine Umgebung des Nullpunktes, für die das Integral $\int_{\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{W}} v_{2p}$ also auch $\int_{\mathfrak{N}^* \cap \mathfrak{W}} \chi(\alpha(\mathfrak{z})) = \int_{\alpha(\mathfrak{W}) \cap \mathfrak{N}} \chi$ existiert. Da jeder kompakte Teil $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ durch endlich viele Umgebungen $\alpha(\mathfrak{W})$ überdeckt wird, existiert das Integral $\int_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}} \chi$, w. z. b. w.

Ist $\mathfrak{G}$ ein Gebiet im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$, das die q-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{S}$ enthält und ist $q < n$, so läßt sich eine rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{N}$ aus $\mathfrak{G} - \mathfrak{S}$ nur dann über $\mathfrak{S}$ fortsetzen, wenn für jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{K} < \mathfrak{G}$ der Durchschnitt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}$ endlichen Oberflächeninhalt hat. Ob auch die Umkehrung gilt, bleibt offen.

Satz 8. *Enthält das Gebiet $\mathfrak{G}$ des projektiven Raumes $\mathfrak{P}^n$ eine analytische Ebene der Dimension $n-p$ und eine analytische Menge $\mathfrak{N}$, deren Dimension höchstens $p-1$ ist, so liegt in $\mathfrak{G}$ wenigstens eine analytische Ebene $\mathfrak{E}^{n-p}$ der Dimension $n-p$, die $\mathfrak{N}$ nicht schneidet.*

Beweis. Ist $n = p$, so gibt es einen Punkt $P_0 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$. Die nulldimensionale Ebene $\{P_0\} = \mathfrak{E}^0 < \mathfrak{G}$ schneidet $\mathfrak{N}$ nicht. Die Behauptung ist für $n = p$ richtig. Sie werde nun für $\mathfrak{P}^p, \ldots, \mathfrak{P}^{n-1}$ als richtig vorausgesetzt und für $\mathfrak{P}^n$ bewiesen. Es ist $\dim \mathfrak{N} \leq p-1 \leq n-2$. Daher gibt es eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_0^{n-p} < \mathfrak{G}$ der Dimension $n-p$, die einen Punkt $S \notin \mathfrak{N}$ enthält. In $\mathfrak{G}$ liegt ein Kegel $\mathfrak{K} > \mathfrak{E}_0^{n-p}$ mit der Spitze S, für den $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} - \{S\}$ ein Gebiet ist. Eine $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene $\mathfrak{W}$ aus $\mathfrak{P}^n$, die nicht durch S geht, werde gewählt. Die Projektion aus S in $\mathfrak{W}$ sei π. Das Gebiet $\mathfrak{K}' = \pi(\mathfrak{K}_1)$ auf $\mathfrak{W}$ enthält die analytische Menge $\mathfrak{N}' = \pi(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{K}_1)$ mit $\dim \mathfrak{N}' \leq p-1$. Nach Induktionsannahme gibt es eine analytische Ebene $\mathfrak{E}^{n-p-1} < \mathfrak{K}'$ der Dimension $n-1-p$, die $\mathfrak{N}'$ nicht trifft. Die analytische Ebene $\mathfrak{E}^{n-p} = \pi^{-1}(\mathfrak{E}^{n-p-1}) \cup \{S\}$ hat die Dimension $n-p$, liegt in $\mathfrak{K} < \mathfrak{G}$ und schneidet $\mathfrak{N}$ nicht, w. z. b. w.

Nun kann das angekündigte Kriterium III, das eine Verallgemeinerung des Satzes von RUTISHAUSER ist, bewiesen werden.

Satz 9. Algebraizität analytischer Mengen.

Voraussetzung. *Im euklidischen Raum $\mathfrak{R}^n$ sei eine rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{N}$ mit $0 < p < n$ gegeben. Ist $\mathfrak{B}_r = \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}| \leq r\}$, so sei die Anzahlfunktion*

$$n(r) = \frac{1}{V_{2p}(r)} \int_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{B}_r} v_{2p} \tag{4.14}$$

beschränkt. Erweitert man den Raum $\mathfrak{R}^n$ mittels einer unendlichfernen Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ zum projektiven Raum $\mathfrak{P}^n$, so gebe es eine analytische Ebene $\mathfrak{E}^{n-p-2} < \mathfrak{E}_\infty$ der Dimension $n-p-2$, über die sich $\mathfrak{N}$ analytisch fortsetzen läßt[22]).

[22]) Im Falle $p = n-1$ ist $\mathfrak{E}^{n-p-2} = \varnothing$ und im Falle $p = n-2$ besteht $\mathfrak{E}^{n-p-2}$ genau aus einem Punkt. Es gibt transzendente analytische Mengen der reinen Dimension p, die auf einer solchen Ebene $\mathfrak{E}^{n-p-2}$ regulär sind, wie ein Beispiel am Schluß der Arbeit zeigt.

Behauptung. *Die analytische Menge $\mathfrak{N}$ ist algebraisch.*

Beweis. Für $n=p+1$ ist die Behauptung nach dem Satz von RUTISHAUSER richtig. Nun werde sie für $\mathfrak{N}^{p+1}, \ldots, \mathfrak{N}^{n-1}$ als richtig vorausgesetzt und für $\mathfrak{N}^n$ bewiesen. Die analytische Menge $\mathfrak{N}$ läßt sich in ein Gebiet $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}^n \cup \mathfrak{E}^{n-p-2} \subset \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}^n$ zu einer rein p-dimensionalen analytischen Menge $\mathfrak{N}_0$ fortsetzen, die minimal gewählt sei. Es ist $\mathfrak{N}_0 = \overline{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{G}$. Jeder irreduzible Teil von $\mathfrak{N}_0$ hat Punkte in $\mathfrak{N}^n$; also ist $\dim(\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{E}_\infty) \leq p-1$. Es konnte $\mathfrak{G}$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}_\infty$ ein Gebiet auf $\mathfrak{E}_\infty$ ist. Da $\dim \mathfrak{E}^{n-p-2} = (n-1)-(p+1)$ und $\dim(\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{E}_\infty) < (p+1)-1$ ist, gibt es nach Satz 8 eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_0^{n-p-2} \subset \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}_\infty$ der Dimension $n-p-2$, die $\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{E}_\infty$ also auch $\mathfrak{N}$ nicht schneidet. Ein beliebiger Punkt $S \in \mathfrak{E}_0^{n-p-2}$ und eine analytische Ebene $\mathfrak{W}$ der Dimension $n-1$ mit $S \notin \mathfrak{W}$ werden gewählt. Die Ebene $\mathfrak{W}$ gehe durch den Nullpunkt von $\mathfrak{N}^n$. Die Projektion aus S in $\mathfrak{W}$ sei π. Die Vereinigung aller eindimensionalen analytischen Ebenen aus $\mathfrak{G}$ durch S bildet einen Kegel $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{P}^n$, für den $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} - \{S\}$ offen ist. Wegen $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{N} \cup \mathfrak{E}_0^{n-p-2}$ ist $\mathfrak{K}_1$ sogar ein Gebiet. Die Projektion $\mathfrak{N}_0' = \pi(\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{K})$ ist nach Satz 6 eine analytische Menge aus dem Gebiet $\mathfrak{K}' = \pi(\mathfrak{K}_1)$, die die Dimension p hat. Wegen $\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{W} \cap \mathfrak{N}^n$ ist $\mathfrak{N}' = \pi(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}_0' \cap \mathfrak{N}^n$ eine rein p-dimensionale analytische Menge aus $\mathfrak{W} \cap \mathfrak{N}^n$, die sich in $\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{W} \cap \mathfrak{N}^n$ analytisch zu $\mathfrak{N}_0' = \overline{\mathfrak{N}'} \cap \mathfrak{K}'$ fortsetzen läßt. In $\mathfrak{K}'$ liegt die analytische Ebene $\mathfrak{E}_1^{n-p-3} = \pi(\mathfrak{E}_0^{n-p-2} - \{S\})$ die die Dimension $(n-1)-p-2$ hat.

In geeignet gewählten homogenen Koordinaten $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ werde die unendlichferne Ebene $\mathfrak{E}_\infty$ durch $z_0 = 0$, die Ebene $\mathfrak{W}$ durch $z_n = 0$ und der Punkt S durch $(0 : \ldots : 0 : 1)$ gegeben. Durch die Abbildung π wird $(z_0 : \ldots : z_n) \neq S$ auf $(z_0 : \ldots : z_{n-1} : 0)$ projiziert. Im Raum $\mathfrak{N}^n$ erhält man die zugehörigen unhomogenen Koordinaten, indem man $z_0 = 1$ setzt. In ihnen hat die gegebene Metrik die Gestalt:

$$(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{w}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} z_\mu \overline{w}_\nu, \tag{4.15}$$

wobei $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} z_\mu \overline{z}_\nu$ eine positiv definite Hermitesche Form ist. Mit zwei Konstanten $b > 0$, $c > 0$ gilt also

$$\frac{1}{b^2} \sum_{\mu=1}^{n} |z_\mu|^2 \leq \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} z_\mu \overline{z}_\nu \leq b^2 \sum_{\mu=1}^{n} |z_\mu|^2, \tag{4.16}$$

$$c \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_p=1}^{n} |z_{\mu_1 \ldots \mu_p}|^2 \leq \sum_{\mu_1,\nu_1,\ldots,\mu_p,\nu_p=1}^{n} g_{\mu_1\nu_1} \cdots g_{\mu_p\nu_p} z_{\mu_1 \ldots \mu_p} \overline{z}_{\nu_1 \ldots \nu_p}. \tag{4.17}$$

Führt man eine zweite Metrik

$$(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{w})_0 = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu \overline{w}_\mu, \qquad |\mathfrak{z}|_0 = \sqrt{(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z})_0} \tag{4.18}$$

ein, so gilt

$$\mathfrak{B}_{br} = \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}| \leq br\} \supseteq \{\mathfrak{z} \mid |\mathfrak{z}|_0 \leq r\} = \mathfrak{B}_r^0. \tag{4.19}$$

Ist $n^0(r)$ die Anzahlfunktion von $\mathfrak{R}$ bezüglich der Metrik $(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{w})_0$, so folgt

$$(4.20)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\,n(br) = \dfrac{c^{-1}}{V_{2p}(r)} \displaystyle\int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_{br}} \frac{1}{p!}\left(\frac{i}{2}\right)^p \sum_{\mu_1,\nu_1,\ldots,\mu_p,\nu_p=1}^{n} g_{\mu_1\nu_1}\cdots g_{\mu_p\nu_p}\, dz_{\mu_1} d\bar{z}_{\nu_1}\cdots dz_{\mu_p} d\bar{z}_{\nu_p} \\ \qquad \geq \dfrac{1}{V_{2p}(r)} \displaystyle\int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}_r^0} \frac{1}{p!}\left(\frac{i}{2}\right)^p \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_p=1}^{n} dz_{\mu_1} d\bar{z}_{\mu_1}\cdots dz_{\mu_p} d\bar{z}_{\mu_p} = n^0(r). \end{cases}$$

Daher ist $n^0(r)\leq M$ beschränkt. Da $\mathfrak{R}_0=\overline{\mathfrak{R}}\cap G$ den Punkt $S=(0:\ldots:0:1)$ nicht enthält, gibt es eine Zahl $c>2$, so daß $\mathfrak{R}$ in $\{(\mathfrak{x},z_n)\,|\,c\,|\mathfrak{x}|<2|z_n|,\ c<2|z_n|\}$ nicht eindringt. Es sei $\mathfrak{B}'_r=\mathfrak{B}^0_r\cap\mathfrak{W}$. Setzt man $r=c\varrho$, so ist $\pi(\mathfrak{B}^0_r\cap\mathfrak{R})\geqq\mathfrak{B}'_\varrho\cap\mathfrak{R}'$ für $\varrho>1$. Werden

$$(4.21)\qquad v'_2=\frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{n-1} dz_\mu\, d\bar{z}_\mu \quad\text{und}\quad v'_{2p}=\frac{1}{p!}(v'_2)^p$$

gesetzt, so ist

$$(4.22)\qquad n'(\varrho)=\frac{1}{V_{2p}(\varrho)}\int_{\mathfrak{R}'\cap\mathfrak{B}'_\varrho} v'_{2p}$$

die Anzahlfunktion von $\mathfrak{R}'$. Die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\mathfrak{R}$ sei mit $\mathfrak{R}^*$, die von $\mathfrak{R}'$ sei mit $\mathfrak{R}'^*$ bezeichnet. Abgesehen von einer Nullmenge $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{R}^*$ bildet π die Menge $\mathfrak{R}^*$, also $\mathfrak{R}^*-\mathfrak{M}$, lokalpseudokonform auf $\mathfrak{R}'^*-\pi(\mathfrak{M})$ ab, wobei $\mathfrak{M}'=\pi(\mathfrak{M})$ eine Nullmenge auf $\mathfrak{R}'$ ist. Setzt man

$$(4.23)\qquad \nu(\mathfrak{z})=\begin{cases}0 & \text{für } \mathfrak{z}\notin\mathfrak{R},\\ 1 & \text{für } \mathfrak{z}\in\mathfrak{R},\end{cases}$$

so gilt[21])

$$(4.24)\qquad M\geq n^0(r)=\frac{1}{V_{2p}(r)}\int_{\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}^0_r} v'_{2p}\geq\frac{1}{V_{2p}(r)}\int_{\mathfrak{R}'\cap\mathfrak{B}'_\varrho}\ \sum_{(\mathfrak{x},z_n)\in\mathfrak{L}^0_r}\nu(\mathfrak{x},z_n)\,v'_{2p}(\mathfrak{x})\geq\frac{n'(\varrho)}{c^{2p-2}}$$

für $r=c\varrho$ mit $\varrho>1$. Nach Induktionsannahme ist also $\mathfrak{R}'$ algebraisch. Daher ist $\overline{\mathfrak{R}}'$ eine rein p-dimensionale analytische Menge aus $\mathfrak{W}$. Die Kegel $\mathfrak{R}^*=\pi^{-1}(\mathfrak{R}')\supseteqq\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}^*=\pi^{-1}(\overline{\mathfrak{R}}')\cup\{S\}$ sind rein $(p+1)$-dimensionale analytische Mengen aus $\mathfrak{R}^n$ bzw. $\mathfrak{P}^n$. Es ist $\mathfrak{R}^*$ algebraisch.

Wegen $\dim\{\overline{\mathfrak{R}}'\cap\pi(\mathfrak{E}_\infty)\}\leq p-1$ gibt es nach Satz 8 eine analytische Ebene $\mathfrak{E}_1^{n-p-2}\subset\pi(\mathfrak{E}_\infty)$ der Dimension $n-p-2\geq 0$, die $\overline{\mathfrak{R}}'$ nicht trifft. Also ist $\overline{\mathfrak{R}}\cap\mathfrak{E}_1^{n-p-2}=\varnothing$ und somit $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{E}_1^{n-p-2}$ fortsetzbar. Man wählt $\widetilde{S}\in\mathfrak{E}_1^{n-p-2}$ und eine analytische Ebene $\widetilde{\mathfrak{W}}$ der Dimension $n-1$ durch S und den Nullpunkt, die $\widetilde{S}$ nicht trifft. Die Projektion aus $\widetilde{S}$ in $\widetilde{\mathfrak{W}}$ sei $\tilde{\pi}$. Die Projektion $\widetilde{\mathfrak{R}}'=\tilde{\pi}(\mathfrak{R})$ ist algebraisch und hat die Dimension p. Ebenso ist der Kegel $\widetilde{\mathfrak{R}}^*=\tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{R})$ algebraisch und hat die Dimension $p+1$. Der Durchschnitt $\widetilde{\mathfrak{R}}^*\cap\mathfrak{R}^*\supseteqq\mathfrak{R}$ ist algebraisch und hat höchstens die Dimension $p+1$. Angenommen er hat die Dimension $p+1$, so haben $\mathfrak{R}^*$ und $\widetilde{\mathfrak{R}}^*$ einen gemeinsamen irreduzibeln Teil $\mathfrak{L}$ der Dimension $p+1$. Es ist $\overline{\mathfrak{L}}$ ein Kegel mit den Spitzen S und $\widetilde{S}$, also liegt die eindimensionale analytische Ebene $\mathfrak{E}$ durch S und $\widetilde{S}$

in $\overline{\mathfrak{L}} \subseteqq \overline{\mathfrak{R}}^*$; daher ist $\{\tilde{S}\} = \pi(\mathfrak{E}) \subseteqq \pi(\overline{\mathfrak{R}}^*) = \overline{\mathfrak{R}}'$, was falsch ist. Also ist $\tilde{\mathfrak{R}}^* \cap \mathfrak{R}^*$ eine p-dimensionale algebraische Menge, die die rein p-dimensionale analytische Menge $\mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}^*$ umfaßt. Somit ist $\mathfrak{R}$ algebraisch, w. z. b. w.

Die Forderung $n(r) = O(1)$ kann vielleicht abgeschwächt, aber nicht ganz entbehrt werden, wie das Beispiel

$$\mathfrak{R} = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 = z_2^2, \quad z_2 = e^{z_3}\} \tag{4.25}$$

zeigt. Ob man aber auf die Voraussetzung: „$\mathfrak{R}$ läßt sich über eine analytische Ebene $\mathfrak{E}^{n-2-p} < \mathfrak{E}_\infty$ der Dimension $n-2-p$ fortsetzen" verzichten kann, bleibt ungeklärt.

Literatur.

[1] BREMERMANN, H.-J.: Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen. Schriftr. Math. Inst. Univ. Münster **5**, 1—92 (1951). — [2] CARTAN, H.: Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Proc. Internat. Congr. of Math. **1**, 152—164 (1950). — [3] CHOW, W.-L.: On compact complex analytic varieties. Amer. J. Math. **71**, 893—914 (1949). — [4] HERMES, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Bereichen. Math. Ann. **120**, 539—562 (1947). — [5] KNESER, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. dtsch. Math.-Ver. **48**, 1—28 (1938). — [6] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. **4**, 382—391 (1950). — [7] LELONG, P.: Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **62**, 301—338 (1945). — [8] LELONG, P.: Propriétiés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **67**, 393—419 (1950). — [9] LELONG, P.: Sur la représentation d'une function plurisousharmonique à partir d'un potentiel. C. R. Acad. Sci., Paris **237**, 691—693 (1953). — [10] LELONG, P.: Sur l'extension aux fonctions entières de n variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstrass. C. R. Acad. Sci., Paris **237**, 865—867 (1953). — [11] LELONG, P.: Sur l'étude des noyaux primaires et sur un théorème de divisibilité des fonctions entières de n variables. C. R. Acad. Sci., Paris **237**, 1379—1381 (1953). — [12] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [13] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. **126**, 221—238 (1953). — [14] RUTISHAUSER, H.: Über die Folgen und Scharen von analytischen und meromorphen Funktionen mehrerer Variabeln, sowie von analytischen Abbildungen. Acta math., Stockh. **83**, 249—325 (1950) § 13. — [15] STOLL, W.: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **57**, 116—154 (1952). — [16] STOLL, W.: Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen. Math. Z. **57**, 211—237 (1953). — [17] THULLEN, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **111**, 137—157 (1934).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 25. März 1954.)

HADWIGER, H., und W. NEF
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 305—319 (1954)

Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen.

Von
H. HADWIGER und W. NEF.

Die hier skizzierte, auf axiomatischer Grundlage aufgebaute Theorie bezieht sich auf die invariante Integration in einer abstrakten Menge, welche Wirkungsraum einer vorgegebenen Transformationsgruppe ist. Eine beliebig, aber fest gewählte, nichtnegative Funktion im Raum übernimmt die Rolle einer normierenden Einheitsfunktion.

Das Ziel der Untersuchungen ist es, unter Wahrung der hier vorgesehenen größtmöglichen Allgemeinheit Aussagen zu gewinnen, welche mit Verwendung eigens hierfür entwickelter Schlußmethoden allein aus den der Integrationstheorie zugrunde gelegten Postulaten gefolgert werden können.

Da bei Raum und Gruppe keine Voraussetzungen topologischer oder sogar metrischer Art vorgesehen sind, trägt die Arbeitsweise dieser Theorie einen mehr algebraischen Charakter.

Im Mittelpunkt der Theorie steht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Integrationssystems.

Die Gültigkeit des Kriteriums ist in den individuellen Fällen von der Struktur des Raumes, von der Art der Gruppe und auch von der Wahl der Einheitsfunktion abhängig.

Einfachste und typische Fälle, in welchen die Existenzfrage generell und positiv beantwortet werden kann, sind etwa die folgenden:

a) Der Raum ist abzählbar oder endlich;

b) die Gruppe ist abelsch;

c) die Einheitsfunktion ist identisch Eins.

Im weiteren werden unter der Voraussetzung, daß das Existenzkriterium erfüllt ist, spezielle Integrationssysteme konstruiert, welche innerhalb der axiomatischen Theorie dadurch von besonderer Bedeutung sind, daß sie mit allen überhaupt existierenden Systemen ausgezeichnete Bindungen eingehen.

So erscheint das elementare Integrationssystem als das kleinste, das in jedem anderen als Teilsystem enthalten sein muß.

Das absolute Integrationssystem umfaßt alle Funktionen, für welche der Integralwert eindeutig durch die Postulate bestimmt ist, so daß er in allen Systemen, in denen die betreffende Funktion noch integrierbar ist, der nämliche sein muß. Dieser eindeutig festliegende Wert ist selbst ein Integral.

Sehr spezielle Fälle absoluter Integrale sind beispielsweise:

a) Der Mittelwert von W. MAAK oder J. VON NEUMANN bei ergodischen oder fastperiodischen Funktionen über Gruppen.

b) Das HAARsche Integral bei stetigen Funktionen über kompakten topologischen Gruppen.

Die konstruktiven Ansätze, die dem Aufbau der Theorie zugrunde liegen, sind zum Teil eng verwandt mit älteren Ideen von BANACH, TARSKI, I. VON NEUMANN u. a.

I. Begriffe und Bezeichnungen.

$\mathfrak{R}$ bedeute eine Menge *(abstrakter Raum)* und $x, y, z, \ldots$ Elemente (*Punkte*) von $\mathfrak{R}$. Weiter bezeichne Γ eine *Transformationsgruppe* auf $\mathfrak{R}$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *Transformationen* aus Γ.

Mit αx bezeichnen wir den Bildpunkt von x bezüglich der Transformation α.

$F(x), G(x), \ldots$ (kürzer $F, G, \ldots$) sollen reellwertige *Funktionen* auf $\mathfrak{R}$ bedeuten.

Der Transformation $\alpha \in \Gamma$ ordnen wir im linearen Raum dieser Funktionen folgende Transformation zu:

$$F(x) \to F^{\alpha}(x) = F(\alpha x).$$

Es gilt dann:

$$(F^{\alpha})^{\beta}(x) = F^{\alpha}(\beta x) = F\big((\alpha\beta)x\big)$$

oder kurz

$$(F^{\alpha})^{\beta} = F^{\alpha\beta}.$$

Weiter bezeichne $E = E(x)$ eine ein für allemal festgelegte reellwertige, beschränkte und nichtnegative Funktion, welche nicht identisch verschwinden soll. Es gilt also (c reell)

$$0 \leq E \leq c; \quad E \not\equiv 0.$$

E heißt *Einheitsfunktion*.

Mit $p \cdot E$ bezeichnen wir eine Funktion, welche sich in der Form

$$(1) \qquad p \cdot E = \sum p_{\nu} E^{\alpha_{\nu}} \qquad p = \sum p_{\nu}$$

darstellen läßt (p_{ν} reelle Zahlen, $\alpha_{\nu} \in \Gamma$), die also linear durch endlich viele Funktionen, die mit der Einheitsfunktion kongruent sind, ausdrückbar ist. Wir sagen auch, daß (1) eine Auslegung der Einheitsfunktion sei. Eine solche Funktion $p \cdot E$ nennen wir *elementar*.

Man beachte, daß eine elementare Funktion so definiert ist, daß sicher wenigstens eine Darstellung als Auslegung von E gemäß (1) garantiert ist; es ist leicht zu zeigen, daß dann auch unendlich viele derartige Darstellungen möglich sind. Das Symbol $p \cdot E$ bezeichnet weiter bei gegebener reeller Zahl p nicht eine eindeutig bestimmte Funktion, sondern einen individuell nicht näher fixierten Repräsentanten einer gewissen Funktionenklasse.

Eine Funktion F nennen wir *E-beschränkt*, wenn für eine passend gewählte elementare Funktion $p \cdot E$ die Ungleichung

$$(2) \qquad |F| \leq p \cdot E$$

besteht. Die Menge der E-beschränkten Funktionen über $\mathfrak{R}$ ist offensichtlich eine lineare Mannigfaltigkeit; sie werde mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Die im folgenden vorkommenden Funktionen sind alle als E-beschränkt vorausgesetzt; $\mathfrak{B}$ ist also die der Integrationstheorie zugrunde gelegte Funktionenmannigfaltigkeit.

Für die Entwicklung der nachfolgend skizzierten Theorie sind drei Grundgegebenheiten unabänderlich fest gedacht, nämlich der Raum $\mathfrak{R}$, die Gruppe Γ und die Einheitsfunktion E.

II. Integrationssysteme.

In diesem Abschnitt definieren wir die grundlegenden Begriffe Integralfeld, Integral und Integrationssystem.

Definition 1. *Eine Klasse $\mathfrak{F}$ E-beschränkter Funktionen, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$, heißt Integralfeld, wenn die folgenden Postulate erfüllt sind:*

I°. *Aus $F \in \mathfrak{F}$ folgt $F^x \in \mathfrak{F}$ für alle $x \in \Gamma$; $\mathfrak{F}$ ist Γ-frei.*

II°. *Aus $F, G \in \mathfrak{F}$ folgt $aF + bG \in \mathfrak{F}$, wo a, b reelle Zahlen sind; $\mathfrak{F}$ ist linear.*

III°. *Es gilt $E \in \mathfrak{F}$; F ist normal.*

Ein Integralfeld $\mathfrak{F}$ ist also eine Γ-freie, lineare und normale (echte oder unechte) Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{B}$.

Definition 2. *Ein auf einem Integralfeld $\mathfrak{F}$ definiertes reellwertiges Funktional $J(F)$ heißt Integral auf $\mathfrak{F}$, wenn die folgenden Postulate erfüllt sind:*

I. $J(F) = J(F^x)$ $(x \in \Gamma)$; *J ist Γ-invariant.*

II. $J(aF + bG) = aJ(F) + bJ(G)$; *$J$ ist linear*[1]).

III. $J(E) = 1$; *J ist normiert.*

IV. *Aus $F \geq 0$ folgt $J(F) \geq 0$; J ist definit.*

Ein Integral J ist also ein über einem Integralfeld reellwertig definiertes Γ-invariantes (kurz: invariantes), lineares, normiertes und definites Funktional.

Definition 3. *Ein Integrationssystem $(\mathfrak{F}, J)$ entsteht durch Zusammenfassung eines Integralfeldes $\mathfrak{F}$ und eines darauf erklärten Integrals J.*

Die axiomatische Integrationstheorie hat sich mit den so charakterisierten Integrationssystemen zu befassen. Es soll hierbei darauf ankommen, Aussagen unter alleiniger Beanspruchung der gesetzten Postulate zu gewinnen[2]).

III. Existenzkriterium.

Wir können die wichtige Frage stellen, ob bei fest vorgegebenen $\mathfrak{R}$, Γ und E stets Integrationssysteme $(\mathfrak{F}, J)$ existieren. Durch ein Beispiel werden wir unten belegen, daß dies keineswegs immer der Fall ist.

Selbstverständlich ist es auf verschiedene Weise möglich, Kriterien für die Existenz zu formulieren[3]). Wir wählen eine Form, welche durch ihre besondere Einfachheit als geeignet erscheint, ins Zentrum der Theorie gestellt zu werden. Es gilt das folgende notwendige und hinreichende

[1]) Dieses Postulat läßt sich unter Mitberücksichtigung der übrigen aus einem schwächeren folgern. Es genügt zu verlangen: $J(F+G) = J(F) + J(G)$; J ist additiv.

[2]) Besonders zu beachten ist, daß bezüglich des Raumes keine weiteren Voraussetzungen, etwa metrischer oder auch nur topologischer Art gemacht werden müssen.

[3]) Vgl. hierzu: W. Nef, Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration. Comm. Math. Helv. **28**, 162—172 (1954), insb. Satz 11.

Existenzkriterium. *Dann und nur dann existiert ein Integrationssystem, wenn folgendes gilt:*

(3) $$\text{Aus} \quad p \cdot E \geq 0 \quad \text{folgt} \quad p \geq 0.$$

Daß die Bedingung notwendig ist, wird wie folgt bewiesen: Es sei $(\mathfrak{F}, J)$ ein Integrationssystem. Mit I^0, II^0 und III^0 schließt man, daß eine Auslegung $p \cdot E$ von E zu $\mathfrak{F}$ gehört und mit I, II, III folgt, daß $J(p \cdot E) = p$ sein muß. Mit IV folgt jetzt $p \geq 0$, wenn wie vorausgesetzt $p \cdot E \geq \mathfrak{0}$ ist. Daß die Bedingung hinreicht, wird durch die Konstruktion eines besonderen Integrationssystems bewiesen, die wir im folgenden Abschnitt durchführen.

Vorerst zeigen wir, daß das Existenzkriterium tatsächlich nicht immer erfüllt ist; damit ist selbstverständlich auch nachgewiesen, daß nicht immer Integrationssysteme existieren[4]).

Wie MAZURKIEWICZ und SIERPINSKI gezeigt haben[5]), existiert in der euklidischen Ebene eine Punktmenge $\mathfrak{W}$, die in zwei disjunkte Teilmengen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ zerlegt werden kann, $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} + \mathfrak{V}$, so daß aber alle drei Punktmengen unter sich kongruent sind, d.h. daß $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{U} \cong \mathfrak{V}$ gilt.

Es sei jetzt $\mathfrak{R}$ die euklidische Ebene und Γ ihre Bewegungsgruppe; ferner sei $E = W$, wobei W die charakteristische Funktion der Punktmenge $\mathfrak{W}$ bedeutet. Mit Rücksicht auf die „paradoxen" Zerlegungsverhältnisse schließt man auf eine Relation $E = 2 \cdot E$ oder auch $E - 2 \cdot E = 0$. Dies läßt sich auch schreiben $p \cdot E = 0$ und $p = -1$, womit die Unrichtigkeit von (3) nachgewiesen ist.

Später werden wir zeigen, daß das Existenzkriterium immer erfüllt ist, wenn die Transformationsgruppe Γ abelsch ist.

IV. Das elementare Integrationssystem.

In diesem Abschnitt wird unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (3) des Existenzkriteriums erfüllt ist, ein spezielles System $(\mathfrak{E}, I)$ konstruiert, das wir das *elementare Integrationssystem* nennen wollen. Damit ist zugleich auch gezeigt, daß diese Bedingung für die Existenz eines Integrationssystems hinreicht.

Es sei $p \cdot E$ eine elementare Funktion, also eine Funktion, für welche es eine Darstellung der Form (1) als Auslegung von E gibt. Wie bereits früher hervorgehoben wurde, gestattet ein und dieselbe elementare Funktion offensichtlich verschiedene Darstellungen dieser Art. Wir zeigen jetzt aber, daß

[4]) Das nachfolgend vorgetragene Beispiel ist so gewählt, daß die Abhängigkeit der Existenzfrage von der Wahl der Einheitsfunktion nachgewiesen ist: Auch in Fällen, wo der betreffende Raum bei gleicher Gruppe geläufige Integrationssysteme zuläßt, können Einheitsfunktionen so gewählt werden, daß kein Integrationssystem möglich ist.

Herr H. WIELANDT hat uns in freundlicher Weise darauf aufmerksam gemacht, daß es sehr einfach ist, die Ungültigkeit des Existenzkriteriums bei passend gewählten Gruppen nachzuweisen. Wir verdanken ihm das folgende Beispiel: Es sei $\mathfrak{R}$ die reelle Gerade, Γ die Gruppe der linearen Transformationen $x' = a\,x + b$ $(a \neq 0)$ und $E(x) = 1$ $(0 \leq x \leq 1)$, $= 0$ (sonst); hier gilt $(-1) \cdot E = E(x) - E(3\,x) - E(3 - 3\,x) \geq 0$!

[5]) MAZURKIEWICZ, E., u. W. SIERPINSKI: Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties. C. R. Acad. Sci. Paris **158**, 618—619 (1914).

unter Voraussetzung der Gültigkeit von (3) jedenfalls die Koeffizientensumme $p = \sum p_\nu$ immer die gleiche sein muß. Genauer:

(4) $$\text{Aus} \quad p \cdot E = q \cdot E \quad \text{folgt} \quad p = q.$$

In der Tat: Setzen wir $p - q = r$, so gilt $p \cdot E - q \cdot E = r \cdot E = 0$. Nach (3) folgt $r \geqq 0$. Vertauschen wir p und q, so folgt ebenso $-r \geqq 0$. Also ist $r = 0$, w. z. b. w.

Wir formulieren nun die folgende

Definition 4. *Das elementare Integrationssystem* $(\mathfrak{E}, I)$ *entsteht durch Zusammenfassung des Integralfeldes* $\mathfrak{E}$ *aller elementaren Funktionen*

(5) $$F = p \cdot E \qquad [-\infty < p < +\infty]$$

und des auf $\mathfrak{E}$ *definierten Integrals*

(6) $$I(F) = p \qquad [F = p \cdot E].$$

Es ist zu prüfen, ob die Postulate, welche wir zur axiomatischen Charakterisierung der Integrationssysteme gewählt haben, durch das so konstruierte System erfüllt werden. Dies ist in der Tat der Fall. Zunächst ist klar, daß jede elementare Funktion E-beschränkt ist. Der Nachweis, daß die Feldpostulate I^0 bis III^0 erfüllt werden, ist trivial. Nach (4) schließt man, daß das Integral I über $\mathfrak{E}$ nach Ansatz (6) eindeutig erklärt ist. Dieser entscheidende Schluß wurde nur ermöglicht durch die als gültig vorausgesetzte Bedingung (3) des Existenzkriteriums. Die Verifikation der Integralpostulate I bis III ist sehr einfach. Die Gültigkeit von IV ist wiederum eine Folgerung aus (3).

Ist das Existenzkriterium erfüllt, so gibt es nach der soeben vollzogenen Konstruktion wenigstens das elementare Integrationssystem. Im allgemeinen existiert aber eine Mannigfaltigkeit verschiedener Integrationssysteme, welche sich alle auf die gemeinsamen drei Grundgegebenheiten $\mathfrak{R}$, Γ und E beziehen.

Die besondere und einfache Bedeutung, welche dem elementaren Integrationssystem innerhalb der Mannigfaltigkeit aller Systeme zukommt, wird ausgedrückt mit dem folgenden

Satz 1. *Das elementare Integrationssystem* $(\mathfrak{E}, I)$ *ist in jedem anderen Integrationssystem* $(\mathfrak{F}, J)$ *als Teilsystem enthalten, d.h. es gilt* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ *und* $J(F) = I(F)$ *für* $F \in \mathfrak{E}$.

In der Tat: Aus den Feldpostulaten I^0 bis III^0 folgt unmittelbar, daß ein Integralfeld $\mathfrak{F}$ alle elementaren Funktionen $p \cdot E$ enthalten muß, und mit den Integralpostulaten I bis IV schließt man, daß $J(p \cdot E) = p = I(p \cdot E)$ ist.

In besonderen Fällen kann das elementare System das einzige existierende Integrationssystem sein. Es sei z. B. $\mathfrak{R}$ die Menge der ganzen Zahlen, Γ ihre additive Gruppe und $E(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $E(0) = 1$. Die E-beschränkten Funktionen sind diejenigen, die nur für endlich viele x von 0 verschieden sind; gleichzeitig sind dies die elementaren Funktionen, so daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ gilt. Offensichtlich ist $(\mathfrak{E}, I)$ das einzige mögliche Integrationssystem.

V. Das absolute Integrationssystem.

In diesem Abschnitt wird wieder unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (3) des Existenzkriteriums erfüllt ist, ein weiteres spezielles System $(\mathfrak{T}, T)$ konstruiert, welches wir das *absolute Integrationssystem* nennen wollen. Die gewählte Bezeichnungsweise rechtfertigt sich durch die besonderen Eigenschaften, welche wir herleiten werden[6]).

Zunächst erklären wir einen nützlichen Hilfsbegriff: Unter einer *Auslegung* $a \cdot F$ einer Funktion F verstehen wir eine Funktion, welche sich in der Form

$$a \cdot F = \sum a_\nu F^{\alpha_\nu} \qquad [a = \sum a_\nu] \tag{7}$$

darstellen läßt (a_ν reelle Koeffizienten, $\alpha_\nu \in \Gamma$). Es handelt sich um die Ausdehnung der bereits mit (1) für E eingeführten Symbolik auf beliebige Funktionen $\mathfrak{F}$. Die Auslegung heißt *definit*, wenn $a_\nu \geq 0$ (alle ν) und *normiert*, wenn $a = \sum a_\nu = 1$ ist.

Die Konstruktion des absoluten Systems vorbereitend definieren wir zwei Mengen reeller Zahlen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, die einer (E-beschränkten) Funktion F durch die folgenden Vorschriften zugeordnet sind:

a) $\mathfrak{P}$ sei die Menge aller p, für welche folgendes gilt: Es gibt eine geeignet gewählte definite und normierte Auslegung von F

$$1 \cdot F = \sum a_\nu F^{\alpha_\nu} \qquad [\sum a_\nu = 1;\ a_\nu \geq 0] \tag{8a}$$

so, daß zu jeder Transformation $\tau \in \Gamma$ eine (im allgemeinen von τ abhängige) Auslegung von E

$$p \cdot E = \sum p_\nu E^{\xi_\nu} \qquad [\sum p_\nu = p] \tag{9a}$$

so existiert, daß

$$1 \cdot F^\tau = \sum a_\nu F^{\tau\alpha_\nu} \leq p \cdot E \tag{10a}$$

ausfällt.

b) $\mathfrak{Q}$ sei die Menge aller q, für welche folgendes gilt: Es gibt eine geeignet gewählte definite und normierte Auslegung von F

$$1 \cdot F = \sum b_\mu F^{\beta_\mu} \qquad [\sum b_\mu = 1;\ b_\mu \geq 0] \tag{8b}$$

so, daß zu jeder Transformation $\tau \in \Gamma$ eine (im allgemeinen von τ abhängige) Auslegung von E

$$q \cdot E = \sum q_\mu E^{\eta_\mu} \qquad [\sum q_\mu = q] \tag{9b}$$

so existiert, daß

$$1 \cdot F^\tau = \sum b_\mu F^{\tau\beta_\mu} \geq q \cdot E \tag{10b}$$

ausfällt.

[6]) Im einfachern Fall abelscher Transformationsgruppen wurde die Konstruktion absoluter Integrationssysteme nach einem andern Prinzip (Zerlegungsgleichheit von Funktionen) durchgeführt. Vgl. A. KIRSCH, Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen, Math. Ann. **124**, 343—363 (1952); H. HADWIGER u. A. KIRSCH, Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit, Portugaliae Math. **11**, 57—67 (1952).

Im Hinblick darauf, daß F E-beschränkt ist, läßt sich leicht schließen, daß die beiden Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nichtleer sind.

Wir zeigen jetzt die Richtigkeit der folgenden Hilfsaussage:

(11) $$\text{Aus} \quad p \in \mathfrak{P}, \; q \in \mathfrak{Q} \quad \text{folgt} \quad q \leq p.$$

Beweis. (10a) läßt sich im speziellen Fall $\tau = \varepsilon$ (Identität) ausführlich als

(a) $$\sum_{\nu} a_\nu F^{\alpha_\nu} \leq \sum_{\nu} p_\nu E^{\xi_\nu}$$

schreiben. Setzen wir in (10b) $\tau = \alpha_\nu$, so ergibt sich, ebenfalls ausführlicher geschrieben

(b) $$\sum_{\mu} b_\mu F^{\alpha_\nu \beta_\mu} \geq \sum_{\mu} q_{\mu\nu} E^{\eta_{\mu\nu}}.$$

Hierbei wurde rechts durch einen zweiten Index die Abhängigkeit von ν angedeutet. Transformieren wir die Relation (a) mit β_μ, multiplizieren dann mit b_μ und summieren über μ, so ergibt sich

(a b) $$\sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu a_\nu F^{\alpha_\nu \beta_\mu} \leq \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu p_\nu E^{\xi_\nu \beta_\mu}.$$

Multipliziert man (b) mit a_ν und summiert anschließend über ν, so resultiert

(b a) $$\sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu b_\mu F^{\alpha_\nu \beta_\mu} \geq \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu q_{\mu\nu} E^{\eta_{\mu\nu}}.$$

Da die linken Seiten von (a b) und (b a) übereinstimmen, so ergibt sich durch Verbindung der beiden Relationen mit Rücksicht auf

$$p = \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu p_\nu \quad \text{und} \quad q = \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu q_{\mu\nu}$$

die Beziehung $q \cdot E \leq p \cdot E$ oder mit (3) $q \leq p$, w. z. b. w.

Wir führen nun zwei über der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ der E-beschränkten Funktionen F definierte Funktionale $\overline{T}(F)$ und $\underline{T}(F)$ ein:

Definition 5. *Für eine Funktion $F \in \mathfrak{B}$ sei*

(12a) $$\overline{T}(F) = \inf p \qquad [p \in \mathfrak{P}]$$

und

(12b) $$\underline{T}(F) = \sup q \qquad [q \in \mathfrak{Q}]$$

gesetzt, wobei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die beiden durch (8a u. b) *bis* (10a u. b) *erklärten Zahlenmengen sind. $\overline{T}(F)$ heißt absolutes Oberintegral, $\underline{T}(F)$ absolutes Unterintegral von F* [7]).

Zunächst sei bemerkt, daß die Existenz der in (12a u. b) rechts angesetzten Grenzzahlen im Hinblick auf (11) gewährleistet ist; gleichzeitig folgt

(13) $$\underline{T}(F) \leq \overline{T}(F).$$

Die gewählte Bezeichnungsweise rechtfertigt sich zum Teil durch die Gültigkeit von

[7]) Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß $\overline{T}(F)$ und $\underline{T}(F)$ im allgemeinen keine Integrale sind (vgl. 17a u. b).

Satz 2. *Ist die Funktion $F \in \mathfrak{B}$ im System $(\mathfrak{F}, J)$ integrierbar, d.h. ist $F \in \mathfrak{F}$, so gilt*

$$\underline{J}(F) \leq J(F) \leq \overline{J}(F). \tag{14}$$

Die beiden Funktionalwerte $\underline{J}(F)$ und $\overline{J}(F)$ stellen somit absolute, d.h. nur von den der gesamten Theorie gemeinsam zugrunde liegenden Gegebenheiten $\mathfrak{R}$, Γ und E abhängige Schranken für die der Funktion F in beliebigen individuellen Systemen zukommenden Integralwerte dar.

Der Beweis des oben formulierten Satzes ist sehr einfach: Für $p \in \mathfrak{P}$ gilt (10a) und mit (8a) und (9a) folgt mit Anwendung der Postulate I bis IV unmittelbar (a) $J(F) \leq p$. Analog schließt man mit $q \in \mathfrak{Q}$ über (10b), (8b) und (9b) auf (b) $J(F) \geq q$. Mit Rücksicht auf die Definitionen (12a u. b) resultiert (14), w. z. b. w.

Nachfolgend leiten wir für die absoluten Ober- und Unterintegrale $\overline{J}$ und $\underline{J}$ einige Eigenschaften her, die wir später verwenden müssen.

Zunächst ist leicht zu erkennen, daß die einer Funktion F mit den Festsetzungen (8a u. b) bis (10a u. b) zugeordneten Zahlmengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ dieselben bleiben, wenn F durch F^{α} ersetzt wird. Hieraus resultiert mit (12a u. b)

$$\overline{J}(F^{\alpha}) = \overline{J}(F); \qquad \underline{J}(F^{\alpha}) = \underline{J}(F). \tag{15}$$

Mühelos schließt man ferner auf

$$\overline{J}(aF) = a\overline{J}(F); \qquad \underline{J}(aF) = a\underline{J}(F) \quad [a \geq 0] \tag{16a}$$

$$\overline{J}(aF) = a\underline{J}(F); \qquad \underline{J}(aF) = a\overline{J}(F) \quad [a \leq 0]. \tag{16b}$$

Weiter gelten die Ungleichungen

$$\overline{J}(F+G) \leq \overline{J}(F) + \overline{J}(G) \tag{17a}$$

$$\underline{J}(F+G) \geq \underline{J}(F) + \underline{J}(G). \tag{17b}$$

In der Tat: Es sei $p \in \mathfrak{P}_F$ und $q \in \mathfrak{P}_G$. Nach (10a) gelten die Relationen

$$\sum_{\nu} a_{\nu} F^{\tau\alpha_{\nu}} \leq \sum_{\nu} p_{\nu} E^{\xi_{\nu}} \qquad [\textstyle\sum a_{\nu} = 1; \quad \sum p_{\nu} = p] \tag{a}$$

$$\sum_{\mu} b_{\mu} G^{\tau\beta_{\mu}} \leq \sum_{\mu} q_{\mu} E^{\eta_{\mu}} \qquad [\textstyle\sum b_{\mu} = 1; \quad \sum q_{\mu} = q]. \tag{b}$$

Die Auslegungen rechts können von τ abhängen. Die Transformation von (a) mit β_{μ}, Multiplikation mit b_{μ} und Summation über μ führt zu

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu} b_{\mu} a_{\nu} F^{\tau\alpha_{\nu}\beta_{\mu}} \leq \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_{\mu} p_{\nu} E^{\xi_{\nu}\beta_{\mu}}. \tag{a b}$$

Wird in (b) τ durch $\tau\alpha_{\nu}$ ersetzt, so ergibt die Multiplikation mit a_{ν} und Summation über ν

$$\sum_{\nu}\sum_{\mu} a_{\nu} b_{\mu} G^{\tau\alpha_{\nu}\beta_{\mu}} \leq \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_{\nu} q_{\mu\nu} E^{\eta_{\mu\nu}}, \tag{b a}$$

wobei rechts die Abhängigkeit von ν durch einen zweiten Index angedeutet ist.

Werden die beiden Ungleichungen (a b) und (b a) addiert, so resultiert mit Rücksicht auf

$$\sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu b_\mu = 1; \qquad \sum_{\mu}\sum_{\nu} b_\mu p_\nu = p; \qquad \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_\nu q_{\mu\nu} = q$$

die Beziehung

$$1 \cdot (F+G)^\tau \leq (p+q)\cdot E, \tag{c}$$

wobei die Auslegung rechts von τ abhängig ist.

Mit (c) schließen wir auf $p+q \in \mathfrak{P}_{F+G}$, wobei wieder die Erklärungen (8a u. b) bis (10a u. b) berücksichtigt werden müssen und mit Definition (12a) resultiert zunächst $\overline{T}(F+G) \leq p+q$, und sodann wieder mit (12a) die Behauptung (17a).

Der Nachweis von (17b) verläuft analog.

Sehr einfach ist die Verifikation von

$$\overline{T}(E) = \underline{T}(E) = 1. \tag{18}$$

Schließlich zeigen wir noch, daß

$$\underline{T}(F) \geq 0 \qquad [F \geq 0] \tag{19}$$

gilt. In der Tat: Da (10b) in diesem Fall für $q=0$ mit $0 \cdot E = 0$ $E = 0$ jedenfalls befriedigt wird, folgt mit Definition (12b) die Behauptung (19).

Die Hilfsfunktionale $\underline{T}(F)$ und $\overline{T}(F)$ und ihre soeben abgeleiteten einfachsten Eigenschaften dienen uns nun dazu, das absolute Integrationssystem zu begründen.

Zunächst formulieren wir

Definition 6. *Eine Funktion $F \in \mathfrak{B}$ heißt absolut integrierbar, wenn*

$$\overline{T}(F) = \underline{T}(F) \tag{20}$$

ausfällt, d.h. wenn das absolute Oberintegral mit dem absoluten Unterintegral übereinstimmt.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$ der absolut integrierbaren Funktionen ist ein Integralfeld. In der Tat können die Feldpostulate I^0 bis III^0 mit (15), (16a u. b) (17a u. b) und (18) unmittelbar bestätigt werden.

Definition 7. *Das absolute Integrationssystem $(\mathfrak{T}, T)$ entsteht durch Zusammenfassung des Integralfeldes $\mathfrak{T}$ der absolut integrierbaren Funktionen F und des auf $\mathfrak{T}$ definierten Integrals*

$$T(F) = \overline{T}(F) = \underline{T}(F). \tag{21}$$

Es ist noch zu bestätigen, daß $T(F)$ ein Integral ist. In der Tat lassen sich die Integralpostulate I bis IV auf einfachste Weise aus (15), (16a u. b), (17a u. b), (18) und (19) herleiten.

Es ist klar, daß dem absoluten Integrationssystem im Rahmen der axiomatischen Theorie der invarianten Integration eine besondere Bedeutung zukommt[8]).

Die vielleicht markanteste Besonderheit des absoluten Systems ist dadurch gegeben, daß die absolut integrierbaren Funktionen die Eigenschaft aufweisen, daß der Integralwert, der ihnen in irgendwelchen individuellen Systemen zukommt, immer der gleiche sein muß, nämlich der Wert des absoluten Integrals. Dies drücken wir noch genauer aus mit dem folgenden

Satz 3. *Ist eine absolut integrierbare Funktion $F \in \mathfrak{T}$ im System $(\mathfrak{F}, J)$ integrierbar, d.h. ist auch $F \in \mathfrak{F}$, so gilt*

$$J(F) = T(F). \tag{22}$$

Es handelt sich hier offensichtlich nur um ein Korollar zu Satz 2.

VI. Invariante Integration in Gruppen.

Wir betrachten jetzt den besonders einfachen, aber wichtigen Fall, wo der Raum $\mathfrak{R}$ eine Gruppe und Γ die Gruppe der linksseitigen[9]) Transformationen von $\mathfrak{R}$ ist: Jedem $\alpha \in \mathfrak{R}$ wird die Transformation $x \to \alpha x$ $(x \in \mathfrak{R})$ zugeordnet. Als Einheitsfunktion wählen wir $E \equiv 1$[10]).

Verschiedene Begriffe, die oben im Rahmen der allgemeineren Theorie erklärt worden sind, werden in dem hier vorliegenden speziellen Fall wesentlich vereinfacht.

So ist eine Auslegung der Einheitsfunktion nach (1) eine Konstante, d.h. es gilt

$$p \cdot E = pE = p. \tag{23}$$

Eine E-beschränkte Funktion ist (im üblichen Sinn) beschränkt und $\mathfrak{B}$ ist die Mannigfaltigkeit der über $\mathfrak{R}$ definierten beschränkten Funktionen.

Eine besonders wichtige Feststellung: In unserem Sonderfall ist das Existenzkriterium erfüllt, indem die Bedingung (3) im Hinblick auf (23) trivial befriedigt ist.

Das elementare Integrationssystem $(\mathfrak{E}, I)$ wird selbst trivial: $\mathfrak{E}$ umfaßt die über $\mathfrak{R}$ konstanten Funktionen $F \equiv p$ und es ist dann $I(F) = p$.

---

[8]) Es soll hier auch auf einen Zusammenhang mit der absoluten Meßbarkeit einer Punktmenge im Sinne von TARSKI hingewiesen werden [vgl. A. TARSKI, Über das absolute Maß linearer Punktmengen. Fund. Math. **30**, 218—234 (1938)]: Es sei $R = \Gamma$ die additive Gruppe der reellen Zahlen x und E sei die charakteristische Funktion des Einheitsintervalles $0 \leq x \leq 1$. Eine beschränkte lineare Punktmenge ist dann und nur dann im TARSKIschen Sinn absolut meßbar, wenn ihre charakteristische Funktion in unserm Sinne integrierbar ist. Dieser an sich plausible Sachverhalt sei hier ohne Beweis mitgeteilt.

[9]) Wir beschränken uns aus formalen Gründen auf die linksseitigen Transformationen. Der rechtsseitige Fall läßt sich genau gleich durchführen.

[10]) Es handelt sich um denjenigen Sonderfall, in welchem die konstruktiven Ideen von J. VON NEUMANN zum Aufbau eines invarianten Maß- und Integrationssystems in Gruppen am einfachsten und gleichzeitig am vollkommensten zur Wirkung gebracht worden sind. Vgl. J. VON NEUMANN, Zur allgemeinen Theorie des Maßes. Fund. Math. **13**, 73—116 (1929). — Zum HAARschen Maß in topologischen Gruppen. Comp. Math. **1**, 106—114 (1934).

Interessantere Aspekte zeigt das absolute Integrationssystem $(\mathfrak{T}, T)$; die Konstruktion des absoluten Ober- und Unterintegrals gemäß (8a u. b) bis (10a u. b) und (12a u. b) ist im Hinblick auf (23) viel einfacher zu übersehen und darzustellen:

Eine definite und normierte Auslegung von F ist eine Funktion der Form

$$1 \cdot F = \sum a_\nu F(\alpha_\nu x) \qquad [a_\nu \geq 0,\ \sum a_\nu = 1] \tag{24a}$$

die entsprechende Auslegung von F^τ ist

$$1 \cdot F^\tau = \sum a_\nu F(\tau \alpha_\nu x). \tag{24b}$$

Definition 5 gestattet die gekürzte Fassung

$$\overline{T}(F) = \inf p \qquad [1 \cdot F^\tau \leq p], \tag{25a}$$

$$\underline{T}(F) = \sup q \qquad [1 \cdot F^\tau \geq q], \tag{25b}$$

wobei die rechts stehenden Abschrankungen bei einer fest gewählten Auslegung $1 \cdot F$ für alle $\tau \in \Gamma$ gelten sollen, und die Ermittlung des Infimums bzw. des Supremums über alle p bzw. q ausgedehnt ist, für welche solche Abschrankungen existieren.

Offensichtlich umfaßt nun $\mathfrak{T}$ diejenigen beschränkten Funktionen F, für welche es eine Zahl r

$$r = \inf p = \sup q = T(F) \tag{26}$$

so gibt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine definite und normierte Auslegung $1 \cdot F$ so existiert, daß für alle τ

$$|1 \cdot F^\tau - r| < \varepsilon \tag{27}$$

ausfällt.

Es handelt sich, wie man sieht, um die Funktionen, welche einen Mittelwert im Sinne von J. VON NEUMANN aufweisen oder auch, was damit gleichbedeutend ist, im Sinne von W. MAAK[11]) (stark) ergodisch sind.

Wir haben also den

Satz 4. *Eine beschränkte Funktion F über einer Gruppe ist dann und nur dann absolut integrierbar, wenn sie ergodisch ist, d.h. es gilt $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{M}$ und*

$$T(F) = M(F), \tag{28}$$

wenn $\mathfrak{M}$ die Mannigfaltigkeit der ergodischen Funktionen F und $M(F)$ den Mittelwert von F bezeichnen.

Aus diesem Satz lassen sich Schlüsse über die absolute Integrierbarkeit verschiedener bedeutsamer Klassen von Funktionen ziehen.

[11]) Diese Bezeichnung wurde im Anschluß an Untersuchungen von R. GODEMENT [Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948)] eingeführt und die Bedeutung des Begriffs wurde durch W. MAAK [Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine angew. Math. **190**, 34—48 (1952)] besonders erkannt und herausgearbeitet. Die Begriffsbildungen sind in der MAAKschen Theorie etwas differenzierter, was zum Teil damit zusammenhängt, daß sie sich allgemeiner auf (komplexwertige) Funktionen auf Halbgruppen beziehen.

So sind bekanntlich die (im Sinne von J. VON NEUMANN und W. MAAK) fastperiodischen Funktionen über Γ ergodisch[12]). Es folgt also, daß eine *fastperiodische* Funktion absolut integrierbar ist.

Ist weiter Γ eine kompakte topologische Gruppe, so ist, wie bereits J. VON NEUMANN nachwies, jede stetige Funktion ergodisch[13]). Also ist eine *stetige* Funktion absolut integrierbar.

VII. Das Existenzproblem.

Die dem vorstehenden Abschnitt zugrunde gelegte sehr spezielle Sachlage zeigte die Besonderheit, daß die Existenzfrage auf triviale Weise bejaht werden konnte. Auch in mannigfaltigen anderen Sonderfällen, die mit bekannten, zum Teil auch klassischen Systemen in engem Zusammenhang stehen, läßt sich die Existenz leicht nachweisen.

Es ist ein charakteristisches Merkmal der hier skizzierten Theorie, daß versucht wird, auch den allgemeinsten Fall einer im abstrakten Raum $\mathfrak{R}$ völlig willkürlich definierten Einheitsfunktion E zu erfassen. Die Frage, ob Integrationssysteme existieren oder nicht, hängt im weiteren dann noch wesentlich von der im Raum wirkenden Transformationsgruppe Γ ab.

Wohl haben wir im dritten Abschnitt ein notwendiges und hinreichendes Existenzkriterium begründet. Es zeigt sich aber, daß es im allgemeinen nicht leicht zu entscheiden ist, ob dieses erfüllt ist oder nicht.

Untersuchungen, welche sich auf die Frage der Gültigkeit des Existenzkriteriums beziehen, stellen Beiträge zur Lösung des allgemeinen Existenzproblems dar; im vorliegenden Abschnitt werden einige erste Schritte in dieser Richtung getan.

Zunächst wollen wir hier nochmals das bereits oben angegebene *Existenzkriterium* in Erinnerung rufen:

Notwendig und *hinreichend* für die Existenz eines Integrationssystems ist die Bedingung, daß aus $p \cdot E \geq 0 \quad p \geq 0$ folgt.

Das wichtigste hier erzielte Ergebnis wird ausgedrückt mit dem folgenden

Satz 5. *Das Existenzkriterium ist erfüllt, wenn die Transformationsgruppe Γ abelsch ist.*

Beweis. Da die positive Einheitsfunktion E nicht identisch verschwindet, gibt es ein $x_0 \in \mathfrak{R}$ so, daß $E(x_0) > 0$ ist. Es sei nun

$$\text{(a)} \qquad p \cdot E = \sum_1^n p_\nu E(\alpha_\nu x) \geq 0 \qquad \left[p = \sum_1^n p_\nu\right]$$

die im Kriterium genannte positive Auslegung von E. Hierbei sind, wie ersichtlich, die n Transformationen $\alpha_\nu \in \Gamma$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ beteiligt. Es sei $k \geq 0$ ganz und es bezeichne W_k die Menge aller n-Tupel ganzer Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$,

[12]) Vgl. MAAK, W.: Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen. Abh. math. Seminar Hans. Univ. **11**, 240—244 (1936); insb. den Mittelwertsatz S. 243.

[13]) Vgl. z. B. die Darstellung bei L. PONTRJAGIN, Topological groups, Princeton 1939, § 25, S. 91—99.

welche der Beschränkung $-k \leq \varrho_i \leq k$ $(i = 1, \ldots, n)$ unterliegen. Wir setzen

(b) $$H_k^\nu = \sum_{W_k} E(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} \alpha_\nu x_0),$$

wobei wie angedeutet die Summation über alle Exponentensätze erstreckt werden soll, die zu W_k gehören. Ferner sei

(c) $$H_k = \sum_{W_k} E(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} x_0).$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt mit Rücksicht darauf, daß Γ abelsch ist, für $k = 1, 2, \ldots$

(d) $$H_{k-1} \leq H_k^\nu \leq H_{k+1} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Da E beschränkt ist, gilt mit einem geeigneten $c > 0$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ $E(x) \leq c$ und mit (c) schließt man, daß

(e) $$H_k \leq c(2k+1)^n$$

gelten muß.

Wir behaupten jetzt, daß zu jedem $\omega > 1$ eine natürliche Zahl i existiert, so daß

(f) $$H_{i+1} < \omega H_{i-1}$$

gilt. Andernfalls würde für ein bestimmtes $\omega > 1$ und für alle $k = 1, 2, \ldots$ stets $H_{k+1} \geq \omega H_{k-1}$ gelten, woraus aber $H_{2k} \geq \omega^k H_0$ gefolgert werden könnte, was wegen $H_0 = E(x_0) > 0$ mit (e) unverträglich ist.

Wir bilden nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu H_i^\nu = \sum_{W_i} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu E(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} \alpha_\nu x_0).$$

Der Ausdruck rechts läßt sich auch als

$$\sum_{W_i} G(\alpha_1^{\varrho_1} \ldots \alpha_n^{\varrho_n} x_0)$$

schreiben, wobei $G = p \cdot E$ gesetzt ist; wegen $p \cdot E \geq 0$ folgt so

(g) $$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu H_i^\nu \geq 0 \qquad \left[\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = p\right].$$

Wegen $H_i^\nu = H_{i-1} + (H_i^\nu - H_{i-1})$ ergibt sich mit (g) weiter

$$p H_{i-1} + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu (H_i^\nu - H_{i-1}) \geq 0,$$

und mit (d) wenn P so gewählt wird, daß $|p_\nu| \leq P$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$ ausfällt, auch

(h) $$p H_{i-1} \geq -P \sum_{\nu=1}^{n} (H_i^\nu - H_{i-1}).$$

Mit Rückblick auf (d) und (f) folgert man

$$0 \leq H_i^\nu - H_{i-1} \leq H_{i+1} - H_{i-1} < (\omega - 1) H_{i-1},$$

so daß sich mit (h) schließlich

(i) $$p > -P n (\omega - 1)$$

ergibt. Da (i) für jedes $\omega > 1$ richtig ist, folgt so

(k) $$p \geq 0.$$

Damit ist verifiziert, daß die Bedingung des Kriteriums erfüllt wird, w.z.b.w.

Die folgenden Nebenergebnisse beziehen sich auf Fälle nichtabelscher Transformationsgruppen Γ, wobei aber ein einfacher Nachweis, daß das Existenzkriterium erfüllt ist, zufolge besonderer Verhältnisse ermöglicht wird. So gilt z.B.

Aussage A. *Besitzt Γ eine (eigentliche oder uneigentliche) Untergruppe Ω so, daß die durch Summation über alle $\omega \in \Omega$ gebildete (nicht notwendig E-beschränkte) Funktion*

(28) $$H = \sum E^{\alpha\omega}$$

für jedes $\alpha \in \Gamma$ existiert und nicht von α abhängt, so ist das Existenzkriterium erfüllt.

In der Tat: Es sei $p \cdot E = \sum p_\nu E^{\alpha_\nu}$ mit $p = \sum p_\nu$ und es werde $p \cdot E \geq 0$ vorausgesetzt. Dann ist auch $\sum (p \cdot E)^\omega = pH \geq 0$. Da nun wegen $E \geq 0$ sicher auch $H \geq 0$, $H \not\equiv 0$ gilt, folgt $p \geq 0$, w. z. b. w.

Einfache Fälle, die nach Aussage A entschieden werden können, sind etwa:

a) Es sei $\mathfrak{R}$ der k-dimensionale euklidische Raum ($k \geq 2$) und Γ die Bewegungsgruppe in $\mathfrak{R}$. Ferner sei E die charakteristische Funktion einer endlichen Menge von m Punkten. Wählen wir für Ω die Translationsgruppe in $\mathfrak{R}$, so ist die Voraussetzung von Aussage A mit $H = m$ erfüllt.

b) Es sei $\mathfrak{R}$ wieder der k-dimensionale euklidische Raum und Γ sei eine nichtabelsche kristallographische Gruppe, ferner E die charakteristische Funktion einer beschränkten Punktmenge. Mit $\Gamma = \Omega$ ist die Voraussetzung von Aussage A erfüllt.

Es gilt ferner:

Aussage B. *Besitzt Γ eine (eigentliche oder uneigentliche) abelsche Untergruppe Ω mit der Eigenschaft, daß zu jedem $\lambda > 1$ eine Funktion $W \geq 0$, $W \not\equiv 0$ existiert, von der für jedes $\alpha \in \Gamma$ mit zwei geeigneten Zahlen u und v, welche den Bedingungen $0 < v \leq u$ und $u < \lambda v$ unterliegen, zwei Auslegungen $u \cdot W$ und $v \cdot W$ nach der Untergruppe Ω so gebildet werden können, daß*

(29) $$u \cdot W \geq E^\alpha \geq v \cdot W$$

gilt, so ist das Existenzkriterium erfüllt.

In der Tat: Es sei

$$r \cdot E = \sum p_\nu E^{\alpha_\nu} - \sum q_\mu E^{\beta_\mu} \qquad [\alpha_\nu, \beta_\mu \in \Gamma]$$

mit $p_\nu \geq 0$, $q_\mu \geq 0$, $p = \sum p_\nu$, $q = \sum q_\mu$ und $r = p - q$, und es werde $r \cdot E \geq 0$ vorausgesetzt.

Bezeichnen $(u \cdot W)_\nu$ bzw. $(v \cdot W)_\mu$ die in (29) eingesetzten Auslegungen von W, die den Funktionen E^{α_ν} bzw. E^{β_μ} zugeordnet sind, so gilt zunächst

$$0 \leq r \cdot E \leq \sum p_\nu (u \cdot W)_\nu - \sum q_\mu (v \cdot W)_\mu,$$

oder — wenn der Ausdruck rechts als Auslegung von W nach Ω interpretiert wird — $0 \leq (u\,p - v\,q) \cdot W$. Da aber Ω abelsch ist, folgt nach Satz 5, daß $u\,p - v\,q \geq 0$ sein muß. Mit Rückblick auf die Bedingungen für u und v folgt so zunächst $\lambda\,p - q \geq 0$ und wegen der Gültigkeit für alle $\lambda > 1$ schließlich $p - q = r \geq 0$, w. z. b. w.

Die Voraussetzung der Aussage B drückt eine gewisse Kommensurabilität aller $E^{\alpha}[\alpha \in \Gamma]$ unter sich nach einer abelschen Untergruppe aus.

Ein Fall, der nach dieser Aussage B entschieden werden kann, ist der klassische:

c) Es sei $\mathfrak{R}$ der k-dimensionale euklidische Raum, Γ die Bewegungsgruppe in $\mathfrak{R}$, Ω die Translationsgruppe in $\mathfrak{R}$, E die charakteristische Funktion eines halbabgeschlossenen Einheitswürfels in achsenorientierter Lage. Die Voraussetzung der Aussage B wird erfüllt, wenn man bei vorgegebenem $\lambda > 1$ für W die charakteristische Funktion des halbabgeschlossenen Würfels in achsenorientierter Lage von der Seitenlänge $1/m$ mit ausreichend großem m wählt.

Bern (Schweiz), Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 5. April 1954.)

VIDAV, I.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 320—327 (1954)

Über eine Eigenschaft der Kugel.

Von

IVAN VIDAV.

1. Betrachten wir die Gesamtheit solcher geschlossener Rotationsflächen, auf denen mindestens ein Punkt M existiert von der Eigenschaft, daß jede auf der Fläche liegende, von M ausgehende Kurve, die sich einmal um die Fläche windet und wieder in den Meridian von M einmündet, mindestens die Länge 2π hat. Unter allen solchen Flächen sei jene von der kleinsten Oberfläche zu bestimmen.

Mit σ werde der Bogen auf dem Meridian der Rotationsfläche bezeichnet. Das Quadrat des Bogenelements

$$ds^2 = d\sigma^2 + r^2 d\varphi^2$$

kann auch in der Form

$$(*) \qquad ds^2 = r^2(u)\,(d\varphi^2 + du^2)$$

geschrieben werden, wenn wir $du = d\sigma/r$ setzen, worauf dann $r = r(u)$ eine Funktion des Parameters u wird.

In den beiden Punkten, wo $r = 0$ ist, ist $u = \pm\infty$ wegen $|u| \geq \int dr/r = \log r$. Bei einer geschlossenen Rotationsfläche durchläuft der Parameter u wachsend alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$. Der Anfangsmeridian $\varphi = 0$ gehe durch den Punkt M, wo auch $u = 0$ sein soll. Nach der Formel (*) ist die ganze Fläche in die Ebene (φ, u) konform abgebildet auf den Streifen $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$. Der Parallelkreis $u = 0$ durch M, der auf das Intervall $(0, 2\pi)$ der Achse (φ) abgebildet wird, wobei die Endpunkte $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ die Bilder des Punktes M sind, teilt die Fläche in zwei Teile, von denen jener Teil als der obere bezeichnet werden soll, der dem Halbstreifen $0 \leq u < +\infty$ entspricht. Die Oberfläche dieser Hälfte beträgt

$$(1) \qquad P = 2\pi \int_0^\infty r^2(u)\, du.$$

Das Bild einer Kurve, die von M ausgehend die Rotationsfläche einmal umwindet und wieder irgendwo in den Anfangsmeridian einmündet, verläuft im Streifen und verbindet den Anfangspunkt $(0, 0)$ mit einem Punkt der Geraden $\varphi = 2\pi$. Die Gleichung einer solchen Kurve lautet $u = u(\varphi)$, wenn die Funktion $u(\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ definiert ist, und es ist $u(0) = 0$. Wenn überall $u(\varphi) \geq 0$ ist, so liegt die Kurve im oberen Teil und hat die Länge

$$(2) \qquad L = \int_0^{2\pi} r(u) \sqrt{1 + u'^2}\, d\varphi.$$

Das Problem lautet jetzt:

Unter allen stetigen und positiven Funktionen $r(u)$ von der Eigenschaft, daß jede Kurve, die den Anfangspunkt (0, 0) mit irgendeinem Punkt der Geraden $\varphi = 2\pi$ verbindet und dem Integral L einen Wert $\geq 2\pi$ gibt, soll jene gefunden werden, für die das Integral (1) ein Minimum wird.

Es steht zu erwarten, daß dieses Integral eben dann den kleinsten Wert hat, wenn die Funktion $r(u)$ so bestimmt ist, daß L auf jeder Extremale, die (0, 0) mit einem Punkt der Geraden $\varphi = 2\pi$ verbindet, genau den Wert 2π hat.

Zur Lösung führt uns der folgende Satz:

Es sei $F(Y)$ eine für $Y \geq 0$ gegebene positive zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Bedingungen $F(0) = 0$, $F''(Y) \geq 0$ genügt. Ferner sei $Y(y)$ eine solche stetige positive Funktion, für die

$$S = \int_0^1 Y(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \geq 1 \tag{3}$$

ist für jede auf $0 \leq x \leq 1$ differenzierbare Funktion $y = y(x)$ mit $y(0) = 0$ und $y(x) \geq 0$. Unter diesen Umständen gilt für das Integral

$$I[F(Y)] \equiv \int_0^\infty F[Y(y)]\, dy \geq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(Y)\, dY}{Y\sqrt{1 - Y^2}} \tag{I}$$

und es wird die Gleichheit nur für die Funktion $Y = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y$ erreicht, wenn nicht gerade $F''(Y) \equiv 0$ ist für $0 \leq Y \leq \alpha$, wobei $\alpha > 0$.

Im speziellen Falle, wenn $F(Y) = Y^2$ genommen und $\varphi = 2\pi x$, $u = 2\pi y$, $Y(y) = r(u)$ gesetzt wird, ergibt sich in der Tat

$$2\pi \int_0^\infty r^2(u)\, du \geq 8\pi \tag{4}$$

für jede Funktion $r(u)$, für die $L \geq 2\pi$ ist. Das Gleichheitszeichen gilt hier nur für $r(u) = 1/\cosh \frac{u}{4}$. Die dazugehörige Rotationsfläche, bei der das Integral (1) das Minimum erreicht, hat die Gleichung

$$z = \int_0^r \sqrt{\frac{15 + r^2}{1 - r^2}}\, dr, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Diese Fläche, deren konstantes Gausssches Krümmungsmaß $K = 1/16$ ist, erhalten wir, wenn wir *die Kugel vom Radius $R = 4$ entlang zweier zueinander senkrechten Meridiane aufschneiden, den erhaltenen vierten Teil der Kugel zu einer Rotationsfläche zusammenbiegen und die beiden Meridiane zusammenkleben.* Jede geodätische Linie, die von einem Punkt des Äquators ausgeht, die Fläche einmal umwindet und wieder im Anfangsmeridian endigt, hat die Länge 2π.

Wenn die Frage so abgeändert wird, daß auf der Rotationsfläche die Länge jeder Kurve, die den Punkt M mit einem Punkt *des senkrechten Meridians* verbindet, immer mindestens die Länge $\frac{1}{2}\pi$ haben soll, dann ergibt *die Kugel vom Radius* $R=1$ *die kleinste Oberfläche.*

Das Problem ist nämlich das frühere, nur die Breite des Streifens in der (φ, u)-Ebene ist jetzt $\frac{1}{2}\pi$. In diesem Fall ergibt sich das Extrem für $r(u) = 1/\cosh u$ und die Rotationsfläche ist die Einheitskugel.

2. Beweis der Ungleichung I. Es sei $Y(y)$ eine solche positive stetige Funktion, für die das Integral $I[F(Y)]$ einen Sinn hat, und für die $S \geq 1$ ist für jede Kurve, die den Ursprung O mit einem Punkt der Geraden AB verbindet (Fig. 1). Dann ist offenbar $Y(0) = K \geq 1$. Die Differentialgleichung der Extremalen für das Integral (3) lautet

$$Y(y) = C\sqrt{1+y'^2}.$$

Daraus folgt

$$x(y) = \int_0^y \frac{C\,dy}{\sqrt{Y^2(y) - C^2}} \tag{5}$$

als Gleichung der Extremale durch den Punkt O. Es sei C eine Konstante, $0 \leq C \leq K$. Mit η werde das kleinste y bezeichnet, das der Gleichung $Y(\eta) = C$ genügt, so daß also $Y(y) > C$ ist für $y < \eta$. So ein η existiert bei jedem $C \neq 0$, denn es darf $\liminf Y(y) = 0$ für $y \to \infty$ vorausgesetzt werden[1]). Schreiben wir $\xi = x(\eta)$, dann ist im Punkte V mit den Koordinaten ξ, η die Tangente mit der Achse (x) parallel. Hier sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. $\xi \leq 1$. In diesem Fall (Fig. 1) liegt der Punkt V im Inneren oder am Rande des Streifens $0 \leq x \leq 1$. Das Integral S, wenn es von O bis V entlang der Extremale erstreckt wird, von V aus aber längs der Parallelen mit der (x)-Achse bis zum Punkte T auf AB, muß mindestens den Wert 1 haben. Da nun dieser Wert von O bis V

$$C\int_0^\xi Y^2(y)\,dx = \int_0^\eta \frac{Y^2(y)\,dy}{\sqrt{Y^2(y) - C^2}}$$

beträgt, von V bis T jedoch $Y(\eta)(1-\xi) = C(1-\xi)$, so gibt die Berücksichtigung von (5) die Ungleichung

$$\int_0^\eta \sqrt{Y^2(y) - C^2}\,dy + C \geq 1. \tag{6}$$

[1]) Es ist $\liminf Y(y) = Y_0 \geq 0$. Wegen der Konvergenz des Integrals $I[F(Y)]$ muß, wenn $Y_0 > 0$, auf dem Intervall $0 \leq Y \leq Y_0$ überall $F(Y) = 0$ sein. Wenn $Y_0 \geq 1$, ist die Ungleichung (I) offenbar richtig. Für $Y_0 < 1$ bekommen wir aus (13):

$$\int_0^\infty F\left(\sqrt{Y^2 - Y_0^2}\right) dy \geq \frac{2}{\pi}\int_{Y_0}^1 \frac{F(Y)\,dY}{Y\sqrt{1-Y^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(Y)\,dY}{Y\sqrt{1-Y^2}}.$$

Da $F(Y)$ nirgends fallend ist, so ist $I[F(Y)] = \int_0^\infty F(Y)\,dy \geq \int_0^\infty F\left(\sqrt{Y^2 - Y_0^2}\right) dy$ und es besteht auch in diesem Fall die Ungleichung (I).

2. $\xi > 1$. In diesem Fall könnte sogar $\xi = \infty$ werden. Nun werde $\eta_1 < \eta$ so gewählt, daß $1 < x(\eta_1) = \xi_1 < \infty$. Mit V_1, V', T bezeichnen wir die Punkte mit den Koordinaten (ξ_1, η_1), (ξ_1, η), $(1, \eta)$ (Fig. 2). Endlich sei T' der Punkt, wo die Extremale den Halbstrahl AB durchstößt. Da $Y(y) > C = Y(\eta)$ für jeden Punkt auf $T'V_1$ gilt, so ist der Wert des Integrals S entlang des Bogens $T'V_1$ größer als auf der Strecke TV'. Deshalb gilt für jedes solche η_1:

$$\int_0^{\eta_1} \sqrt{Y^2 - C^2}\, dy + C \geq 1.$$

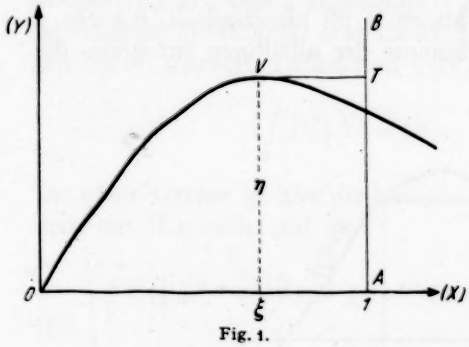

Fig. 1.

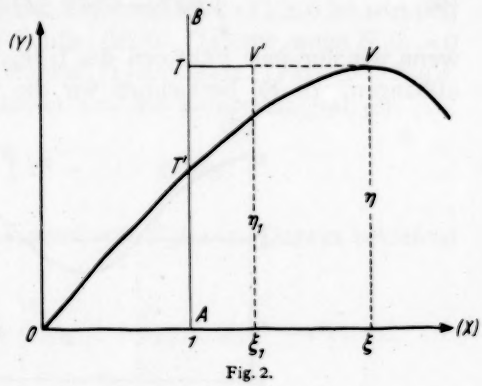

Fig. 2.

Links kann hierin η_1 beliebig gegen η rücken, weil das Integral stetig von seiner oberen Grenze abhängt. Im Grenzfall gilt die Ungleichung um so mehr, so daß in beiden Fällen die Ungleichung (6) besteht.

Schreiben wir

$$\int_0^{\eta} \sqrt{Y^2(y) - C^2}\, dy = p(C), \qquad C = Y(\eta). \tag{7}$$

Da die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, ist dieses Integral stets positiv; wenn $0 \leq C \leq 1$, so ist es nach (5) sogar $\geq 1 - C$. Setzt man also $p_1(C) = p(C) - (1 - C)$, wenn $0 \leq C \leq 1$ ist, jedoch $p_1(C) = p(C)$ für $1 < C \leq K$, so ist $p_1(C)$ immer positiv.

Welchen Verlauf hat nun das Integral $p(C)$? Wenn $Y(y)$ monoton fällt, ist $p(C)$ offenbar stetig. Im allgemeinen Falle ist jedoch $p(C)$ nur linkerseits stetig, rechterseits kann es einen positiven Sprung haben. Dies erkennt man daraus, daß $p(C)$ die gleichen Eigenschaften hat wie die obere Grenze $\eta(C)$, die als Funktion von C so bestimmt ist, daß es die kleinste Wurzel von $Y(\eta) = C$ ist. Offenbar ist $p(C)$ integrabel.

Betrachten wir nun das folgende Doppelintegral

$$\iint_D G(C^2 - c^2) \sqrt{Y^2(y) - C^2} \cdot C\, dC\, dy. \tag{8}$$

Das Integrationsgebiet D möge in der (C, y)-Ebene begrenzt sein durch die (C)-Achse, ferner durch die Parallele $C = c$ zur (y)-Achse und durch die Kurve $C = Y(y)$ vom Punkte $(K, 0)$ beginnend bis zum Punkte, wo die

Kurve zum ersten Male die Gerade $C=c$ durchsetzt (Fig. 3). Hier ist c irgendein Wert zwischen 0 und K. $G(t)$ sei einstweilen irgendeine positive integrable Funktion. Die Parallele mit der Achse (y) durchsetze im Punkte $y=\eta$ zum ersten Male die Kurve $C=Y(y)$, so daß dieses η genau das frühere ist.

Integrieren wir zuerst nach y bei gegebener festgehaltener Integrationsvariablen C. Sind $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ die Abszissen der Punkte, wo die Parallele zur (y)-Achse aus dem Integrationsgebiet heraustritt oder in dasselbe eintritt, dann haben wir

$$\int_0^{\eta} \sqrt{Y^2 - C^2}\, dy + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{Y^2 - C^2}\, dy + \cdots, \tag{9}$$

wenn wir nur jene Faktoren des Integranden in (8) hinschreiben, die von y abhängen. In (9) bezeichnen wir die Summe der allfälligen Integrale, die

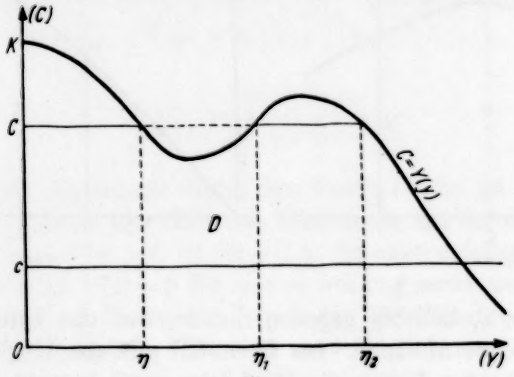

Fig. 3.

dem ersten nachfolgen, kurz mit $p_2(C)$. Offenbar ist $p_2(C) \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die Parallele zur Achse (y) nur einmal im Felde D die Kurve $C=Y(y)$ trifft. Das erste der Integrale (9) wurde oben mit $p(C)$ bezeichnet. Aus diesem Grunde drückt sich das Integral (8) folgendermaßen aus:

$$\int_c^K [p(C) + p_2(C)]\, G(C^2 - c^2)\, C\, dC. \tag{10}$$

Der Einfachheit halber wurde hier angenommen, daß überall $Y(y) \leq K$ ist. Diese Beschränkung ist nicht wesentlich; allgemein hätte man in (10) als obere Grenze des Integrals $\max Y(y)$, wobei jedoch für $K \leq C \leq \max Y(y)$ offenbar $p(C) \equiv 0$ zu setzen wäre.

Zweitens integrieren wir zunächst nach C. Weil bei festem y für C die Grenzen c und $Y(y)$ sind, so haben wir

$$\int_c^{Y(y)} \sqrt{Y^2 - C^2}\, G(C^2 - c^2)\, C\, dC.$$

Zur Abkürzung werde $Y^2 - c^2 = V$ und $C^2 - c^2 = t$ gesetzt. Dieses Integral bekommt nun die Form

$$\tfrac{1}{2} \int_0^V G(t) \sqrt{V - t}\, dt \qquad = F(\sqrt{V}). \tag{11}$$

Die Funktion $G(t)$ versuchen wir jetzt so zu bestimmen, daß das Integral zu $F(V^{\frac{1}{2}})$ wird. Die bekannte Abelsche Methode zur Auflösung solcher Integralgleichungen führt zum Ausdruck

$$G(t) = \frac{1}{\pi t} \int_0^t \frac{F''(\sqrt{\tau})\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{12}$$

Weil die Stetigkeit der zweiten Ableitung $F''(Y)$ gefordert wurde, ist auch das Produkt $t^{\frac{1}{2}} \cdot G(t)$ stetig, und wegen der Eigenschaft $F''(Y) \geq 0$ ist wirklich überall $G(t) \geq 0$. Das so bestimmte $G(t)$ genügt der Gl. (11) nur, wenn $F'(0) = 0$ ist. Allgemein bekommt man für das Integral (11) den Wert $F(V^{\frac{1}{2}}) - V^{\frac{1}{2}} \cdot F'(0)$. Bei der so gewählten Funktion $G(t)$ lautet also das Doppelintegral (8)

$$\int_0^y \left[F\left(\sqrt{Y^2 - C^2}\right) - \sqrt{Y^2 - c^2} \cdot F'(0)\right] dy.$$

Die obere Grenze ist hier die kleinste Wurzel von $Y(y) = c$. Daraus bekommt man mit Rücksicht auf (7)

$$\begin{cases} \int_0^y F\left(\sqrt{Y^2 - c^2}\right) dy = \varphi(c) F'(0) + \int_c^K [\varphi(C) + \varphi_2(C)]\, G(C^2 - c^2)\, C\, dC \\ = \varphi(c) F'(0) + \int_c^1 (1 - C) G(C^2 - c^2) C\, dC + \int_c^K [\varphi_1(C) + \varphi_2(C)] G(C^2 - c^2) C\, dC. \end{cases} \tag{13}$$

Machen wir nun den Grenzübergang $c \to 0$! Zwei Möglichkeiten sind in Betracht zu ziehen:

α) Die Funktion $Y(y)$ nimmt den Wert 0 an. Wenn y_0 die kleinste Wurzel von $Y(y) = 0$ ist, so lautet (13) im Grenzfalle

$$\int_0^{y_0} F[Y(y)]\, dy = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(Y)\, dY}{Y\sqrt{1 - Y^2}} + \varphi_1(0) F'(0) + \int_0^K [\varphi_1(C) + \varphi_2(C)] G(C^2) C\, dC. \tag{14}$$

Es ist leicht einzusehen, daß wegen der Stetigkeit von $\sqrt{t} \cdot G(t)$ rechts in (13) ohne weiteres $c = 0$ eingesetzt werden kann.

β) Mit $c \to 0$ rückt die kleinste Wurzel von $Y(y) = c$ gegen ∞. Die linke Seite in (13) limitiert gegen das Integral $I[F(Y)]$. Wegen der Konvergenz des Integrals ist nämlich $\int_a^A F(Y)\, dy < \varepsilon$ für $A > a$, sobald a hinreichend groß ist. Weil wegen $F(0) = 0$ und $F''(Y) \geq 0$ die Funktion $F(Y)$ wächst, gilt für $y > a$:

$$\int_a^y F\left[\sqrt{Y^2(y) - c^2}\right] dy < \int_a^y F[Y(y)]\, dy < \varepsilon.$$

Bei festem a konvergiert

$$\int_0^a F\left[\sqrt{Y^2(y) - c^2}\right] dy \to \int_0^a F[Y(y)]\, dy \quad \text{für} \quad c \to 0,$$

weil $F(Y)$ stetig ist. Die obige Behauptung ist damit bewiesen. Wir haben also

$$(15)\quad \int_0^{\infty} F[Y(y)]\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(Y)\,dY}{Y\sqrt{1-Y^2}} + p_1(0)F'(0) + \int_0^K [p_1(C)+p_2(C)]G(C^2)\,C\,dC.$$

Weil $p_1(c)$, $p_2(c)$ und $G(C^2)$ nicht negativ sind, ist mit den Gln. (14) und (15) der erste Teil des Satzes, die Ungleichung (I), bewiesen.

3. Das Gleichheitszeichen in I. Wenn nicht $F''(Y)\equiv 0$ für $0\leq Y\leq \alpha$, $\alpha>0$, wenn also $G(t)\not\equiv 0$ ist, so gilt in (I) das Gleichheitszeichen nur, wenn fast überall $p_1(C)=0$ und $p_2(C)=0$ ist. Aus der Bedeutung der Funktion $p_2(C)$ erkennt man, daß $p_2(C)\equiv 0$ nur bei monoton abfallendem $Y(y)$ eintritt. Weil ferner $p_1(C)$ linkerseits stetig ist, rechts aber höchstens einen endlichen positiven Sprung macht, so ist fast überall $p_1(C)=0$ nur dann, wenn $p_1(C)\equiv 0$ ist. Nehmen wir $p_1(C)=p_2(C)=0$, so lautet in diesem Falle für $F(Y)=Y^2$, also $G(t)=4/\pi t^{\frac{1}{2}}$, die Gl. (13)

$$(16)\quad \int_0^y [Y^2(y)-c^2]\,dy = \frac{4}{\pi}\int_c^1 \frac{(1-C)\,C\,dC}{\sqrt{C^2-c^2}} = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{1-c^2} - c^2\log\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{c}\right],$$

für $0\leq c\leq 1$, und

$$\int_0^y [Y^2(y)-c^2]\,dy = 0 \quad \text{für} \quad 1<c\leq K.$$

Weil jedoch auf dem ganzen Integrationsintervall $Y^2(y)-c^2>0$ ist, ist diese Gleichung ausgeschlossen, wenn nicht $K=1$ ist.

Die Funktion $Y(y)$ ist monoton. Wir zeigen, daß sie jeden Wert höchstens einmal annimmt. Wegen der Monotonie müßte $Y(y)$ sonst zwischen zwei verschiedenen Punkten y_0 und y_0+a konstant bleiben, und wir können annehmen, daß dieses Intervall so groß wie möglich ist. Es wäre sodann $Y(y_0)=Y(y_0+a)=c_0$ und $Y(y_0-h)>Y(y_0)$ sowie $Y(y_0+a+h)<Y(y_0+a)$ für jedes hinreichend kleine $h>0$. Setzen wir nun in die Gl. (16) für c den Wert $c_0+\Delta c$, mit $\Delta c>0$, ein und sei $c_0+\Delta c=Y(y_0-\Delta y)$. Die Änderung Δy geht mit Δc gleichzeitig gegen Null. Wird nun die rechte Seite in (16) kurz mit $B(c)$ bezeichnet, dann bekommt man

$$\int_{y_0-\Delta y}^{y_0} Y^2(y)\,dy = (c_0+\Delta c)^2\,\Delta y - y_0(2c_0+\Delta c)\,\Delta c + B(c_0) - B(c_0+\Delta c).$$

Der Wert des Integrals linkerseits ist $Y^2(y^*)\,\Delta y$, wobei $y_0-\Delta y<y^*<y_0$ also auch $Y(y^*)>Y(y_0)=c_0$. Dividieren wir die obige Gleichung mit Δc, indem wir uns zunächst das Glied $(c_0+\Delta c)^2\,\Delta y$ nach links gebracht denken, und machen den Grenzübergang $\Delta c\to 0$! Beachten wir, daß $0<(c_0+\Delta c)^2-Y^2(y^*)<(c_0+\Delta c)^2-c^2$ ist, der Quotient $[(c_0+\Delta c)^2-Y^2(y^*)]:\Delta c$ also beschränkt bleibt, Δy aber mit $\Delta c\to 0$ ebenfalls gegen Null rückt, so bekommen wir

$$(17)\quad 2c_0y_0 + B'(c_0) = 0.$$

Analog setzen wir jetzt in (16) für c den Wert $c_0 - \Delta c$, $\Delta c > 0$, ein. Auf dem gleichen Wege wie früher bekommt man

$$2c_0(y_0 + a) + B'(c_0) = 0. \tag{18}$$

Aus dieser und der vorhin erhaltenen Gleichung ergibt sich $a = 0$. Es ist also $Y(y)$ eine monoton abnehmende Funktion, die jeden Wert höchstens einmal erreicht. Zugleich ergibt sich aus (17), für jedes c, die Gleichung $2c\,y + B'(c) = 0$ und daraus $y = \frac{2}{\pi} \log [c^{-1} + (c^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}]$. Eine leichte Umrechnung liefert $c = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y$ oder, weil $c = Y(y)$,

$$Y(y) = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Die Gleichung der Extremalen lautet

$$\sinh \frac{\pi}{2} y = \frac{\sqrt{1 - c^2}}{c} \sin \frac{\pi}{2} x.$$

Für $x = 1$ ist $\sinh \frac{\pi}{2} y = (c^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}$ und $Y(y) = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y = c$. Die Extremale erreicht ihren höchsten Punkt also am Rand AB, den sie senkrecht trifft. Daraus folgert man, daß das Integral S wirklich auf der Extremale den kleinsten Wert erhält, der sich durch kurze Rechnung $= 1$ ergibt. Damit ist die ausgesprochene Vermutung bestätigt.

Wenn $F(Y) = Y$, also $F'(Y) = 1$ ist, so ist immer $I[Y] \geq 1$, die extremale Funktion $Y(y)$ hingegen ist nicht eindeutig bestimmt, weil aus (15) für monotone $Y(y)$ immer $I[Y] = 1$ folgt, wenn nur $p_1(0) = 0$ ist. So geben z. B. alle Funktionen $Y(y) = a/\cosh \frac{\pi}{2} a\,y$ bei $1 \leq a < 2$ dem Integral $I[Y]$ den minimalen Wert 1 und genügen gleichzeitig der Bedingung $S \geq 1$.

Das Integral $I[Y^\alpha]$, für $0 < \alpha < 1$, hat Null zur unteren Grenze, wie eine leichte Rechnung ergibt. In diesem Fall gibt es keine Extremalfunktion und die untere Grenze wird für $Y = 1/\cosh \frac{\pi}{2} y$ nicht erreicht.

Ljubljana (Jugoslavien), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 23. Dezember 1953.)

VRIES, H. L. DE.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 328—347 (1954)

Über Riemannsche Räume, die infinitesimale konforme Transformationen gestatten.

Von
HANS LUDWIG DE VRIES.

EISENHART gibt in seinem Buch „Riemannian Geometry" [4][1]), S. 235, im folgenden auch mit R.G. zitiert, eine kanonische Form für die Metrik eines Riemannschen Raumes V_n, der eine Bewegung gestattet. In der vorliegenden Arbeit werden ähnliche Probleme behandelt für den Fall, daß der V_n infinitesimale konforme Transformationen, abgekürzt k-Transformationen genannt, zuläßt. Unter einer kanonischen Form versteht man eine Form des Fundamentaltensors eines V_n, die eine gewisse Eigenschaft abzulesen gestattet, und in die sich der Fundamentaltensor jedes V_n mit dieser Eigenschaft durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems transformieren läßt.

Im ersten Teil der Arbeit werden Räume betrachtet, die nur eine k-Transformation gestatten. Es ergibt sich, daß der Raum dann konform ist zu einem Raum mit Translation, § 1. Interessanter sind die Ergebnisse, wenn man von den Bahnkurven der Transformation spezielle Eigenschaften verlangt. Sind sie z.B. normal zu einer Hyperflächenschar, so ist der Raum konform zu einem Raum mit Parallelfeld, § 2. Verlangt man schließlich, daß sie (Nicht-Null-)Geodätische des Raumes sind, so sind sie im allgemeinen normal, und der erzeugende Vektor der Transformation, die jetzt gk-Transformation genannt wird, ist dann im allgemeinen ein Gradient, er genügt also der Gleichung $v_{,ij} = \psi a_{ij}$, § 3. Riemannsche Räume, in denen diese Gleichung lösbar ist, sind schon mehrfach untersucht worden, sie gestatten in der Sprechweise von K. YANO eine *konzirkulare Transformation*. Sie werden z.B. behandelt in Arbeiten von BRINKMANN [1], DELGLEIZE [2], FIALKOW [5], [6], YANO [10], WONG [9].

Im zweiten Teil der Arbeit werden Räume betrachtet, die mehrere gk-Tansformationen $\overset{\alpha}{v}{}^i$ mit $\overset{\alpha}{v}_{,ij} = \psi_\alpha a_{ij}$ gestatten. Es zeigt sich, daß dann die Funktionen ψ_α eine einfache Gestalt haben müssen: $\psi_\alpha = -K\overset{\alpha}{v} + b_\alpha$, K, $b_\alpha = \text{const}$. Nach geeigneter Normierung der $\overset{\alpha}{v}$ kommt man zu kanonischen Formen. Für $K \neq 0$ führt sich eine Fallunterscheidung entsprechend dem Rang einer bestimmten Matrix ein. In den beiden einfachsten Fällen, die bei positiv definiter Metrik die einzig möglichen sind, erscheint die kanonische Form als konform-separabel aufgespalten. Der eine Faktor wird durch einen Raum der konstanten Krümmung K gegeben. Seine Dimension entspricht

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

der Anzahl der unabhängigen gk-Transformationen, §§ 5, 6. Im letzten Fall führen sich Nullvektorfelder ein. Konforme Separabilität kann hier nicht erreicht werden, da Fundamentalformen mit parallelen Nullvektorfeldern nicht zerfallen, § 7. Man kann also sagen: In der Theorie der infinitesimalen konformen Transformationen spielt die Gleichung $v_{,ij}=\psi a_{ij}$ dieselbe Rolle wie die Gleichung $v_{,ij}=0$ bei den Bewegungen. Der Abspaltung eines ebenen Raumes entspricht jetzt die (konforme) Abspaltung eines Raumes konstanter Krümmung.

In § 8 werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die in den kanonischen Formen vorliegenden Riemannschen Räume von konstanter Krümmung bzw. Einstein-Räume sind. Damit ergibt sich dann sofort: Wenn ein V_n $n-1$ gk-Transformationen gestattet, so ist er von konstanter Krümmung. Andererseits wird noch einmal die BRINKMANNsche Theorie der konformen Abbildung von Einstein-Räumen auf andere Einstein-Räume aufgenommen. Man kann sagen, daß sie im Falle, daß die skalare Krümmung beider Räume ungleich Null ist und gleiches Vorzeichen hat, dadurch geschieht, daß man eine zu einer gk-Transformation gehörende endliche Transformation ausführt und, wenn die Krümmungen ungleich sind, mit einer Konstanten den Maßstab verändert.

Im letzten Paragraphen wird der Fall $K=0$ erledigt. Es handelt sich hier um die homothetischen Transformationen von E. B. SHANKS [7]. Kanonische Formen für die Metrik werden durch Rückführung des Problems auf den Fall der §§ 5 bis 7 erhalten.

Der Fundamentaltensor eines V_n wird stets mit a_{ij} bezeichnet, zu $\bar{V}_n$ z.B. gehört dann jedoch $\bar{a}_{ij}$. Es wird nur vorausgesetzt, daß Det $a_{ij}\neq 0$ ist, die Metrik darf indefinit sein. Der Fundamentaltensor gewisser Unterräume des V_n, die in der kanonischen Form auftreten, wird mit $g_{\varrho\tau}$ bezeichnet. Die Zahlen in runden Klammern beziehen sich auf die Formeln jeweils im selben Teil der Arbeit. Alle Aussagen beziehen sich auf die Verhältnisse im Kleinen. Differenzierbarkeitsvoraussetzungen werden nicht angegeben, man denke sich z.B. alle auftretenden Funktionen analytisch.

I. Teil. Räume V_n mit k-Transformationen.

§ 1. Eine kanonische Form des Fundamentaltensors.

Ein Riemannscher Raum V_n gestattet eine *infinitesimale konforme Transformation*, im folgenden kurz *k-Transformation* genannt, wenn es in ihm ein Vektorfeld ξ_i gibt mit der Eigenschaft

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=\varphi a_{ij}, \qquad i,j\in N. \tag{1}$$

Dabei ist a_{ij} der Fundamentaltensor des V_n und φ ein Skalar. $\xi_{i,j}$ ist die kovariante Ableitung von ξ_i. Ferner ist

$$N=\{1,2,\ldots,n\},$$

und $i,j\in N$ steht für $i,j=1,2,\ldots,n$. Diese Bezeichnungsweise ist von A. G. WALKER eingeführt worden.

Wegen (1) überführt die infinitesimale Transformation

$$x'^i = x^i + \xi^i \, \delta t$$

den Fundamentaltensor a_{ij} in einen zu ihm konformen, den V_n also in einen zu ihm konformen Raum V_n'. Näheres dazu in R. G. § 69. $\xi^i = a^{ij}\xi_j$ heiße im folgenden *erzeugender Vektor* der Transformation.

Ist $\varphi = 0$, so liegt eine *Bewegung* vor, bei einer *Translation* ist zusätzlich noch $\xi^i \xi_i = \text{const}$. Eine k-Transformation mit $\xi^i \xi_i = \text{const} \neq 0$ ist schon eine Translation. Es folgt nämlich

$$\xi_{i,j}\, \xi^i = 0,$$

und (1) ergibt nach Überschieben mit $\xi^i \xi^j$ dann $\varphi = 0$.

Zunächst soll nun eine kanonische Form der Metrik derjenigen V_n aufgestellt werden, die *eine* durch ξ^i, $\xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation gestatten. Man führe gemäß R. G. S. 223, 284 ein Koordinatensystem so ein, daß

$$\xi^i = \delta^i_1 \tag{2}$$

wird. Rechnet man die linken Seiten der Gln. (1) aus, so erhält man

$$\xi^k \, \partial_k a_{ij} + a_{ik} \, \partial_j \xi^k + a_{jk} \, \partial_i \xi^k = \varphi \, a_{ij}. \tag{3}$$

Aus (2) folgt also

$$\partial_1 a_{ij} = \varphi \, a_{ij}.$$

Für $a_{ij} \neq 0$ ist wegen $\xi^i \xi_i = a_{11} \neq 0$

$$\partial_1 \ln \frac{a_{ij}}{a_{11}} = 0, \tag{4}$$

also

$$a_{ij} = \varepsilon \, a_{11} \, g_{ij}(x^\varrho), \qquad \varrho \in N'.$$

Dabei ist

$$N' = \{2, \ldots, n\}.$$

$\varepsilon = \pm 1$ ist so gewählt, daß $\varepsilon \, a_{11} > 0$. Dann ist $g_{11} = \varepsilon$.

Eine kanonische Form der Metrik eines V_n, der eine durch ξ^i, $\xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation gestattet, wird durch

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = e^{2\sigma(x^k)} \, g_{ij}(x^\varrho) \, dx^i \, dx^j \\ g_{11} = \varepsilon = \pm 1, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \varrho = 2, \ldots, n, \end{array} \right. \tag{5}$$

gegeben. Es ist $\xi^i = \delta^i_1$.

Für (5) ist nämlich (3) erfüllt, $\varphi = 2\partial_1 \sigma$. Der V_n (5) ist konform zum Raum $\overline{V}_n$

$$g_{ij}(x^\varrho) \, dx^i \, dx^j, \qquad g_{11} = \varepsilon.$$

Hier sind alle g_{ij} von x^1 unabhängig. $\overline{V}_n$ gestattet also eine Bewegung in der x^1-Richtung, R. G. S. 235. Da weiterhin noch $g_{11} = \varepsilon$ ist, sind die zu x^1 gehörigen Parameterlinien Geodätische des Raumes, R. G. S. 58. Demnach ist die Bewegung sogar eine Translation, R. G. S. 239.

Nun zum Fall $\xi^i \xi_i = 0$. Dann ist $a_{11} = 0$, man darf aber $a_{12} \neq 0$ annehmen. Mit einem Schluß wie bei (4) gelangt man zu der *kanonischen Form*

$$(6) \qquad \begin{cases} ds^2 = e^{2\sigma(x^k)}\, g_{ij}(x^\varrho)\, dx^i\, dx^j \\ g_{11} = 0, \qquad g_{12} = \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Es ist $\xi^i = \delta^i_1$. Der V_n ist jetzt konform zu einem $\overline{V}_n$ mit einer Bewegung, die von einem Nullvektor erzeugt wird.

An den kanonischen Formen liest man ab, daß, wie es sein muß, die zugehörigen endlichen Transformationen

$$x'^i = x^i + \delta^i_1\, c$$

den V_n in zu ihm konforme Räume überführen. Schließlich sieht man, daß zu V_n konforme Räume ebenfalls eine k-Transformation gestatten. Es folgen jetzt Betrachtungen über Räume mit k-Transformationen, deren Bahnkurven spezielle Eigenschaften haben.

§ 2. k-Transformationen mit normalen Bahnkurven.

Eine Kongruenz heißt *normal*, wenn sie das System der Orthogonaltrajektorien einer einparametrigen Schar von Hyperflächen bildet, R. G. S. 114. Seien nun die Bahnkurven normal und zunächst von nicht verschwindender Länge. Gesucht wird eine kanonische Fundamentalform.

Für das ds^2 darf die Form (5) zugrunde gelegt werden:

$$(7) \qquad \begin{cases} a_{ij} = e^{2\sigma}\, g_{ij}(x^\varrho) \\ a_{11} = \varepsilon\, e^{2\sigma} \\ \xi^i = \delta^i_1; \qquad i, j \in N,\ \varrho \in N'. \end{cases}$$

Die Schar der Hyperflächen werde durch

$$v(x^i) = c$$

beschrieben. Es soll also

$$\xi_i = f(x^k)\, v_{,i}, \qquad f \neq 0,$$

sein. Es ist $v_{,1} \neq 0$, sonst wäre entgegen (7) $a_{11} = 0$ wegen

$$(8) \qquad a_{i1} = a_{ij}\, \xi^j = f\, v_{,i}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$a_{\varrho 1}\, v_{,1} = a_{11}\, v_{,\varrho}, \qquad \varrho \in N'.$$

Damit ist aber nach (7) das Verhältnis

$$(9) \qquad \frac{v_{,\varrho}}{v_{,1}} = \frac{a_{\varrho 1}}{a_{11}} = \varepsilon\, g_{\varrho 1}(x^\tau)$$

von x^1 unabhängig.

Zunächst wird gezeigt, daß eine Funktion $w(x^\varrho)$, $\varrho \in N'$, gefunden werden kann, so daß

$$V = x^1 + w$$

eine Funktion von v ist. Dann wird die Schar der Hyperflächen auch durch

$$V(v) = x^1 + w = c$$

beschrieben. w ist aus den Bedingungen, daß die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} v_{,i} \\ V_{,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{,1} & v_{,\varrho} \\ 1 & w_{,\varrho} \end{pmatrix}$$

den Rang eins hat, zu bestimmen. Das liefert die Gleichungen

$$w_{,\varrho} = \frac{v_{,\varrho}}{v_{,1}}. \tag{10}$$

Die rechte Seite ist nach (9) von x^1 unabhängig. Es bleibt nur zu zeigen, daß die Rotation verschwindet. Für den Augenblick werde $\partial_{ij}^2 v = v_{ij}$ gesetzt. Dann ist

$$\partial_\varrho w_{,\tau} - \partial_\tau w_{,\varrho} = v_{,1}^{-2}(v_{,\varrho} v_{1\tau} - v_{,\tau} v_{1\varrho}). \tag{11}$$

Aus (9) folgt durch partielle Differentiation nach x^1

$$v_{,\varrho} v_{11} = v_{,1} v_{\varrho 1}.$$

Ebenso gilt

$$v_{,1} v_{\tau 1} = v_{,\tau} v_{11}.$$

Für $v_{11} = 0$ verschwindet also (11). Anderenfalls folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$v_{,\varrho} v_{1\tau} = v_{,\tau} v_{1\varrho},$$

und die rechte Seite von (11) wird wiederum zu Null.

Führt man nun neue Koordinaten durch

$$x'^1 = x^1 + w(x^\varrho),$$
$$x'^\varrho = x^\varrho$$

ein, so lautet die Gleichung der Hyperflächen $x'^1 = c$. Die neuen Komponenten a'_{ij} und ξ'^i berechnet man mit (7), (9), (10). Man sieht dann nach Weglassen der Striche:

Eine kanonische Form der Metrik eines V_n, der eine durch ξ^i, $\xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation mit normalen Bahnkurven gestattet, wird durch

$$\begin{cases} ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j = e^{2\sigma(x^k)} \left(\varepsilon (dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\, dx^\varrho\, dx^\tau\right), \\ i, j, k = 1, \ldots, n, \qquad \pi, \varrho, \tau = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{12}$$

gegeben. Es ist $\xi^i = \delta_1^i$. Die Bahnkurven sind normal zu $x^1 = c$.

Bemerkung. Eine Translation ξ^i, $\xi^i \xi_i = c \neq 0$, deren Bahnkurven normal sind, ist ein Parallelfeld, und umgekehrt, denn nach (12) ist andererseits $\xi^i \xi_i = \varepsilon\, e^{2\sigma}$.

Für k-Transformationen mit $\xi^i \xi_i = 0$ kommt man zu einem analogen Ergebnis. Aus (6) und (8) folgt $v_{,1} = 0$, also

$$v = v(x^\varrho), \qquad \varrho \in N'.$$

(9) muß durch

$$\frac{v_{,i}}{v_{,2}} = \frac{a_{1i}}{a_{12}}$$

ersetzt werden. Dann führe man sofort neue Koordinaten durch

$$x'^2 = v(x^0),$$
$$x'^i = x^i, \qquad i \in N - \{2\}$$

ein. Es ergibt sich, daß der V_n konform ist zu einem $\overline{V}_n$, der ein paralleles Nullvektorfeld gestattet. Zusammenfassend kann man also sagen:

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein V_n eine k-Transformation mit normalen Bahnkurven gestattet, ist, daß er konform zu einem $\overline{V}_n$ ist, der ein paralleles Vektorfeld trägt.

Zum Beispiel zeigt das Bogenelement

$$ds^2 = e^{2\sigma} \sum e_i (dx^i)^2, \qquad i \in N,$$

der konform-ebenen Räume, daß sie n unabhängige k-Transformationen mit normalen Bahnkurven gestatten. Erzeugende sind $\xi^i_{p|} = \delta^i_p$. Die mit $X_p = \xi^i_{p|}\,\partial_i = \partial_p$ gebildeten Poissonklammern verschwinden:

$$(X_p, X_q) = 0, \qquad p, q \in N. \tag{13}$$

Die $\xi^i_{p|}$ erzeugen also eine abelsche Gruppe.

Möge nun umgekehrt ein V_n n k-Transformationen $\xi^i_{p|}$,

$$\xi_{p|i,j} + \xi_{p|j,i} = \varphi_p\, a_{ij}, \tag{14}$$

mit der Eigenschaft (13) besitzen. Das Koordinatensystem werde so gewählt [8], S. 49, daß

$$\xi^i_{p|} = \delta^i_p. \tag{15}$$

(14) lautet dann

$$\partial_p a_{ij} = \varphi_p\, a_{ij}.$$

Durch Integration erhält man

$$a_{ij} = e^{2\sigma} c_{ij}, \tag{16}$$

$c_{ij} = \text{const}$.

Die konform-ebenen Räume sind dadurch gekennzeichnet, daß sie eine n-gliedrige konforme Gruppe gestatten, deren Erzeugende miteinander vertauschbar sind.

Aus (15) und (16) folgt noch

$$\xi_{p|i} = a_{ij}\,\xi^j_{p|} = a_{ip} = e^{2\sigma}\,(c_{pj}\,x^j)_{,i}.$$

Die Bahnkurven sind also normal.

§ 3. k-Transformationen mit geodätischen Bahnkurven.

Im folgenden wird eine k-Transformation, deren erzeugender Vektor ξ^i (a) das Tangentenvektorfeld einer geodätischen Kongruenz bildet und (b) ein Längenquadrat $\xi^i \xi_i \neq 0$ hat, eine *gk-Transformation* genannt.

Der Einheitsvektor in der ξ^i-Richtung einer durch ξ^i erzeugten gk-Transformation sei $\lambda^i_{1|}$:

$$\xi_i = e^{-\Phi}\,\lambda_{1|i}. \tag{17}$$

Er werde zu einem orthogonalen n-Bein $\lambda_{p|i}$ ergänzt:

$$\lambda^i_{p|}\,\lambda_{q|i} = e_p\,\delta_{pq}, \qquad p, q \in N. \tag{18}$$

Dann ist mit den Drehungskoeffizienten von RICCI, R.G. § 30ff.,

$$\lambda_{r|i,j} = \sum_{p,q} e_p\,e_q\,\gamma_{rpq}\,\lambda_{p|i}\,\lambda_{q|j}.$$

Gl. (1) lautet in dieser Schreibweise

$$\sum e_p\,e_q(\gamma_{1pq} + \gamma_{1qp})\,\lambda_{p|i}\,\lambda_{q|j} - \Phi_{,j}\,\lambda_{1|i} - \Phi_{,i}\,\lambda_{1|j} = \varphi\,e^{\Phi}\,a_{ij}.$$

Überschieben mit $\lambda^i_{1|}$, $\lambda^i_{1|}\,\lambda^j_{1|}$ ergibt wegen $\gamma_{hhl} = 0$

$$\sum e_q\,\gamma_{1q1}\,\lambda_{q|j} - \Phi_{,j}\,e_1 - \Phi_{,i}\,\lambda^i_{1|}\,\lambda_{1|j} = \varphi\,e^{\Phi}\,\lambda_{1|j}, \tag{19}$$

$$-2e_1\Phi_{,j}\,\lambda^j_{1|} = e_1\varphi\,e^{\Phi}. \tag{20}$$

Eliminiert man $\varphi\,e^{\Phi}$ aus (19), so bleibt

$$\sum e_q\,\gamma_{1q1}\,\lambda_{q|j} - e_1\Phi_{,j} = -\Phi_{,i}\,\lambda^i_{1|}\,\lambda_{1|j}. \tag{21}$$

Die Kongruenz ist dann und nur dann geodätisch, wenn

$$\gamma_{1q1} = 0,$$

R.G. S. 100. Von (21) bleibt also

$$\Phi_{,j} = e_1\Phi_{,i}\,\lambda^i_{1|}\,\lambda_{1|j}. \tag{22}$$

Im Fall $\Phi_{,i}\,\lambda^i_{1|} = 0$ folgt $\Phi = \text{const}$ und aus (20) $\varphi = 0$. Dann ist die gk-Transformation eine Translation. Anderenfalls zeigt (22), daß $\lambda_{1|j}$ und also auch ξ_i eine normale Kongruenz bildet. Wegen der Bemerkung von S. 332 hat man:

gk-Transformationen mit Ausnahme derjenigen Translationen, die nicht durch ein Parallelfeld erzeugt werden, besitzen eine normale Bahnkurvenkongruenz.

Es soll eine kanonische Form für die Metrik aufgestellt werden. Zunächst sei bemerkt: Wird eine k-Transformation durch ein Gradientenfeld $v_{,i}$ erzeugt, so ist sie eine gk-Transformation. Mit $v_{,i} = e^{-\Phi}\,\lambda_{1|i}$ und einem zugehörigen n-Bein $\lambda^i_{p|}$ drückt sich

$$2v_{,ij} = \varphi\,a_{ij}$$

so aus:

$$\sum e_p\,e_q\,\gamma_{1pq}\,\lambda_{p|i}\,\lambda_{q|j} - \Phi_{,j}\,\lambda_{1|i} = \frac{\varphi}{2}\,e^{\Phi}\,a_{ij}.$$

Überschieben mit $\lambda^j_{1|}$ ergibt

$$\sum e_p\,\gamma_{1p1}\,\lambda_{p|i} - \Phi_{,j}\,\lambda^j_{1|}\,\lambda_{1|i} = \frac{\varphi}{2}\,e^{\Phi}\,\lambda_{1|i}.$$

Wegen (18) folgt $\gamma_{1p1} = 0$.

Man darf nun von

$$\begin{cases} ds^2 = e^{2\sigma}\left(\varepsilon\,(dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\,dx^\varrho\,dx^\tau\right) \\ \xi^i = \delta^i_1 \end{cases} \tag{23}$$

ausgehen. Nach Voraussetzung ist

$$\lambda_1^i|\, \lambda_{1|i,j} = \sum e_\rho \gamma_{1\rho 1} \lambda_{\rho|i} = 0.$$

Hieraus folgt mit (17) für (23)

$$\sigma_{,\varrho} = 0, \qquad \varrho \in N'.$$

Eine kanonische Form der Metrik eines V_n, der eine durch ξ^i, $\xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation mit geodätischen Bahnkurven gestattet, wird, außer wenn sie eine nicht durch ein Parallelfeld erzeugte Translation darstellt, gegeben durch

$$\text{(24)} \qquad \begin{cases} ds^2 = e^{2\sigma(x^1)} \left(\varepsilon (dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\, dx^\varrho\, dx^\tau\right) \\ \xi^i = \delta_1^i, \qquad \pi, \varrho, \tau = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Denn für (24) ist

$$\xi_i = a_{ij}\, \delta_1^j = a_{i1} = [\varepsilon \int e^{2\sigma}\, dx^1]_{,i}$$

schon ein Gradientenfeld $v_{,i}$. Für (24) ist $v = v(x^1)$ und $\varphi = 2\partial_1 \sigma$, also $\varphi = \varphi(x^1)$. Gilt

$$2v_{,ij} = \varphi\, a_{ij},$$

so ist demnach $\varphi = \varphi(v)$. Im Fall $\varphi = 2$ kann $\sigma = x^1$ gesetzt werden. Ferner sieht man:

Die durch ξ^i, $\xi^i \xi_i \neq 0$, erzeugte k-Transformation hat, außer wenn sie eine nicht durch ein Parallelfeld erzeugte Translation ist, dann und nur dann geodätische Bahnkurven, wenn ξ_i ein Gradient ist, $\xi_i = v_{,i}$.

2. Teil. Räume V_n mit mehreren gk-Transformationen[2]).

§ 4. Vorbemerkungen.

Ein V_n gestatte r Funktionen $\underset{\alpha}{v} \neq \text{const}$ mit der Eigenschaft

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \underset{\alpha}{v}_{,ij} = \psi_\alpha\, a_{ij}, \qquad \alpha \in R \\ R = \{1, \ldots, r\}, \qquad r \leq n. \end{cases}$$

Es ist dann $\psi_\alpha = \psi_\alpha(\underset{\alpha}{v})$. Die Vektoren $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ seien voneinander unabhängig. Es bestehe also keine Relation $\Phi^\alpha(x^i)\, \underset{\alpha}{v}_{,i} = 0$, nicht alle $\Phi^\alpha \equiv 0$.

Zunächst soll gezeigt werden, daß für $r > 1$

$$\text{(2)} \qquad \psi'_\alpha = -K$$

gilt, $K = const$, unabhängig von α. (Der Strich bedeutet Ableitung nach dem Argument.)

Man multipliziere die RICCI-Identität für (1),

$$\text{(3)} \qquad \psi'_\alpha (\underset{\alpha}{v}_{,k}\, a_{ij} - \underset{\alpha}{v}_{,j}\, a_{ik}) = \underset{\alpha}{v^l} R_{lijk},$$

mit $\underset{\beta}{v^i}$, $\beta \neq \alpha$, und benutze sie nochmals für β:

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha (\underset{\alpha}{v}_{,k}\, \underset{\beta}{v}_{,j} - \underset{\alpha}{v}_{,j}\, \underset{\beta}{v}_{,k}) &= \underset{\beta}{v^i}\, \underset{\alpha}{v^l} R_{lijk} \\ &= -\underset{\alpha}{v^l}\, \underset{\beta}{v^i} R_{iljk} = \psi'_\beta (\underset{\alpha}{v}_{,k}\, \underset{\beta}{v}_{,j} - \underset{\alpha}{v}_{,j}\, \underset{\beta}{v}_{,k}). \end{aligned}$$

[2]) gk-Transformationen wurden auf S. 333 definiert. Im folgenden bleiben Translationen, die nicht durch ein Parallelfeld erzeugt werden, ausgeschlossen.

Aus der Unabhängigkeit der $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ folgt

$$\psi''_\alpha = \psi'_\beta. \tag{4}$$

Durch Differentiation nach x^i ergibt sich hieraus

$$\psi''_\alpha \underset{\alpha}{v}_{,i} = \psi''_\beta \underset{\beta}{v}_{,i}.$$

Wegen der Unabhängigkeit folgt $\psi''_\alpha = 0$. (4) liefert dann (2).

Im Falle $K=0$ können die $\underset{\alpha}{v}$ durch einen konstanten Faktor so normiert werden, daß entweder $\underset{\alpha}{v}_{,ij} = a_{ij}$ oder $\underset{\beta}{v}_{,ij} = 0$ ist. Im Falle $K \neq 0$ lautet (1)

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = \left(-K \underset{\alpha}{v} + b_\alpha\right) a_{ij}.$$

Hier sollen die $\underset{\alpha}{v}$ durch einen konstanten Summanden so normiert werden, daß

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij} \tag{5}$$

gilt.

Wenn eine Relation

$$v_{,i} = \Phi^\alpha \underset{\alpha}{v}_{,i}, \qquad \alpha \in R,\ r < n, \tag{6}$$

zwischen den Erzeugenden $v_{,i}$, $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ von gk-Transformationen besteht, so sind die Φ^α konstant. Die $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ seien dabei als unabhängig vorausgesetzt.

Später wird gezeigt, daß dieser Satz für $r = n$ falsch ist. Der Beweis wird für $K \neq 0$ gegeben, für $K=0$ verläuft er ähnlich. Durch kovariante Differentiation folgt aus (6)

$$-K v\, a_{ij} = -K \Phi^\alpha \underset{\alpha}{v}\, a_{ij} + \Phi^\alpha_{,j} \underset{\alpha}{v}_{,i}.$$

Nun muß $v = \Phi^\alpha \underset{\alpha}{v}$ sein, denn der Rang der Matrix $(\Phi^\alpha_{,j}\, \underset{\alpha}{v}_{,i})$ ist wegen $r < n$ kleiner als n. Aus $\Phi^\alpha_{,j}\, \underset{\alpha}{v}_{,i} = 0$ folgt dann wegen der Unabhängigkeit der $\underset{\alpha}{v}_{,i}$, daß $\Phi^\alpha_{,j} = 0$ und also $\Phi^\alpha = \text{const}$ ist.

Es sollen jetzt kanonische Formen für die Metrik derjenigen Räume V_n aufgestellt werden, die r unabhängige Vektoren $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ mit

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij}, \qquad K \neq 0,\ \alpha \in R,\ 1 \leq r \leq n \tag{7}$$

gestatten. (Der Fall $K=0$ wird in § 9 behandelt.) Definiert man $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ durch die Gleichung

$$\underset{\alpha}{v}^i \underset{\beta}{v}_{,i} = -K \underset{\alpha}{v}\, \underset{\beta}{v} + c_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

so zeigt Differentiation nach x^j wegen (7), daß $c_{\alpha\beta} = \text{const}$ ist. Nun gehe man mit Konstanten A^γ_α, $\text{Det}\, A^\gamma_\alpha \neq 0$, zu r neuen Funktionen $\underset{\alpha}{\bar{v}}$ über:

$$\underset{\alpha}{\bar{v}} = A^\gamma_\alpha \underset{\gamma}{v}.$$

Es gilt dann auch

$$\underset{\alpha}{\bar{v}}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{\bar{v}}\, a_{ij}.$$

(8) lautet für die $\underset{\alpha}{\bar{v}}$:

$$\underset{\alpha}{\bar{v}}^i \underset{\beta}{\bar{v}}_{,i} = -K \underset{\alpha}{\bar{v}}\, \underset{\beta}{\bar{v}} + \bar{c}_{\alpha\beta} \tag{9}$$

mit

$$\bar{c}_{\alpha\beta} = A^{\gamma}_{\alpha} A^{\delta}_{\beta} c_{\gamma\delta}.$$

Die A^{γ}_{α} seien nun so gewählt, daß

$$(\bar{c}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ & & & e_{u+1} & & \\ 0 & & & & e_r \end{pmatrix} \tag{10}$$

wird, $e_{\alpha} = e^{\alpha} = \pm 1$, $\alpha = u+1, \ldots, r$. Dabei ist

$$r - u = Rg(c_{\alpha\beta}) = Rg(\bar{c}_{\alpha\beta}) \leq r.$$

Im folgenden werden die Querstriche wieder weggelassen. Die Fälle $Rg(c_{\alpha\beta}) = r$, $= r-1$, $< r-1$ werden getrennt behandelt. Die letzte Möglichkeit kommt bei positiv definiter Metrik nicht vor. Aus (9) und (10) folgt nämlich

$$(\underset{1}{v}\,\underset{2}{v^i} - \underset{2}{v}\,\underset{1}{v^i})(\underset{1}{v}\,\underset{2}{v}_{,i} - \underset{2}{v}\,\underset{1}{v}_{,i}) = 0.$$

§ 5. Der Fall $Rg(\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K\,\underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}) = r$.

Bezeichnungen: N und R wie bisher,

$$\bar{R} = N - R.$$

Es sei

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K\,\underset{\alpha}{v}\,a_{ij}, \tag{11}$$

$$\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} = e_{\alpha}\,\delta_{\alpha\beta} - K\,\underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}, \qquad \alpha, \beta \in R,\ i, j \in N. \tag{12}$$

Setzt man $X_{\alpha} = \underset{\alpha}{v^i}\,\partial_i$, so gilt unabhängig von der Fallunterscheidung für die Poissonklammern wegen (11)

$$(X_{\alpha}, X_{\beta}) = K\,\underset{\alpha}{v}\,X_{\beta} - K\,\underset{\beta}{v}\,X_{\alpha}.$$

Das Differentialgleichungssystem

$$X_{\alpha} F = 0 \tag{13}$$

ist also vollständig und gestattet $n-r$ funktional unabhängige Lösungen F^{ϱ}, $\varrho \in \bar{R}$.

Nun mache man die Koordinatentransformation

$$x'^{\alpha} = \underset{\alpha}{v}, \qquad x'^{\varrho} = F^{\varrho}. \tag{14}$$

Es existiert keine Funktion $F(y^{\alpha}, y^{\varrho})$, $\alpha \in R$, $\varrho \in \bar{R}$, für die

$$F(\underset{\alpha}{v}, F^{\varrho}) \equiv 0$$

gilt. Durch Multiplikation mit X_{α} würde

$$\sum_{\beta \in R} \underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i}\,\partial_{\beta} F = 0$$

folgen. Mit (12) ergibt sich hieraus

$$e_{\alpha}\,\partial_{\alpha} F - K\,\underset{\alpha}{v} \sum \underset{\beta}{v}\,\partial_{\beta} F = 0. \tag{15}$$

Man multipliziere mit $e_\alpha \underset{\alpha}{v}$ und summiere über α:

$$\left(1 - K \sum e_\alpha \underset{\alpha}{v}^2\right) \cdot \sum \underset{\beta}{v} \partial_\beta F = 0.$$

Hier muß der zweite Faktor verschwinden. (15) ergibt dann $\partial_\alpha F = 0$.

Nach der Transformation hat man

$$\underset{\alpha}{v'} = x'^\alpha.$$

Daraus ergeben sich die neuen kovarianten Komponenten

$$\underset{\alpha}{v'}_{,i} = \delta_{\alpha i}. \tag{16}$$

Für die kontravarianten Komponenten erhält man aus (12) bis (14)

$$\begin{cases} \underset{\alpha}{v'}^\beta = \underset{\alpha}{v}^i \partial_i x'^\beta = \underset{\alpha}{v}^i \underset{\beta}{v}_{,i} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} - K x'^\alpha x'^\beta \\ \underset{\alpha}{v'}^\varrho = \underset{\alpha}{v}^i \partial_i x'^\varrho = 0, \qquad \alpha, \beta \in R,\ \varrho \in R. \end{cases} \tag{17}$$

Es müssen nun die neuen Komponenten des Fundamentaltensors ermittelt werden. Die Striche, die sich auf das neue Koordinatensystem beziehen, werden im folgenden weggelassen. Aus $\underset{\alpha}{v}^i a_{i\beta} = \underset{\alpha}{v}_{,\beta}$ folgt mit (16) und (17)

$$e_\alpha a_{\alpha\beta} - K x^\alpha \sum_{\gamma \in R} x^\gamma a_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Man multipliziere mit $e^\alpha x^\alpha$ und summiere über α. Löst man dann nach $\sum x^\gamma a_{\gamma\beta}$ auf und setzt in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich

$$a_{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} + K \frac{e^\alpha x^\alpha e^\beta x^\beta}{1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

Aus $\underset{\alpha}{v}^i a_{i\varrho} = \underset{\alpha}{v}_{,\varrho}$ erhält man auf ähnliche Weise

$$a_{\alpha\varrho} = 0, \qquad \alpha \in R,\ \varrho \in \overline{R}. \tag{18}$$

Aus $\underset{\alpha}{v}_{,i} a^{i\beta} = \underset{\alpha}{v}^\beta$ und aus (18) folgt

$$a^{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} - K x^\alpha x^\beta, \qquad a^{\alpha\varrho} = 0. \tag{19}$$

Zur Gewinnung der $a_{\varrho\sigma} \neq 0$, $\varrho, \sigma \in \overline{R}$, muß (11) für $i = \varrho, j = \sigma$, ausgenutzt werden. Diese Gleichung lautet wegen (16) und (19)

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\beta \in R} (e_\alpha \delta_{\alpha\beta} - K x^\alpha x^\beta) \partial_\beta a_{\varrho\sigma} = - K x^\alpha a_{\varrho\sigma},$$

oder aufgelöst,

$$\partial_\alpha a_{\varrho\sigma} = \frac{-2K e^\alpha x^\alpha}{1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2} a_{\varrho\sigma}.$$

Integration liefert

$$a_{\varrho\sigma} = \left(1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2\right) g_{\varrho\sigma}(x^\tau).$$

Das ds^2 hat also jetzt die Form

$$\begin{cases} ds^2 = \sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + K \dfrac{\sum e_\alpha x^\alpha dx^\alpha \cdot \sum e_\beta x^\beta dx^\beta}{1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2} + \left(1 - K \sum e_\gamma (x^\gamma)^2\right) dt^2 \\ dt^2 = g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in R,\ \varrho, \sigma, \tau \in \overline{R}. \end{cases} \tag{20}$$

Macht man nun noch die Koordinatentransformation

$$x^\alpha = \frac{\bar{x}^\alpha}{1 + \frac{K}{4}\sum e_\gamma (\bar{x}^\gamma)^2}, \quad x^\varrho = \bar{x}^\varrho, \qquad \alpha, \gamma \in R,\ \varrho \in \overline{R}, \tag{21}$$

so erhält man schließlich das folgende Ergebnis, die Querstriche sind wiederum weggelassen worden:

Gestattet ein V_n r unabhängige gk-Transformationen $\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij}$, $1 \leq r \leq n$, $K \neq 0$, *und ist*

$$Rg\left(\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}\right) = r,$$

so wird eine kanonische Form der Metrik durch

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{1}{\left[1 + \frac{K}{4}\sum e_\gamma (x^\gamma)^2\right]^2} \times \\ & \times \left[\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + \left(1 - \frac{K}{4}\sum e_\gamma (x^\gamma)^2\right)^2 g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma\right], \\ & \alpha, \gamma = 1, \ldots, r, \quad \varrho, \sigma, \tau = r+1, \ldots, n, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

gegeben. Normierte Erzeugende der Transformationen sind

$$\underset{\alpha}{v} = \frac{x^\alpha}{1 + \frac{K}{4}\sum e_\gamma (x^\gamma)^2}, \qquad \alpha, \gamma = 1, \ldots, r. \tag{23}$$

Im Fall $r = n$ fällt das Glied mit $g_{\varrho\sigma}$ weg.

Jeder Raum (22) gestattet nämlich auch die durch (23) erzeugten gk-Transformationen. Setzt man in (22) $x^\varrho = \text{const}$, so erhält man einen V_r der konstanten Krümmung K. Er ist in bezug auf V_n totalgeodätisch.

§ 6. Der Fall $Rg\left(\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}\right) = r - 1$.

Bezeichnungen: $N, R, \overline{R}$ wie in § 5,

$$R' = \{2, \ldots, r\}.$$

Es sei

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v}\, a_{ij}, \qquad \alpha \in R, \tag{24}$$

$$\underset{1}{v^i}\,\underset{1}{v}_{,i} = -K \underset{1}{v}\,\underset{1}{v}, \tag{25}$$

$$\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\lambda}{v}_{,i} = e_\alpha \delta_{\alpha\lambda} - K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\lambda}{v}, \qquad \alpha \in R,\ \lambda \in R'. \tag{26}$$

Nun mache man die Koordinatentransformation

$$x'^1 = \frac{1}{-e_1 K \underset{1}{v}}, \quad x'^\lambda = \frac{1}{-e_1 K \underset{1}{v}} \frac{\underset{\lambda}{v}}{}, \quad x'^\varrho = F^\varrho, \qquad \lambda \in R',\ \varrho \in \overline{R}. \tag{27}$$

Dabei ist $e_1 = \pm 1$ so gewählt, daß $-e_1 K > 0$ ist, und die F^ϱ seien unabhängige Lösungen von (13). Es existiert keine Funktion $F(y^\alpha, y^\varrho)$, $\alpha \in R$, $\varrho \in \overline{R}$, für die

$$F(\underset{\alpha}{v}, F^\varrho) \equiv 0$$

gilt. Durch Multiplikation mit X_α würde

$$\sum_{\beta \in R} \overset{\alpha}{v}{}^{i} \overset{\beta}{v}{}_{,i} \partial_\beta F = 0$$

folgen. Mit (25) und (26) ergibt sich hieraus für $\alpha = 1$

$$\sum \overset{\beta}{v} \partial_\beta F = 0 \tag{28}$$

und für $\alpha = \lambda \in R'$ unter Benutzung der letzten Gleichung $\partial_\lambda F = 0$. Damit liefert (28) $\partial_1 F = 0$.

Die Striche, die sich auf das neue Koordinatensystem beziehen, werden im folgenden wieder weggelassen. Nach der Transformation hat man

$$\overset{1}{v} = \frac{1}{-e_1 K x^1}, \qquad \overset{\lambda}{v} = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{x^\lambda}{x^1}, \qquad \lambda \in R'. \tag{29}$$

Daraus ergeben sich die neuen kovarianten Komponenten

$$\overset{1}{v}{}_{,i} = -\frac{1}{-e_1 K (x^1)^2} \delta_{1i}, \tag{30}$$

$$\overset{\lambda}{v}{}_{,i} = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \left(\frac{\delta_{\lambda i}}{x^1} - \frac{x^\lambda}{(x^1)^2} \delta_{i1} \right). \tag{31}$$

Unter Berücksichtigung von (13), (25) bis (27) und (29) errechnet man für die kontravarianten Komponenten

$$\overset{1}{v}{}^{i} = -e_1 \delta^i_1, \tag{32}$$

$$\overset{\lambda}{v}{}^{1} = \sqrt{-e_1 K}(-e_1 x^\lambda), \qquad \overset{\mu}{v}{}^{\mu} = \sqrt{-e_1 K}\, e_\lambda \delta^\mu_\lambda x^1, \qquad \overset{\varrho}{v}{}^{\varrho} = 0, \qquad \lambda, \mu \in R'. \tag{33}$$

Ferner müssen die Komponenten des Fundamentaltensors ermittelt werden. Aus $\overset{1}{v}{}^{i} a_{ij} = \overset{1}{v}{}_{,j}$ folgt mit (30) und (32)

$$a_{1j} = \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2} e_1 \delta_{1j}, \qquad j \in N. \tag{34}$$

Entsprechend bekommt man aus $\overset{\lambda}{v}{}^{i} a_{i\mu} = \overset{\lambda}{v}{}_{,\mu}$ und $\overset{\lambda}{v}{}^{i} a_{i\varrho} = \overset{\lambda}{v}{}_{,\varrho}$ mit (31) bis (33) und (34)

$$a_{\lambda\mu} = \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2} e_\lambda \delta_{\lambda\mu}, \qquad a_{\lambda\varrho} = 0, \qquad \lambda, \mu \in R', \ \varrho \in \overline{R}.$$

Zur Gewinnung der $a_{\varrho\sigma} \neq 0$, $\varrho, \sigma \in \overline{R}$, muß (24) für $i = \varrho$, $j = \sigma$ ausgenutzt werden. Mit den bisherigen Ergebnissen erhält man

$$\partial_\alpha \ln a_{\varrho\sigma} = -\frac{2}{x^1} \delta_{1\alpha}, \qquad \alpha \in R.$$

Integration ergibt

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2} g_{\varrho\sigma}(x^\tau), \qquad \varrho, \sigma, \tau \in \overline{R}.$$

Damit hat man insgesamt:

Gestattet ein V_n r unabhängige gk-Transformationen $\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v} a_{ij}$, $1 \leq r \leq n$, $K \neq 0$, *und ist*

$$Rg\left(\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}\right) = r - 1,$$

so wird eine kanonische Form der Metrik durch

$$(35)\qquad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{1}{-e_1 K (x^1)^2}\left(\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma\right), \\ \qquad\qquad \alpha = 1, \ldots, r, \quad \varrho, \sigma, \tau = r+1, \ldots, n, \end{cases}$$

gegeben. Normierte Erzeugende der Transformationen sind

$$(36)\qquad \underset{1}{v} = \frac{1}{-e_1 K x^1}, \qquad \underset{\lambda}{v} = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{x^\lambda}{x^1}, \qquad \lambda = 2, \ldots, r$$

Im Fall $r = n$ fällt das Glied mit $g_{\varrho\sigma}$ weg.

Jeder Raum (35) gestattet nämlich auch die durch (36) erzeugten gk-Transformationen. Setzt man in (35) $x^\varrho = \text{const}$, so erhält man einen V_r der konstanten Krümmung K. Er ist in bezug auf V_n totalgeodätisch. Will man ihn analog zu (22) in der RIEMANNschen Form haben, so mache man die Transformation

$$(37)\qquad x^1 = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{H}{\sqrt{-e_1 K x'^1 + h}}, \qquad x^\lambda = \frac{x'^\lambda}{\sqrt{-e_1 K x'^1 + h}}, \qquad x^\varrho = x'^\varrho.$$

Dabei ist

$$(38)\qquad H = 1 + \frac{K}{4} \sum_{\alpha \in R} e_\alpha (x'^\alpha)^2 = 2 - h.$$

Aus (35) und (36) erhält man dann (nach Weglassen der Striche) die *kanonische Form*

$$(39)\qquad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{1}{H^2}\left(\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + \left(\sqrt{-e_1 K}\, x^1 + h\right)^2 g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma\right) \\ \underset{1}{v} = \dfrac{\sqrt{-e_1 K}\, x^1 + h}{\sqrt{-e_1 K}\, H}, \qquad \underset{\lambda}{v} = \dfrac{x^\lambda}{H}. \end{cases}$$

§ 7. Der Fall $Rg\left(\underset{\alpha}{v^i}\,\underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v}\,\underset{\beta}{v}\right) < r - 1$.

Bezeichnungen: $N, R, \bar{R}$ wie in §§ 5, 6,

$$S = \{1, \ldots, s\}, \quad S' = \{2, \ldots, s\}, \quad T = \{s+1, \ldots, r\}.$$

Zunächst werde die Numerierung der $\underset{\alpha}{v}$ so abgeändert, daß die Matrix (10) die Form

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & e_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_s & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in R,$$

erhält. Da in § 6 (wie auch in § 5) nicht vorausgesetzt war, daß die $\underset{\alpha}{v}$ und die Linearkombinationen $\sum a^\alpha \underset{\alpha}{v}$ *alle* gk-Transformationen erschöpfen, darf man

von dem Bogenelement (35) und den Erzeugenden (36) ausgehen. Dabei ist jetzt

$$\alpha \in S, \quad \varrho, \sigma, \tau \in T + \overline{R}, \quad \lambda \in S'. \tag{40}$$

Es müssen nun die $\underset{\omega}{v}, \omega \in T$, berücksichtigt werden. Für sie gilt

$$\underset{\omega}{v}_{,ij} = -K \underset{\omega}{v} a_{ij}, \tag{41}$$

$$\underset{\alpha}{v^i} \underset{\omega}{v}_{,i} = -K \underset{\alpha}{v} \underset{\omega}{v}, \qquad \alpha \in R, \ \omega \in T. \tag{42}$$

Mit (35) und (36) folgt aus (42) für $\alpha = 1$

$$\underset{\omega}{v}_{,1} = -\frac{\underset{\omega}{v}}{x^1}$$

und für $\alpha = \lambda \in S'$ dann

$$\underset{\omega}{v}_{,\lambda} = 0.$$

Integration liefert

$$\underset{\omega}{v} = \frac{\underset{\omega}{\pi}(x^\varrho)}{x^1}, \qquad \omega \in T, \ \varrho \in T + \overline{R}. \tag{43}$$

Geht man hiermit in (42) für $\alpha = \nu \in T$ ein, so ergibt sich wegen (35)

$$\underset{\omega}{\pi}_{,\varrho} \underset{\nu}{\pi}_{,\sigma} g^{\varrho\sigma} = 0, \qquad \varrho, \sigma \in T + \overline{R}.$$

Setzt man andererseits (43) in (41) ein, so folgt

$$\underset{\omega}{\pi}_{;\varrho\sigma} = 0.$$

Das Semikolon bezeichnet kovariante Differentiation bezüglich $g_{\varrho\sigma}$. Die restlichen gk-Transformationen stecken demnach als Parallelfelder in $g_{\varrho\sigma} dx^\varrho dx^\sigma$. Sie sind unabhängig. Aus $a^\omega \underset{\omega}{\pi}_{,\varrho} = 0$ würde

$$a^\omega \underset{\omega}{v}_{,i} = -a^\omega \underset{\omega}{\pi} \frac{\delta_{1i}}{(x^1)^2} \sim \underset{1}{v}_{,i}$$

folgen. Man bringe $g_{\varrho\sigma} dx^\varrho dx^\sigma$ jetzt auf die kanonische Form von EISENHART, R. G. S. 263. Insgesamt hat man dann das Ergebnis:

Gestattet ein V_n r unabhängige gk-Transformationen $\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K \underset{\alpha}{v} a_{ij}$, $1 \leq r < n$, $K \neq 0$, und ist

$$Rg\left(\underset{\alpha}{v^i} \underset{\beta}{v}_{,i} + K \underset{\alpha}{v} \underset{\beta}{v}\right) = s - 1 < r - 1,$$

so wird eine kanonische Form der Metrik durch

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{-e_1 K (x^1)^2} \left(\sum_\lambda e_\lambda (dx^\lambda)^2 + 2 \sum_\varepsilon dx^{s+\varepsilon} dx^{r+\varepsilon} + g_{\varrho\sigma}(x^\tau)\, dx^\varrho\, dx^\sigma \right), \\ &\lambda = 1, \ldots, s, \ \varepsilon = 1, \ldots, r - s, \ \varrho, \sigma, \tau = r + 1, \ldots, n \end{aligned} \right. \tag{44}$$

gegeben. Normierte Erzeugende der Transformationen sind

$$\left\{ \begin{aligned} &\underset{1}{v} = \frac{1}{x^1}, \quad \underset{\mu}{v} = \frac{1}{\sqrt{-e_1 K}} \frac{x^\mu}{x^1}, \quad \underset{\omega}{v} = \frac{x^{r-s+\omega}}{x^1}, \\ &\mu = 2, \ldots, s, \quad \omega = s + 1, \ldots, r. \end{aligned} \right. \tag{45}$$

Jeder Raum (44) gestattet nämlich auch die durch (45) erzeugten gk-Transformationen. Es gilt die Ungleichung

$$s + 2(r - s) \leq n. \tag{46}$$

§ 8. Räume konstanter Krümmung und Einstein-Räume.

Für (22) errechnet man die Komponenten des Krümmungstensors zu

$$R_{\alpha\ jk}^{\ i} = K(a_{\alpha j}\delta_k^i - a_{\alpha k}\delta_j^i), \qquad \alpha \in R, \quad i, j, k \in N$$

$$R_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} = B_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} - \frac{K^2}{h^2}\sum e_\alpha (x^\alpha)^2 (a_{\pi\sigma}\delta_\tau^\varrho - a_{\pi\tau}\delta_\sigma^\varrho), \qquad \pi, \varrho, \sigma, \tau \in \overline{R}.$$

Dabei ist $B_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho}$ der Krümmungstensor bezüglich $g_{\varrho\sigma}(x^\tau)$, h ist in (38) definiert. Entsprechend berechnet man für (35)

$$R_{\alpha\ jk}^{\ i} = K(a_{\alpha j}\delta_k^i - a_{\alpha k}\delta_j^i)$$

$$R_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} = B_{\pi\ \sigma\tau}^{\ \varrho} + K(a_{\pi\sigma}\delta_\tau^\varrho - a_{\pi\tau}\delta_\sigma^\varrho).$$

Der Fall (44) wird mit einbegriffen, wenn man sich die parallelen Null-Vektor-Felder in $g_{\varrho\sigma}\,dx^\varrho dx^\sigma$ hineingesteckt denkt.

Ein V_n von konstanter Krümmung K möge mit $S_n(K)$, ein Einstein-Raum V_n $(n \geq 4)$ der skalaren Krümmung R mit $E_n\big(R/n(1-n)\big)$ bezeichnet werden. Aus den letzten vier Gleichungen folgt nun:

(I) *Der V_n (22) bzw. (35) ist dann und nur dann ein S_n, wenn $S_n = S_n(K)$ ist, und wenn der durch $g_{\varrho\sigma}\,dx^\varrho dx^\sigma$ definierte V_{n-r} ein $S_{n-r}(K)$ bzw. ein $S_{n-r}(0)$ ist.*

(II) *Der V_n (22) bzw. (35) ist dann und nur dann ein E_n, wenn $E_n = E_n(K)$ ist, und wenn der V_{n-r} ein $E_{n-r}(K)$ bzw. ein $E_{n-r}(0)$ ist.*

Zu (I). Für $r = n-1$ erhält man: Der Raum

$$ds^2 = \frac{1}{H^2}\left(\sum e_\alpha (dx^\alpha)^2 + h^2 e_n (dx^n)^2\right)$$

ist ein $S_n(K)$. Dann ist auch (20) für

$$dt^2 = e_n (dx^n)^2$$

ein $S_n(K)$. Diese Fundamentalform wurde von DINGHAS [3] betrachtet, sie hat die Eigenschaft $\operatorname{Det} a_{ij} = \Pi\, e_i$. Setzt man $x^n = \text{const}$, so bleibt ein $S_{n-1}(K)$. — (35) ergibt für $r = n-1$ einen $S_n(K)$. Für (44) liefert (46) im Fall $r = n-1$

$$s = n - 2,$$

da ja andererseits $s - 1 < r - 1$, also $s + 1 \leq r$ vorausgesetzt war. Da nun der Raum

$$2\,dx\,dy + a(y)\,(dy)^2$$

eben ist, so ist im betrachteten Fall auch (44) ein $S_n(K)$. Insgesamt hat man:

Gestattet ein V_n $n-1$ Funktionen $\underset{\alpha}{v}$ mit der Eigenschaft

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = -K\,\underset{\alpha}{v}\,a_{ij},$$

und sind die Vektoren $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ unabhängig, so ist er ein $S_n(K)$.

Für einen $S_n(K)$ kann also der Rang der in § 4 betrachteten Matrix durch entsprechende Auswahl von n gk-Transformationen sowohl zu n als auch zu $n-1$ gemacht werden. Das zeigt, daß der in § 4 aufgestellte Satz für $r=n$ falsch ist. Für (22) mit $r=n$ erzeugt auch $V=H^{-1}$ eine gk-Transformation. Es gilt

$$2hV_{,i} = -K\sum e_k x^k v_{k,i}.$$

Bemerkung 1. Die Transformationen, die auf die kanonischen Formen führen, z.B. (14), können komplex sein. Man nehme nämlich einen positiv definiten $S_n(K)$ mit $K<0$ in der RIEMANNschen Form (22), $g_{\varrho\sigma}=0$, alle $e_\gamma=+1$. Die Funktion

$$v = \frac{h}{\sqrt{-KH}}$$

erfüllt die Gleichungen

$$v_{,ij} = -Kv\,a_{ij}, \qquad v^i v_{,i} = -1-Kvv.$$

Es ist das zugehörige $e=-1$. Mit diesem v kommt man auf dem Wege von § 5 zu einer indefiniten Fundamentalform.

Bemerkung 2. Um die Transformationsgleichungen von zwei isometrischen Räumen $S_n(K)$ und $S'_n(K)$ ineinander zu finden, kann man zuweilen so vorgehen: Man bestimme in beiden Räumen alle gk-Transformationen v, v' und wähle daraus je n Funktionen, die in gleicher Weise normiert sind, also dieselbe Matrix (10) haben. Man setze dann entsprechende v, v' einander gleich und löse nach dem einen Variablensatz auf. Mit dieser Methode wurden z.B. (21) und (37) bestimmt.

Zu (II). BRINKMANN behandelt in seiner Arbeit [1] das Problem, Einstein-Räume ds^2 konform auf andere Einstein-Räume $d\bar{s}^2=V^{-2}ds^2$ abzubilden. Er nennt die Abbildung trivial bzw. eigentlich (proper), wenn $V=\text{const}$ bzw. $V^iV_{,i}\neq 0$ ist. Existieren im Fall $R\neq 0$ Abbildungen mit $V\neq\text{const}$, so sind sie eigentlich. Dann muß V der Gleichung

$$V_{,ij} = -K(V-b)\,a_{ij}, \qquad R = Kn(1-n) \tag{47}$$

genügen, und jede Lösung dieser Gleichung liefert auch eine Abbildung. (II) gibt kanonische Formen für diejenigen E_n, die eigentliche Abbildungen gestatten.

Hier soll nun noch die Tatsache beleuchtet werden, daß die konforme Abbildung stets mit einer gk-Transformation verknüpft ist. Man muß wieder die Fallunterscheidung machen.

α) § 5 entsprechend darf man annehmen:

$$ds^2 = \frac{1}{H^2}\left(\varepsilon(dx)^2 + h^2 dt_K^2\right), \tag{48}$$

$$H = 1 + \frac{K}{4}\varepsilon(x)^2 = 2-h,$$

$$V = a\frac{x}{H} + b. \tag{49}$$

a, b sind Konstanten, die die zur Erlangung der kanonischen Form (22) eingeführte Normierung wieder aufheben. Zur Abkürzung ist $g_{\varrho\sigma} dx^\varrho dx^\sigma = dt_K^2$ gesetzt worden. Dann ist

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{(ax + bH)^2} \left(\varepsilon (dx)^2 + h^2 dt_K^2\right). \tag{50}$$

Berechnet man hierfür $\bar{K}$, so erhält man

$$\frac{\bar{K}}{K} = b^2 - \frac{a^2}{\varepsilon K}. \tag{51}$$

Im Fall $-\varepsilon K > 0$ zeigt (51), daß K und $\bar{K}$ gleiches Vorzeichen haben. Es wird $\bar{K} \neq 0$. Man setze

$$\sqrt{\frac{K}{\bar{K}}}\, b = \cos C, \qquad \frac{a}{\sqrt{-\varepsilon \bar{K}}} = -\sin C$$

und mache in (48) und in (50) die Transformation

$$x = \frac{2}{\sqrt{-\varepsilon K}} \operatorname{tg} \frac{x'}{2}.$$

Es ergibt sich nach Weglassen der Striche

$$ds^2 = \frac{1}{-K \cos^2 x} \left((dx)^2 + dt_{-1}^2\right), \qquad dt_{-1}^2 = -K dt_K^2$$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{-\bar{K} \cos^2 (x + C)} \left((dx)^2 + dt_{-1}^2\right).$$

Ist jedoch $\varepsilon K > 0$, so kann man nur im Fall $\bar{K}/K > 0$ eine analoge Aussage bekommen. Man setze

$$\sqrt{\frac{K}{\bar{K}}}\, b = \cosh C, \qquad \frac{a}{\sqrt{\varepsilon \bar{K}}} = \sinh C$$

und mache die Transformation

$$x = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon K}} \operatorname{tgh} \frac{x'}{2}.$$

Es ergibt sich (ohne Striche)

$$ds^2 = \frac{1}{K \cosh^2 x} \left((dx)^2 + dt_{+1}^2\right), \qquad dt_{+1}^2 = K dt_K^2,$$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{\bar{K} \cosh^2 (x + C)} \left((dx)^2 + dt_{+1}^2\right).$$

β) § 6 entsprechend darf man annehmen:

$$ds^2 = \frac{1}{-\varepsilon K(x)^2} \left(\varepsilon (dx)^2 + dt_0^2\right)$$

$$V = \frac{1}{x} + b.$$

Im Fall $b \neq 0$ führe man C und $\bar{K}$ durch

$$b = \pm \sqrt{\frac{\bar{K}}{K}} = \frac{1}{C}$$

ein. Dann wird

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{-\varepsilon \bar{K}(x+C)^2}\left(\varepsilon (dx)^2 + dt_0^2\right).$$

Ein $E_n(K)$, $K \neq 0$, kann, wenn überhaupt, nur dadurch auf einen $\bar{E}_n(\bar{K})$, $K\bar{K} > 0$, konform abgebildet werden, daß man eine zu einer gk-Transformation gehörende endliche Transformation ausführt und eine triviale Abbildung folgen läßt.

Es wird $\bar{K} = 0$ in den Fällen

α) $K b^2 - \varepsilon a^2 = 0$. Die Rückabbildung entspricht einem $\bar{v}$ mit $\bar{v}_{,ij} = \bar{a}_{ij}$.

β) $b = 0$. Die Rückabbildung entspricht einem parallelen (Nicht-Null-) Vektorfeld.

§ 9. Der Fall $K = 0$.

Bezeichnungen wie bisher. Der V_n besitze r unabhängige Vektoren $\underset{\alpha}{v}_i$ mit

$$\underset{\alpha}{v}_{,ij} = a_{ij}, \qquad \alpha \in R, \quad 1 < r < n. \tag{52}$$

Er gestattet demnach $r-1$ unabhängige Parallelfelder

$$\underset{\gamma}{\pi}_{,i} = \underset{1}{v}_{,i} - \underset{\gamma}{v}_{,i}, \quad \underset{\gamma}{\pi}_{,ij} = 0, \qquad \gamma \in R'. \tag{53}$$

[Wenn es keinen weiteren Vektor $v_{,i}$ gibt, der (52) erfüllt und von den $\underset{\alpha}{v}_{,i}$ unabhängig ist, zeigt man mit dem Satz von S. 336, daß es dann auch kein weiteres Parallelfeld $\pi_{,i}$ gibt, das von den $\underset{\gamma}{\pi}_{,i}$ unabhängig ist.] Man orthogonalisiere und normiere die $\underset{\gamma}{\pi}_{,i}$. Man darf also (mit neuen $\underset{\gamma}{\pi}$)

$$\underset{\gamma}{\pi}^i \underset{\varepsilon}{\pi}_{,i} = e_\gamma \delta_{\gamma\varepsilon} \tag{54}$$

annehmen, $e_\gamma = \pm 1$ bzw. $= 0$ für Nullvektoren. Nach S. 335 kann man von der Fundamentalform

$$\begin{cases} ds^2 = e^{2x^1}\left(\varepsilon (dx^1)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\, dx^\varrho\, dx^\tau\right), \\ \underset{1}{v}^i = \delta^i_1, \end{cases} \tag{55}$$

ausgehen. Setzt man

$$\underset{1}{v}^i \underset{\gamma}{\pi}_{,i} = \underset{\gamma}{p}, \tag{56}$$

so zeigt Differentiation wegen (52) und (53), daß $\underset{\gamma}{p} = \underset{\gamma}{\pi} + c_\gamma$ ist. Man darf aber $\underset{\gamma}{\pi}$ um eine additive Konstante vermehren und also

$$\underset{1}{v}^i \underset{\gamma}{\pi}_{,i} = \underset{\gamma}{\pi}$$

annehmen. Wegen (55) folgt $\underset{\gamma}{\pi}_{,1} = \underset{\gamma}{\pi}$, und demnach ist

$$\underset{\gamma}{\pi} = e^{x^1}\underset{\gamma}{\omega}(x^\varrho), \qquad \gamma \in R', \quad \varrho \in N'.$$

Die Gleichung $\underset{\gamma}{\pi}_{,ij} = 0$ ist für das Bogenelement (55) äquivalent zu

$$\underset{\gamma}{\omega}_{;\varrho\tau} = -\varepsilon \underset{\gamma}{\omega} g_{\varrho\tau}, \qquad \gamma \in R'.$$

Dabei deutet das Semikolon kovariante Differentiation bezüglich $g_{\varrho\tau}dx^\varrho dx^\tau$ an. Schließlich besagt die Normierung (54) für die $\underset{\gamma}{\omega}$:

$$\underset{\gamma}{\omega}_{,\varrho}\,\underset{\varepsilon}{\omega}_{,\tau}\,g^{\varrho\tau} = -\,\varepsilon\,\underset{\gamma}{\omega}\,\underset{\varepsilon}{\omega} + e_\gamma\,\delta_{\gamma\varepsilon}.$$

Die Parallelfelder von (55) stecken also als gk-Transformationen in $g_{\varrho\tau}dx^\varrho dx^\tau$. Den e_γ entsprechend kann dann $g_{\varrho\tau}dx^\varrho dx^\tau$ auf eine der kanonischen Formen der §§ 5 bis 7 gebracht werden, $K=\varepsilon$.

Bemerkung. Man kann im betrachteten Fall auch zuerst die Parallelfelder herausziehen, also von der kanonischen Form von EISENHART ausgehen, und dann $v_{;ij}=a_{ij}$ berücksichtigen. Sind alle $e_\gamma \neq 0$, so kommt man nach der Umnumerierung $1\to r$, $R'\to R-\{r\}$, zu

$$ds^2 = \sum e_\gamma (dx^\gamma)^2 + e^{2x^r}\left(e_r (dx^r)^2 + g_{\varrho\tau}(x^\pi)\,dx^\varrho\,dx^\tau\right).$$

Sind jedoch einige $e_\delta = 0$, so gelangt man zwar auch zu einer kanonischen Form, aber einige $g_{\varrho\tau}$ müssen noch gewissen Homogenitätsbedingungen in bezug auf gewisse Variable genügen.

Literatur.

[1] BRINKMANN, H. W.: Einstein spaces which are mapped conformally on each other. Math. Ann. **94**, 119—145 (1925). — [2] DELGLEIZE, A.: Sur les équations de Weingarten et les espaces pseudosphérique. Bull. Soc. roy. Sci. Liége **4**, 158—161 (1935). — [3] DINGHAS, A.: Zur Metrik nichteuklidischer Räume. Math. Nachr. **1**, 287—291 (1948). — [4] EISENHART, L. P.: Riemannian Geometry. Princeton 1949, Wiederabdruck. Zitiert als R. G. — [5] FIALKOW, A.: Conformal geodesics. Trans. Amer. Math. Soc. **45**, 443—473 (1939). — [6] FIALKOW, A.: Totally geodesic Einstein spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 423—428 (1939). — [7] SHANKS, E. B.: Homothetic correspondences between Riemannian spaces. Duke Math. J. **17**, 299—311 (1950). — [8] VRANCEANU, G.: Leçons de Géométrie Différentielle, Bucarest 1947. — [9] WONG, Y. C.: Some Einstein spaces with conformally separable fundamental tensors. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 157—194 (1943). — [10] YANO, K.: Concircular geometry II. Integrability conditions of $\varrho_{\mu\nu}=\Phi g_{\mu\nu}$. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 354—360 (1940).

Kiel, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 20. März 1954.)

MEYER-KÖNIG, W., und K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 348—352 (1954)

Über das Taylorsche Summierungsverfahren.

Von

W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER.

Einleitung.

Für jedes α in $0<\alpha<1$ betrachten wir die Transformation

$$\mathfrak{b} = T_\alpha \mathfrak{a} \equiv b_n = (1-\alpha)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \alpha^{k-n} a_k \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

wo also T_α die Gestalt

$$T_\alpha = \operatorname{diag}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^n \Delta_T \operatorname{diag} \alpha^k, \qquad \Delta_T = \left\{\binom{k}{n}\right\}$$

hat. Die Reihen b_n sollen dabei im gewöhnlichen Sinn konvergieren. $\mathfrak{T}_\alpha$ sei die Menge der $\mathfrak{a}$, für die die b_n erklärt und die Glieder einer konvergenten Reihe sind. Ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}_\alpha$, so heißt die Reihe $\sum a_k$ *summierbar durch das T_α-Verfahren oder Taylor-Verfahren der Ordnung* α, und zwar *regulär* bzw. *singulär summierbar*, wenn $z=\alpha$ ein regulärer bzw. singulärer Punkt des (wegen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}_\alpha$ mindestens für $|z|<\alpha$ konvergenten) Funktionselements $a(z) = \sum a_k z^k$ ist. Entsprechend definieren wir die Teilmengen $\mathfrak{T}_\alpha^R$ und $\mathfrak{T}_\alpha^S$ von $\mathfrak{T}_\alpha$. Bei regulärer Summierbarkeit sind die $b_n(1-\alpha)^{-n}$ die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $a(z)$ im Punkte $z=\alpha$.

In Satz 1 und 2 untersuchen wir das Gleichungssystem $\mathfrak{b} = T_\alpha \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$ gegeben, $\mathfrak{a}$ gesucht), wobei wir uns auf Ergebnisse von BANACH, EIDELHEIT und PÓLYA stützen. Mit Hilfe dieser beiden Sätze zeigen wir, daß es singulär summierbare Reihen gibt (Satz 3), und erledigen eine seither noch offenstehende Frage bei der Indexverschiebung (Satz 4), wodurch die folgende abschließende Feststellung ermöglicht wird: Im Fall $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ ist bei singulärer Summierbarkeit Indexverschiebung allgemein nur in *einer* Richtung gestattet, in allen übrigen Fällen ist beliebige Indexverschiebung möglich. Wir schließen zwei Bemerkungen über die Perfektheit von T_α und über den Vergleich von T_α mit zeilenfiniten Verfahren an.

Bei den Verfahren S_α und T_a' ($0<\alpha<1$, $a>0$; s. unten) liegen die Verhältnisse analog, abgesehen von der Indexverschiebung, die hier uneingeschränkt in beiden Richtungen vorgenommen werden kann, wie bekannt ist. Wir zeigen, wie die fraglichen Aussagen bei S_α unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen bei T_α folgen, und wie ein Ergebnis von R. P. BOAS über das Stieltjessche Momentproblem die Sachlage bei T_a' klärt.

Näheres über die Verfahren T_α, S_α und T'_α findet man bei HARDY [3, S. 218] und MEYER-KÖNIG [4], [5][1]).

Satz 1 (Bildraum von T_α). *Zu jedem* $\mathfrak{b}$ *gibt es ein* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{b} = T_\alpha \mathfrak{a}$.

Beweis. Nach PÓLYA [6, S. 244] ist das Gleichungssystem $\mathfrak{c} = \Delta_T \mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{c}$ auflösbar. Aus der oben gegebenen Darstellung von T_α folgt die Behauptung. — Wir hätten auch einen allgemeinen Satz von EIDELHEIT [2] verwenden können.

Satz 2 (Nullraum von T_α). *Die Menge der* $\mathfrak{a}$ *mit* $T_\alpha \mathfrak{a} = 0$ *bildet einen unendlich-dimensionalen linearen Raum.*

Wir erklären dabei $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\lambda \mathfrak{a}$ in natürlicher Weise; 0 steht für $\{0, 0, \ldots\}$. Satz 2 hat zur Folge, daß es in Satz 1 zu jedem $\mathfrak{b}$ unendlich viele Urfolgen $\mathfrak{a}$ gibt.

Beweis. Wäre der genannte Raum nur endlich-dimensional, so könnten wir durch Hinzufügen endlich vieler Zeilen zu T_α eine Matrix T^*_α erhalten, bei der es zu jedem $\mathfrak{b}$ genau ein $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b} = T^*_\alpha \mathfrak{a}$ gäbe. Nach BANACH [1, S. 51] wäre T^*_α dann zeilenfinit (vgl. auch [9]). — Wir hätten auch [6] heranziehen können; unsere Beweismethode gestattet jedoch eine naheliegende Verallgemeinerung des zitierten Banachschen Satzes.

Die Nullösungen $\mathfrak{a} \neq 0$ erfüllen $a_k = o(\alpha^{-k} k^{-p})$ für jedes reelle p (Anwendbarkeitsbedingung), jedoch $a_k = o(\beta^{-k})$ für kein $\beta > \alpha$ (funktionentheoretisch begründet). Mit $\{a_0, a_1, \ldots\}$ ist auch $\{0, a_0, a_1, \ldots\}$ eine Nullösung und umgekehrt (vgl. den Beweis zu Satz 4).

Satz 3 (Singuläre Summierbarkeit bei T_α). *Für jedes* α *in* $0 < \alpha < 1$ *ist* $\mathfrak{T}^R_\alpha \neq \mathfrak{T}_\alpha$, *d.h. es gibt singulär summierbare Reihen.*

Beweis. Nach Satz 2 wählen wir ein $\mathfrak{a} \neq 0$ mit $T_\alpha \mathfrak{a} = 0$. Dann ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}_\alpha$ (klar), aber nicht $\mathfrak{a} \in \mathfrak{T}^R_\alpha$ (Grund: Identitätssatz für analytische Funktionen). — Bei $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ hätten wir auch eine konvergente Reihe $\sum b_n$ wählen können, so daß das Funktionselement $\sum b_n (1-\alpha)^{-n} (z-\alpha)^n$ in $z = -1 + 2\alpha$ singulär ist. Jedes zu $\mathfrak{b}$ gehörige $\mathfrak{a}$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. — Schließlich kann man bei $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ auch Satz 4 zum Beweis heranziehen.

Über die Indexverschiebung beim T_α-Verfahren ist bis jetzt folgendes bekannt:

$$\text{Ist} \quad \{a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha, \text{ so ist auch } \{0, a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha \quad (0 < \alpha < 1),$$

$$\text{ist } \{0, a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha, \text{ so ist auch } \{a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}_\alpha \quad (\tfrac{1}{2} < \alpha < 1),$$

$$\text{ist } \{0, a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}^R_\alpha, \text{ so ist auch } \{a_0, a_1, \ldots\} \in \mathfrak{T}^R_\alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

Wir vervollständigen diese Ergebnisse.

[1]) Weitere Literatur ist in [5] angegeben. Die in der vorliegenden Note zu T und S als Summierungsverfahren für Reihen gehörigen Matrizen T_α und S_α unterscheiden sich je um einen konstanten Faktor von den in [4] mit T_α und S_α bezeichneten Matrizen, die zu T und S als Limitierungsverfahren für Folgen gehören.

Satz 4 (Indexverschiebung bei T_α). *Für jedes* α *in* $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ *gibt es ein* $\mathfrak{a}'=\{0, a_0, a_1, \ldots\}\in\mathfrak{T}_\alpha$, *so daß* $\mathfrak{a}=\{a_0, a_1, \ldots\}$ *nicht zu* $\mathfrak{T}_\alpha$ *gehört.*

Ein solches $\mathfrak{a}'$ gehört wegen der zuvor genannten Resultate zu $\mathfrak{T}_\alpha^S$.

Beweis. Denken wir uns zu einer gegebenen Folge $\mathfrak{b}$ nach Satz 1 eine T_α-Urfolge $\mathfrak{a}=\{a_0, a_1, \ldots\}$ bestimmt und setzen wir $\mathfrak{a}'=\{0, a_0, a_1, \ldots\}$, $\mathfrak{b}'=T_\alpha\,\mathfrak{a}'$, so gilt

$$b_0'=\alpha\, b_0, \qquad b_n'=(1-\alpha)\, b_{n-1}+\alpha\, b_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Wählen wir speziell $b_n=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n$, so gilt $\mathfrak{a}\notin\mathfrak{T}_\alpha$ $\left(\text{wegen } \frac{\alpha-1}{\alpha}\leq -1\right)$, aber $\mathfrak{a}'\in\mathfrak{T}_\alpha$ (wegen $b_0'=\alpha$, $b_1'=b_2'=\cdots=0$).

Wir fügen zwei Ergebnisse ohne Beweis an. Fassen wir $\mathfrak{T}_\alpha$ in der üblichen Weise als FK-Raum auf, so ist $\mathfrak{T}_\alpha^R$ die abgeschlossene Hülle der abbrechenden Stellen in $\mathfrak{T}_\alpha$ („teilweise Perfektheit", Beweis mit den Methoden von [10]). — T_α ist keinem zeilenfiniten Verfahren äquivalent. (Man zeigt, daß $\mathfrak{T}_\alpha$ kein BK-Raum ist.).

S_α.

Beim S_α-Verfahren betrachten wir zu jedem α in $0<\alpha<1$ die Transformation

$$\mathfrak{b}=S_\alpha\,\mathfrak{a}\equiv b_n=\alpha(1-\alpha)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\alpha^k a_k \qquad (n=0,1,\ldots),$$

wo also S_α die Gestalt

$$S_\alpha=\alpha\,\mathrm{diag}\,(1-\alpha)^n\,\Delta_S\,\mathrm{diag}\,\alpha^k, \qquad \Delta_S=\left\{\binom{n+k}{k}\right\}$$

hat. Genau so wie bei T_α erklären wir $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}_\alpha^R$, $\mathfrak{S}_\alpha^S$. Bei regulärer Summierbarkeit sind die $b_n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-n}$ die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,z^{-k-1}$ im Punkte $z=\frac{1}{\alpha}$.

Wir führen für $0<\alpha<1$ die (zeilenfinite) Matrix

$$E_\alpha=\alpha\,\mathrm{diag}\,(1-\alpha)^n\,\Delta_E\,\mathrm{diag}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k, \qquad \Delta_E=\left\{\binom{n}{k}\right\}$$

ein[2]). Zu gegebenem $\mathfrak{b}$ gibt es genau ein $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}=E_\alpha\,\mathfrak{a}$. Aus

$$\Delta_E\,\Delta_T=\Delta_S$$

folgt unmittelbar

$$E_\alpha\,T_\alpha=S_\alpha$$

(vgl. [4, S. 277]). Existiert eine der beiden Transformationen $T_\alpha\,\mathfrak{a}$ und $S_\alpha\,\mathfrak{a}$, so existiert auch die andere und ist $E_\alpha(T_\alpha\,\mathfrak{a})=S_\alpha\,\mathfrak{a}$. Es folgt, *daß es zu jedem* $\mathfrak{b}$ *ein* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{b}=S_\alpha\,\mathfrak{a}$ *gibt, daß der Nullraum von* S_α *mit dem Nullraum von* T_α *übereinstimmt und daß mit* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{T}_\alpha^S$ *auch* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{S}_\alpha^S$ *gilt.*

[2]) E_α ist die zum Euler-Knoppschen Verfahren, aufgefaßt als Summierungsverfahren für Reihen $\sum a_k$, gehörige Matrix: $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}_\alpha$ heißt, daß die Glieder der Folge $\mathfrak{b}=E_\alpha\,\mathfrak{a}$ die Glieder einer konvergenten Reihe sind.

T_a'.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{V}$ die Klasse der Funktionen $s(x)$, die für $x \geq 0$ definiert und für jedes $x_0 > 0$ in $0 \leq x \leq x_0$ von beschränkter Schwankung sind. Zu einem $s(x) \in \mathfrak{V}$, das wir auch mit $\mathfrak{s}$ bezeichnen, betrachten wir für jedes $a > 0$ die Transformation

$$\mathfrak{b} = T_a' \mathfrak{s} \equiv b_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-a x} \, d s(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Die Integrale sind im Riemann-Stieltjesschen Sinn zu verstehen und sollen im gewöhnlichen Sinn konvergieren: $\int_0^\infty = \lim_{x \to \infty} \int_0^x$. $\mathfrak{T}_a'$ sei die Menge aller $\mathfrak{s}$, für die die b_n erklärt und die Glieder einer konvergenten Reihe sind. Ist $\mathfrak{s} \in \mathfrak{T}_a'$, so heißt das Integral $\int_0^\infty d s(x)$ *summierbar durch das T_a'-Verfahren oder Taylor-Verfahren der Ordnung a*, und zwar *regulär* bzw. *singulär summierbar*, wenn $z = a$ ein regulärer bzw. singulärer Punkt des (wegen $\mathfrak{s} \in \mathfrak{T}_a'$ mindestens für $\Re z > a$ konvergenten) Funktionselements $S(z) = \int_0^\infty e^{-z x} \, d s(x)$ ist. Entsprechend definieren wir die Teilmengen $\mathfrak{T}_a'^R$ und $\mathfrak{T}_a'^S$ von $\mathfrak{T}_a'$. Bei regulärer Summierbarkeit sind die $b_n (-a)^{-n}$ die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $S(z)$ im Punkte $z = a$.

Um zu zeigen, *daß es zu jedem* $\mathfrak{b}$ *ein* $\mathfrak{s} \in \mathfrak{V}$ *mit* $\mathfrak{b} = T_a' \mathfrak{s}$ *gibt*, denken wir uns ein $\mathfrak{t} \in \mathfrak{V}$ mit

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^\infty x^n \, d t(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

bestimmt, was nach R. P. Boas möglich ist (vgl. [6, S. 243], [7, S. 103], [8, S. 139]);

$$s(x) = \int_0^x e^{a y} \, d t(y) \qquad (x \geq 0)$$

hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Aus den a. a. O. enthaltenen Resultaten folgt weiter, *daß der Nullraum von T_a' unendlich-dimensional in folgendem Sinn ist*: Zu jedem natürlichen m gibt es m in $x \geq 0$ normalisierte (vgl. [8, S. 13]) und linear unabhängige $\mathfrak{s}_i \in \mathfrak{V}$ mit $T_a' \mathfrak{s}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Wir wählen z. B. m normalisierte $\mathfrak{u}_i \in \mathfrak{V}$ mit

$$\int_0^\infty x^n \, d u_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 2i - 1 \\ 0 & \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots; \, n \neq 2i - 1 \end{cases}$$

und setzen $t_i(x) = u_i(\sqrt{x})$ (vgl. [8, S. 140]). Dann sind die $\mathfrak{t}_i \in \mathfrak{V}$ normalisiert und gilt

$$\int_0^\infty x^n \, d t_i(x) = \int_0^\infty x^{2n} \, d u_i(x) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Setzen wir weiter

$$s_i(x) = \int_0^x e^{ay}\, dt_i(y), \qquad t_i(x) = \int_0^x e^{-ay}\, ds_i(y) \qquad (x \geq 0),$$

so sind die $s_i(x)$ normalisiert und im Nullraum von T_a' gelegen, ferner sind sie linear unabhängig, denn aus $\sum_i c_i\, s_i(x) = 0$ folgt $\sum_i c_i\, u_i(x) = 0$ und wegen der Momenteigenschaften der u_i daraus $c_i = 0$.

Um zu zeigen, *daß $\mathfrak{T}_a'^S$ nicht leer ist*, wählen wir ein normalisiertes nicht konstantes $\mathfrak{s} \in \mathfrak{V}$ mit $T_a'\, \mathfrak{s} = 0$. Wäre $\mathfrak{s} \in \mathfrak{T}_a'^R$, so wäre $S(z) = 0$, also $s(x)$ doch konstant. Somit ist $\mathfrak{s} \in \mathfrak{T}_a'^S$.

Literatur.

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] EIDELHEIT, M.: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen (II). Studia math. **7**, 150—154 (1938). — [3] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [4] MEYER-KÖNIG, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304 (1950). — [5] Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen. Math. Z. **56**, 179—205 (1952). — [6] PÓLYA, G.: Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen. Comm. math. Helvet. **11**, 234—252 (1938/39). — [7] SHOHAT, J. A., and J. D. TAMARKIN: The problem of moments. New York 1943. — [8] WIDDER, D. V.: The Laplace transform. Princeton 1946. — [9] ZELLER, K.: *FK*-Räume und Matrixtransformationen. Math. Z. **58**, 46—48 (1953). — [10] Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. Math. **4**, 425—431 (1953).

Stuttgart, Liststr. 51.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. April 1954.)

NITSCHE, J.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 353—366 (1954)

Randwertprobleme für die Verbiegung positiv gekrümmter Flächenstücke.

Von

JOACHIM NITSCHE.

Als Einbettungsproblem bezeichnet man die Aufgabe, eine Fläche mit vorgegebenem Linienelement im Raum zu bestimmen. Unter der Voraussetzung analytischer Koeffizienten hat M. JANET [4] einen Existenzsatz bewiesen. Aus neuerer Zeit stammt ein Beweis von HARTMANN und WINTER [3], die von den Koeffizienten der ersten Grundform nur dreimalige stetige Differenzierbarkeit fordern. In diesen Arbeiten wird die Existenz von Flächen mit dem gegebenen Linienelement gezeigt. Im allgemeinen gibt es deren unendlich viele. Sie sind Verbiegungen voneinander, d.h. alle isometrisch aufeinander abgebildet. Es ist naheliegend zu untersuchen, durch welche Eigenschaften sich die verschiedenen möglichen Flächen unterscheiden bzw. wie sie sich charakterisieren lassen.

Die Bestimmung von Biegeflächen ist äquivalent mit dem Auffinden von Lösungen der Gauß-Codazzischen Gleichungen. In diesen treten die drei Koeffizienten der zweiten Grundform auf. Einer von ihnen läßt sich noch eliminieren, und es ergibt sich ein quasilineares System von Differentialgleichungen für zwei gesuchte Funktionen in zwei Variabeln. Dies ist für Flächen positiver Gaußscher Krümmung elliptisch.

In der vorliegenden Arbeit sollen berandete, positiv gekrümmte Flächenstücke betrachtet werden. Sie seien auf die Parameter x^1, x^2 bezogen. Bedeutet dann T das Gebiet der x^1, x^2-Ebene, dem das Flächenstück entspricht, so ist nach den eben gemachten Bemerkungen das Biegeproblem äquivalent mit der Bestimmung zweier stetig differenzierbarer Funktionen $u(x^1, x^2)$, $v(x^1, x^2)$, welche in T Lösungen des quasilinearen elliptischen Systems sind. Wie bei der Behandlung elliptischer Differentialgleichungen üblich, wird auf dem Rande S von T eine Randbedingung an u, v gestellt

$$\Pi(u, v; s) - \pi(s) = 0 \qquad (s \text{ Bogenlänge von } S). \tag{1}$$

Da die Funktionen u, v aus den Koeffizienten der zweiten Grundform gebildet sind, läßt sich der Ausdruck $\Pi(u, v; s)$ als geometrische Eigenschaft der Randkurve bzw. des Randstreifens der zu bestimmenden Fläche interpretieren. Gelingt der Nachweis, daß die Lösungen $u(x^i)$, $v(x^i)$ der Gauß-Codazzischen Gleichungen durch die Randbedingung eindeutig bestimmt sind, so ist die eingangs gestellte Frage nach einer Charakterisierung einer speziellen Fläche

unter der Gesamtheit der zu ihr isometrischen Flächen beantwortet. Man kann dann sagen, daß der Wert $\pi(s)$ der durch die Funktion Π ausgedrückten Krümmungseigenschaft des Randes das Flächenstück im Raum eindeutig bestimmt. Daran anschließend ist zu untersuchen, ob auch zu gegebener Funktion $\pi(s)$ stets eine Biegefläche existiert.

Zunächst erhebt sich aber die Schwierigkeit einer Auswahl zweckmäßiger Randbedingungen. Bei einem quasilinearen System hat der Begriff einer *linearen* Randbedingung, die sich also in der Form $a\,u+b\,v+c=0$ schreiben läßt, keinen unmittelbaren Sinn, weil die unbekannten Funktionen einer beliebigen umkehrbaren Transformation

$$u=\Phi(\tilde{u},\tilde{v};x^i),\qquad v=\Psi(\tilde{u},\tilde{v};x^i)\,. \tag{2}$$

unterworfen werden dürfen. Für $\tilde{u},\tilde{v}$ ergibt sich dann nämlich wieder ein quasilineares System, während die Linearität der Randbedingung nicht erhalten bleibt. Es erscheint wünschenswert, eine Klasse von Randbedingungen abzugrenzen, die durch besondere Eigenschaften analytischer oder geometrischer Natur ausgezeichnet sind, unabhängig davon, welche Gestalt sie bei einer speziellen Wahl der gesuchten Funktionen besitzen. Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich derartige Randbedingungen auszeichnen lassen. Den Ausgangspunkt bilden Integralrelationen, d. h. Beziehungen der allgemeinen Form

$$\oint_S M(u,v;s)\,ds=\iint_T N(u,v,u_{x^i},v_{x^i};x^i)\,dx^1\,dx^2, \tag{3}$$

die für jedes Lösungspaar der Gauß-Codazzischen Gleichungen bestehen und einen Zusammenhang der Werte von u, v und ihrer Ableitungen in den Punkten von T und S herstellen. Es kann stets erreicht werden, daß unter dem Flächenintegral keine Ableitungen von u, v auftreten (vgl. NITSCHE [6]):

$$N\equiv N(u,v;x^i). \tag{A}$$

Die gewünschte Auswahl der betrachteten Randbedingungen (1) wird dann durch die Forderung gewonnen: Die in die Randbedingung eingehende Funktion $\Pi(u,v;s)$ soll so beschaffen sein, daß das Randintegral in (3) vermöge der gestellten Randbedingung unabhängig von u, v ist und nur von der Funktion $\pi(s)$ abhängt. In Formeln lautet also die Forderung

$$\frac{\partial(M,\Pi)}{\partial(u,v)}=0\,. \tag{B}$$

Eine derartige Randbedingung besitzt folgenden Aufbau: a und b seien die geodätische Windung und die Normalkrümmung des Randstreifens der gesuchten Biegefläche, und $F(U,V;s)$ sei eine beliebige Potentialfunktion in U, V und hänge noch von der Bogenlänge von S ab. Dann ist in (1)

$$\Pi\equiv b\cdot F\left(\frac{\sqrt{K}}{b},\frac{a}{b};s\right) \tag{4}$$

zu setzen, wobei K die Gaußsche Krümmung bezeichnet.

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn die Potentialfunktion F linear in U, V ist. Alsdann ergibt sich nämlich als Randbedingung

$$\Pi \equiv \alpha(s)\, b + \beta(s)\, a + \gamma(s). \tag{5}$$

Zu den zugelassenen Randbedingungen gehören also auch die, bei denen längs des Randes eine lineare Beziehung zwischen der Normalkrümmung und der geodätischen Windung besteht.

I. Die Gauß-Codazzischen Gleichungen.

Eine Fläche mit der Metrik

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \tag{I 1}$$

(ω^1, ω^2 sind zwei unabhängige Linearformen in den Variabeln x^1, x^2) ist bestimmt, wenn zu ω^1, ω^2 drei weitere Formen $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ bekannt sind, die den Gleichungen

$$\text{(I 2)} \quad \begin{cases} d\omega^1 - [\omega_{12}\omega^2] = 0, \qquad d\omega^2 + [\omega_{12}\omega^1] = 0, \\ [\omega_{13}\omega^1] + [\omega_{23}\omega^2] = 0, \\ d\omega_{12} - [\omega_{23}\omega_{13}] = 0, \quad d\omega_{13} + [\omega_{23}\omega_{12}] = 0, \quad d\omega_{23} - [\omega_{13}\omega_{12}] = 0 \end{cases}$$

genügen (vgl. BLASCHKE [*1*], S. 44). Führen wir die Funktionen $q, \bar{q}$ durch

$$d\omega^1 = q\,[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^2 = -\bar{q}\,[\omega^1\omega^2] \tag{I 3}$$

ein, so folgt aus den zwei ersten Gleichungen (I 2)

$$\omega_{12} = q\,\omega^1 - \bar{q}\,\omega^2. \tag{I 4}$$

Da ω^1, ω^2 unabhängige Formen sind, können wir ω_{13}, ω_{23} aus diesen kombinieren und erhalten unter Berücksichtigung der dritten Gl. (I 2)

$$\omega_{13} = r\,\omega^1 + n\,\omega^2, \qquad \omega_{23} = n\,\omega^1 + \bar{r}\,\omega^2 \tag{I 5}$$

mit drei neuen Funktionen $r, \bar{r}, n$. Durch Einsetzen von (I 4, 5) in die restlichen Gln. (I 2) gewinnen wir das System der Gauß-Codazzischen Gleichungen:

$$\text{(I 6)} \quad \begin{cases} d(r\,\omega^1 + n\,\omega^2) = (q\,\bar{r} + \bar{q}\,n)\,[\omega^1\omega^2] \\ d(n\,\omega^1 + \bar{r}\,\omega^2) = (\bar{q}\,r + q\,n)\,[\omega^2\omega^1] \\ d(q\,\omega^1 - \bar{q}\,\omega^2) = -(r\,\bar{r} - n^2)\,[\omega^1\omega^2]. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung läßt sich noch umformen. Da nämlich

$$\text{II} = \omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23} = r(\omega^1)^2 + 2n\,\omega^1\omega^2 + \bar{r}\,(\omega^2)^2 \tag{I 7}$$

die zweite Grundform der Fläche ist, finden wir mit (I 1)

$$K = r\,\bar{r} - n^2 \tag{I 8}$$

für die Gaußsche Krümmung der Fläche, die sich demnach durch die Invarianten der Formen ω^1, ω^2 vermöge

$$d(q\,\omega^1 - \bar{q}\,\omega^2) = -K\,[\omega^1\omega^2] \tag{I 9}$$

ausdrückt. Da $q, \bar{q}$ aus ω^1, ω^2 allein berechenbar sind, gilt dasselbe von K. Gl. (I 6_3) kann durch (I 8) ersetzt werden.

Von den Koeffizienten von dx^i in den Formen $\omega^\varkappa$ wollen wir für das weitere voraussetzen, sie seien analytische Funktionen der Flächenparameter x^1, x^2 innerhalb eines gewissen Gebietes D der x^1, x^2-Ebene. Dann gilt dasselbe von K. Da wir uns auf Flächen positiver Krümmung beschränken wollen, fordern wir noch

$$K > 0 \quad \text{in } D. \tag{I 10}$$

II. Das quasilineare Differentialgleichungssystem.

Bezeichnen wir die Pfaffschen Ableitungen bezüglich der Formen ω^1, ω^2 durch angehängte Indizes, so schreiben sich die Gauß-Codazzischen Gleichungen auch in der Form

$$\begin{cases} r_2 - n_1 = q(r - \bar{r}) - 2\bar{q}\,n \\ \bar{r}_1 - n_2 = \bar{q}(\bar{r} - r) - 2q\,n \\ r\bar{r} - n^2 = K. \end{cases} \tag{II 1}$$

Auf Grund der Gaußschen Gl. (II 1_3) läßt sich eine der drei Funktionen $r, \bar{r}, n$ eliminieren. So ergibt sich ein quasilineares System für zwei gesuchte Funktionen. Es ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem die Fläche positive, verschwindende oder negative Krümmung besitzt (vgl. NITSCHE [5]). In unserem Falle $K > 0$ lassen sich die Differentialgleichungen auf eine „elliptische Normalform" transformieren (vgl. NITSCHE [6]), indem einerseits geeignete Funktionen verwendet, andererseits die Gleichungen in passender Weise kombiniert werden.

Zu dem Ende stellen wir zunächst einige Formeln zusammen, die eine Folge der Gln. (II 1) bzw. (I 6), (I 8) sind:

$$\begin{cases} d(r\omega^1 + n\omega^2) = (q\bar{r} + \bar{q}\,n)\,[\omega^1\omega^2] \\ d(n\omega^1 + \bar{r}\,\omega^1) = (\bar{q}\,r + q\,n)\,[\omega^2\omega^1] \\ r\bar{r} - n^2 = K. \end{cases} \tag{II 2}$$

Führen wir durch

$$\left.\begin{cases} \varphi^1 = k\,\omega^1, & \Phi^1 = r\omega^1 + n\omega^2 \\ \varphi^2 = n\,\omega^1 + \bar{r}\,\omega^2, & \Phi^2 = k\,\omega^2 \end{cases}\right\} \quad (k = +\sqrt{K}) \tag{II 3}$$

zwei Paare unabhängiger Pfaffscher Formen φ^1, φ^2 und Φ^1, Φ^2 ein, so gilt nach (II 2)

$$\begin{cases} d\varphi^1 = -(k_2 - q\,k)\,[\omega^1\omega^2], & d\Phi^1 = (q\bar{r} + \bar{q}\,n)\,[\omega^1\omega^2] \\ d\varphi^2 = (\bar{q}\,r + q\,n)\,[\omega^2\omega^1], & d\Phi^2 = -(k_1 - \bar{q}\,k)\,[\omega^2\omega^1]. \end{cases} \tag{II 4}$$

Φ^1, Φ^2 lassen sich als Linearkombinationen von φ^1 und φ^2 darstellen:

$$\Phi^1 = v\,\varphi^1 + u\,\varphi^2, \quad \Phi^2 = -u\,\varphi^1 + v\,\varphi^2. \tag{II 5}$$

Dabei ergeben sich die Werte

$$u = \frac{n}{\bar{r}}, \qquad v = \frac{k}{\bar{r}}. \tag{II 6}$$

Man kann stets (nötigenfalls nach Umorientierung des Normalenvektors) $\bar{r} > 0$ und damit auch $v > 0$ erreichen. Wegen (II 2_3) berechnen sich $r, \bar{r}, n$ aus u, v vermöge

$$r = k\,\frac{u^2 + v^2}{v}, \qquad n = k\,\frac{u}{v}, \qquad \bar{r} = k\,\frac{1}{v}. \tag{II 7}$$

Werden diese Ausdrücke für die Koeffizienten der zweiten Grundform in die Gl. (II 1) eingesetzt, so resultiert ein quasilineares Differentialgleichungssystem für u, v. Dieses erhalten wir auch dadurch, daß wir die äußeren Differentiale der Linearkombinationen (II 5) für Φ^1 und Φ^2 mit den in (II 4) berechneten gleichsetzen. Zum Zwecke der besseren Darstellung verwenden wir die Pfaffschen Ableitungen bezüglich der Formen φ^1 und φ^2. Sie sollen durch vorgesetzte ∇_1 und ∇_2 bezeichnet werden. Für das totale Differential einer stetig differenzierbaren Funktion $h(x^i)$ gilt dann

$$dh = h_{x^i}\,dx^i = h_1\,\omega^1 + h_2\,\omega^2 = (\nabla_1 h)\,\varphi^1 + (\nabla_2 h)\,\varphi^2,$$

woraus

$$\begin{cases} \nabla_1 h = \frac{1}{k}\,h_1 - \frac{n}{k\bar{r}}\,h_2 \\ \nabla_2 h = \frac{1}{\bar{r}}\,h_2 \end{cases} \tag{II 8}$$

folgt. Jetzt liefert die Differentiation

$$\begin{aligned} d\Phi^1 &\equiv d(v\,\varphi^1 + u\,\varphi^2) = (\nabla_1 u - \nabla_2 v)\,[\varphi^1\,\varphi^2] + u\,d\varphi^2 + v\,d\varphi^1 \\ &= \{k\bar{r}\,(\nabla_1 u - \nabla_2 v) - v\,(k_2 - q\,k) - u\,(\bar{q}\,r + q\,n)\}\,[\omega^1\,\omega^2]. \end{aligned}$$

Bei Vergleich mit (II 4) ergibt sich somit

$$\nabla_1 u - \nabla_2 v = \frac{q\,\bar{r} + \bar{q}\,n}{k\,\bar{r}} + \frac{\bar{q}\,r + q\,n}{k\,\bar{r}}\,u + \frac{k_2 - q\,k}{k\,\bar{r}}\,v.$$

Setzen wir nun überall für $r, \bar{r}, n$ die Ausdrücke (II 7) ein, so erhalten wir

$$\nabla_1 u - \nabla_2 v = \frac{k_2 - q\,k}{k^2}\,v^2 + \frac{1}{k}\,\{q\,(1 + u^2) + \bar{q}\,(u + u^3 + u\,v^2)\}. \tag{II 9}$$

Jetzt hängen allerdings die Differentiationen ∇_1 und ∇_2 von u, v ab:

$$\begin{cases} \nabla_1 h = \frac{1}{k}\,h_1 - \frac{u}{k}\,h_2 \\ \nabla_2 h = \frac{v}{k}\,h_2, \end{cases} \tag{II 10}$$

ebenso wie die Pfaffschen Formen φ^1 und φ^2:

$$\varphi^1 = k\,\omega^1, \qquad \varphi^2 = k\,\frac{u}{v}\,\omega^1 + k\,\frac{1}{v}\,\omega^2. \tag{II 11}$$

Durch Differentiation von Φ^2 (II 5_2) gewinnen wir entsprechend noch die Gleichung

$$\text{(II 9)} \quad \nabla_2 u + \nabla_1 v = \frac{k_1 - \bar{q}\,k}{k^2}\, v - \frac{k_2 - q\,k}{k^2}\, u\, v + \frac{1}{k}\{q\, u\, v + \bar{q}\, v(u^2 + v^2)\}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\text{(II 12)} \quad \begin{cases} F(u, v;\, x^i) = \dfrac{k_2 - q\,k}{k^2}\, v^2 + \dfrac{1}{k}\{q(1 + u^2) + \bar{q}\, u(1 + u^2 + v^2)\} \\ G(u, v;\, x^i) = \dfrac{k_1 - \bar{q}\,k}{k^2}\, v - \dfrac{k_2 - q\,k}{k^2}\, u\, v + \dfrac{1}{k}\{q\, u\, v + \bar{q}\, v(u^2 + v^2)\} \end{cases}$$

schreiben wir dafür auch

$$\text{(II 13)} \quad \begin{cases} \nabla_1 u - \nabla_2 v = F(u, v;\, x^i) \\ \nabla_2 u + \nabla_1 v = G(u, v;\, x^i). \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen die gewünschte Normalform des quasilinearen Systems dar. Es gilt der Satz:

Satz 1. *Sind u, v mit den Koeffizienten $r, \bar{r}, n$ der zweiten Grundform gemäß* (II 6) *gebildet und erfüllen $r, \bar{r}, n$ die Gauß-Codazzischen Gln.* (II 2), *so befriedigen u, v das quasilineare System* (II 13).

Die Gln. (II 13) sind aber dem Codazzischen System äquivalent, es gilt nämlich der

Satz 2. *Sind $u(x^i)$, $v(x^i)$ in einem gewissen Gebiet D der x^1, x^2-Ebene stetig differenzierbare Funktionen der Variabeln x^1, x^2 und Lösungen von* (II 13) *und gilt dort $v > 0$, so genügen die durch* (II 7) *aus u, v abgeleiteten Funktionen $r, \bar{r}, n$ den Gauß-Codazzischen Gleichungen.*

Zum Beweise definieren wir die Funktionen $r, \bar{r}, n$ durch

$$r \equiv k\,\frac{u^2 + v^2}{v}, \qquad n \equiv k\,\frac{u}{v}, \qquad \bar{r} \equiv k\,\frac{1}{v}.$$

Damit lassen sich F und G auch in der Form

$$F = \frac{k_2 - q\,k}{k\,\bar{r}}\, v + \frac{\bar{q}\, r + q\, n}{k\,\bar{r}}\, u + \frac{q\,\bar{r} + \bar{q}\, n}{k\,\bar{r}},$$

$$G = -\frac{k_2 - q\,k}{k\,\bar{r}}\, u + \frac{\bar{q}\, r + q\, n}{k\,\bar{r}}\, v + \frac{k_1 - \bar{q}\,k}{k\,\bar{r}}$$

schreiben. Multiplikation von (II 13_2) mit

$$[\varphi^1 \varphi^2] = k^2 \cdot \frac{1}{v}\,[\omega^1 \omega^2] = k\,\bar{r}\,[\omega^1 \omega^2]$$

liefert die Beziehung

$$\text{(II 14)} \quad \begin{cases} (\nabla_2 u + \nabla_1 v)\,[\varphi^1 \varphi^2] \\ = -\,u\,(k_2 - q\,k)\,[\omega^1 \omega^2] + v\,(\bar{q}\, r + q\, n)\,[\omega^1 \omega^2] + (k_1 - \bar{q}\,k)\,[\omega^1 \omega^2]. \end{cases}$$

Die linke Seite kann partiell integriert werden:

$$(\nabla_2 u + \nabla_1 v)\,[\varphi^1 \varphi^2] = d(-u\,\varphi^1 + v\,\varphi^2) + u\,d\varphi^1 - v\,d\varphi^2.$$

Da nun $-u\varphi^1+v\varphi^2=k\omega^2$ ist, so ergibt sich

$$d(-u\varphi^1+v\varphi^2)=(k_1-\bar{q}\,k)\,[\omega^1\omega^2].$$

Zusammen mit $\varphi^1=k\omega^1$, d.h. $d\varphi^1=-(k_2-q\,k)\,[\omega^1\omega^2]$ ist demnach

$$d(-u\varphi^1+v\varphi^2)+u\,d\varphi^1-v\,d\varphi^2$$
$$=(k_1-\bar{q}\,k)\,[\omega^1\omega^2]-u(k_2-q\,k)\,[\omega^1\omega^2]-v\,d\varphi^2,$$

und (II 14) geht in

$$-v\,d\varphi^2=v(\bar{q}\,r+q\,n)\,[\omega^1\omega^2]$$

über. Nach Voraussetzung ist $v>0$. Damit haben wir die Gültigkeit von

$$d\varphi^2=d(n\omega^1+\bar{r}\,\omega^2)=(\bar{q}\,r+q\,n)\,[\omega^2\omega^1],$$

d.h. der einen Codazzischen Gleichung gezeigt. Ähnlich beweist sich auch die Differentialgleichung

$$d(r\omega^1+n\omega^2)=(q\,\bar{r}+\bar{q}\,n)\,[\omega^1\omega^2].$$

Da schließlich nach (II 8) stets

$$r\bar{r}-n^2=k^2=K$$

erfüllt ist, besteht (II 2). Damit ist alles bewiesen.

III. Integralrelationen für Lösungen des Codazzischen Systems.

Ohne jetzt zu berücksichtigen, daß die Differentialgleichungen (II 13) aus den Gauß-Codazzischen Gleichungen hervorgegangen und diesen äquivalent sind, wollen wir das System (II 13) näher untersuchen. Und zwar soll gezeigt werden, in welcher Weise sich für Lösungen der Differentialgleichungen besonders einfache Integralrelationen gewinnen lassen.

Wir gehen so vor: Mit den nach (II 11) erklärten Formen φ^1, φ^2 und zwei vorläufig willkürlichen, nach ihren vier Argumenten u, v, x^1, x^2 stetig differenzierbaren Funktionen $A(u, v; x^i)$ und $B(u, v; x^i)$ setzen wir

(III 1) $$\vartheta=B\varphi^1+A\varphi^2$$

und wenden auf diese Differentialform den Gaußschen Integralsatz für einen Bereich $\overline{T}+\overline{S}$ an:

(III 2) $$\oint_{\overline{S}}\vartheta=\iint_{\overline{T}}d\vartheta.$$

Von den auftretenden Funktionen $u(x^i)$ und $v(x^i)$ fordern wir zunächst nur stetige Differenzierbarkeit und

(III 3) $$v>0 \quad \text{in} \quad \overline{T}+\overline{S}.$$

Indem mit ∇_1 und ∇_2 wieder die Ableitungen (II 10) bezeichnet werden, läßt sich für $d\vartheta$ auch

(III 4) $$d\vartheta=(\nabla_1 A-\nabla_2 B)\,[\varphi^1\varphi^2]+B\,d\varphi^1+A\,d\varphi^2$$

schreiben. Nach (II 7) und (II 4) gilt für die Differentiale der Formen φ^1, φ^2:

$$\text{(III 5)} \quad \begin{cases} d\varphi^1 = -(k_2 - q\,k)\,[\omega^1\omega^2] = -\frac{k_2 - q\,k}{k^2}\,v\,[\varphi^1\varphi^2] \\ d\varphi^2 = -(\bar{q}\,r + q\,n)\,[\omega^1\omega^2] = -\frac{1}{k}\,\{\bar{q}\,(u^2+v^2) + q\,u\}\,[\varphi^1\varphi^2]. \end{cases}$$

Deshalb geht (III 4) mit den Abkürzungen

$$\text{(III 6)} \qquad p = -\frac{k_2 - q\,k}{k^2}\,v, \quad \overline{p} = +\frac{1}{k}\,\{\bar{q}\,(u^2+v^2) + q\,u\}$$

nunmehr in

$$d\vartheta = (\nabla_1 A - \nabla_2 B + p\,B - \overline{p}\,A)\,[\varphi^1\varphi^2]$$

über. Schließlich gilt noch

$$\nabla_1 A = A_u \nabla_1 u + A_v \nabla_1 v + A_{x^i} \nabla_1 x^i,$$
$$\nabla_2 B = B_u \nabla_2 u + B_v \nabla_2 v + B_{x^i} \nabla_2 x^i.$$

Die Beziehung (III 2) lautet also ausgeschrieben

$$\text{(III 7)} \quad \begin{cases} \oint\limits_S B\varphi^1 + A\varphi^2 \\ \qquad = \iint\limits_T \{A_u \nabla_1 u + A_v \nabla_1 v - B_u \nabla_2 u - B_v \nabla_2 v\}\,[\varphi^1\varphi^2] + \\ \qquad\quad + \iint\limits_T \{A_{x^i} \nabla_1 x^i - B_{x^i} \nabla_2 x^i - \overline{p}\,A + p\,B\}\,[\varphi^1\varphi^2]. \end{cases}$$

Eine solche Gleichung wollen wir Integralrelation nennen. Jedes Funktionenpaar $A(u, v; x^i)$, $B(u, v; x^i)$ führt auf eine Integralrelation.

Werden die in (III 7) eingehenden Funktionen $u(x^i)$, $v(x^i)$ auf Lösungen der Differentialgleichungen (II 13) beschränkt, so läßt sich sofort eine besonders einfache Klasse von Integralrelationen aussondern. Genügen nämlich die Hilfsfunktionen A und B in ihrer Abhängigkeit von u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\text{(III 8)} \qquad A_u = B_v, \quad A_v = -B_u,$$

so wird bei Bestehen von (II 13)

$$A_u \nabla_1 u + A_v \nabla_1 v - B_u \nabla_2 u - B_v \nabla_2 v$$
$$= A_u(\nabla_1 u - \nabla_2 v) + A_v(\nabla_2 u + \nabla_1 v) = F A_u + G A_v.$$

Damit geht (III 7) in

$$\text{(III 9)} \quad \begin{cases} \oint\limits_S B\varphi^1 + A\varphi^2 \\ \qquad = \iint\limits_T \{F A_u + G A_v + A_{x^i} \nabla_1 x^i - B_{x^i} \nabla_2 x^i - \overline{p}\,A + p\,B\}\,[\varphi^1\varphi^2] \end{cases}$$

über.

Satz 3. *Genügen die in* (III 1) *eingeführten Hilfsfunktionen A und B in ihrer Abhängigkeit von u, v den Cauchy-Riemannschen Gleichungen und sind $u(x^i)$ $v(x^i)$ Lösungen der Codazzischen Gln.* (II 13), *so treten in der zugehörigen Integralrelation keine Ableitungen von u und v auf.*

Die Differentialgleichungen (III 8) sind aber auch in gewissem Sinne notwendig für das Fehlen der Ableitungen von u und v. Zunächst definieren wir: Die Integralrelation (III 7) heißt frei von Ableitungen der gesuchten Funktionen u, v, wenn sich der Integrand des Flächenintegrales in jedem Punkt $\mathring{x}^i \in \overline{T}$ allein durch die Werte $\mathring{u}$ und $\mathring{v}$ bestimmt, welche ein beliebiges in dem Bereich $\overline{T}+\overline{S}$ stetig differenzierbares Lösungspaar u, v der Gln. (II 13) in $\mathring{x}^i$ annimmt.

Dann gilt der folgende Satz:

Satz 4. *Es seien* $A(u, v; x^i)$, $B(u, v; x^i)$ *fest gewählt und als Funktionen von* u, v *und* x^i *für alle* u, v *mit* $v>0$ *und alle* x^i *aus einem gewissen Gebiet* T *stetig differenzierbar.* $\overline{T}$ *sei weiter ein beliebiges ganz in* T *enthaltenes Gebiet und* $\overline{S}$ *seine (glatte) Randkurve. Betrachtet werden die Integralrelationen* (III 7), *angeschrieben für alle möglichen in* $\overline{T}+\overline{S}$ *stetig differenzierbaren Lösungen* $u(x^i)$, $v(x^i)$ *von* (II 13) *mit* $v>0$. *Ist dann jede Integralrelation aus der so erklärten Gesamtheit frei von Ableitungen der gesuchten Funktionen* u *und* v, *so müssen* A *und* B *für alle* u, v *mit* $v>0$ *und alle* $x^i \in T$ *den Cauchy-Riemannschen Gln.* (III 8) *genügen.*

Der Beweis läßt sich folgendermaßen führen: Wir nehmen an, für einen Punkt $\mathring{u}, \mathring{v}, \mathring{x}^i$ des vierdimensionalen Gebietes

$$v>0, \quad x^i \in T$$

sei

$$A_u - B_v = C_1, \quad A_v + B_u = C_2 \tag{III 10}$$

und die zwei Konstanten C_1 und C_2 verschwinden nicht beide:

$$C_1^2 + C_2^2 > 0. \tag{III 10'}$$

Wir werden zeigen, daß dann unter der Gesamtheit der zugelassenen Integralrelationen solche existieren, die nicht frei von Ableitungen der gesuchten Funktionen sind. Damit ist der Widerspruch geführt und die obige Aussage bewiesen.

Vorerst formen wir (III 7) unter Verwendung von (II 13) bzw.

$$\nabla_1 u = \nabla_2 v + F(u, v; x^i), \quad \nabla_1 v = -\nabla_2 u + G(u, v; x^i)$$

um:

$$\left\{\begin{aligned} &\oint_S B\varphi^1 + A\varphi^2 \\ &= \iint_{\overline{T}} \{(A_u - B_v)\nabla_2 v - (A_v + B_u)\nabla_2 u\}[\varphi^1 \varphi^2] + \\ &\quad + \iint_{\overline{T}} \{F A_u + G A_v + A_{x^i}\nabla_1 x^i - B_{x^i}\nabla_2 x^i - p A + p B\}[\varphi^1 \varphi^2]. \end{aligned}\right. \tag{III 11}$$

Da in dem zweiten Doppelintegral nur u, v und x^i auftreten, brauchen wir lediglich das erste zu untersuchen. Der Integrand lautet

$$I[\omega^1 \omega^2] \equiv k^2 \frac{1}{v}\{(A_u - B_v)\nabla_2 v - (A_v + B_u)\nabla_2 u\}[\omega^1 \omega^2]. \tag{III 12}$$

Für $x^i = \mathring{x}^i$, $u = \mathring{u}$, $v = \mathring{v}$ wird

$$\text{(III 13)} \qquad \mathring{I} = k^2(\mathring{x}^i)\,\frac{1}{\mathring{v}}\,\{C_1 \nabla_2 v - C_2 \nabla_2 u\}.$$

Können wir eine Lösung $u(x^i)$, $v(x^i)$ von (II 13) finden, die in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{U}$ von $x^i = \mathring{x}^i$ stetig differenzierbar ist, für $x^i = \mathring{x}^i$ die Werte $\mathring{u}$, $\mathring{v}$ annimmt und für welche $\nabla_2 u$ und $\nabla_2 v$ willkürlich vorschreibbare Werte λ und μ in diesem Punkt besitzen, so sind wir fertig. Wir bilden nämlich für einen ganz in $\mathfrak{U}$ enthaltenen Bereich $\overline{T} + \overline{S}$ mit den so gewonnenen Lösungen $u(x^i)$, $v(x^i)$ die Integralrelation (III 11). Der Integrand lautet dann im Punkte $\mathring{x}^i$:

$$\text{(III 14)} \qquad \mathring{I} = k^2(\mathring{x}^i)\,\frac{1}{\mathring{v}}\,\{C_1 \mu - C_2 \lambda\}$$

und variiert mit λ und μ.

Die Existenz von Lösungen u, v der Differentialgleichungen (II 13) mit den verlangten Eigenschaften folgt unschwer aus dem allgemeinen Existenzsatz von Cauchy-Kowalewski für partielle Differentialgleichungen (vgl. GOURSAT [2], S. 9). Die Gln. (II 13) können wir unter Verwendung der Pfaffschen Ableitungen bezüglich der (nur von x^1, x^2 abhängigen) Formen ω^1 und ω^2 auch

$$\text{(III 15)} \qquad \begin{cases} u_1 - u\,u_2 - v\,v_2 = k\,F(u, v;\, x^i) \\ v_1 - u\,v_2 + v\,u_2 = k\,G(u, v;\, x^i) \end{cases}$$

schreiben. Nun seien $\alpha(x^i)$ und $\beta(x^i)$ integrierende Faktoren der Formen ω^1 und ω^2. Dann existieren zwei Funktionen $\xi(x^i)$, $\eta(x^i)$ mit

$$\text{(III 16)} \qquad d\xi = \alpha\,\omega^1, \qquad d\eta = \beta\,\omega^2.$$

$\xi(x^i)$ und $\eta(x^i)$ sind unabhängige Funktionen:

$$\text{(III 17)} \qquad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x^1, x^2)} \neq 0$$

und lassen sich als unabhängige Variable in (III 15) an Stelle von x^1, x^2 einführen. Da aus (III 16) noch

$$\text{(III 18)} \qquad h_1 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial h}{\partial \xi}, \qquad h_2 = \frac{1}{\beta}\,\frac{\partial h}{\partial \eta}$$

für jede stetig differenzierbare Funktion h folgt, erhalten wir für (III 15):

$$\text{(III 19)} \qquad \begin{cases} u_\xi = \dfrac{\alpha}{\beta}\,(u\,u_\eta + v\,v_\eta) + k\,\alpha\,F\,(u, v;\, x^i(\xi, \eta)) \\ v_\xi = \dfrac{\alpha}{\beta}\,(-v\,u_\eta + u\,v_\eta) + k\,\alpha\,G\,(u, v;\, x^i(\xi, \eta)). \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind ξ, η die unabhängigen Veränderlichen. Nach unseren Voraussetzungen sind die Koeffizienten der Formen ω^1 und ω^2 analytische Funktionen von x^1, x^2. Daraus und aus (II 12) folgt unmittelbar die Analytizität der rechten Seiten von (III 19) in den vier Argumenten

u, v, ξ, η. Nach dem Satz von Cauchy-Kowalewski existiert demnach eine in einer Umgebung $\mathfrak{U}$: $(\xi - \mathring{\xi})^2 + (\eta - \mathring{\eta})^2 \leq \delta^2$ des Punktes

$$\mathring{\xi} = \xi(\mathring{x}^i), \qquad \mathring{\eta} = \eta(\mathring{x}^i)$$

analytische Lösung $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, die auf der Kurve

$$\xi = \mathring{\xi}$$

vorgegebene reguläre Werte $u = u(\eta)$, $v = v(\eta)$ besitzt. Die Funktionen $u(\eta)$, $v(\eta)$ seien so gewählt, daß sie für $\eta = \mathring{\eta}$ die Werte $\mathring{u}$, $\mathring{v}$ annehmen. Die Kurve $\xi = \mathring{\xi}$ ist in der x^1, x^2-Ebene die durch den Punkt $\mathring{x}^i$ gehende Integralkurve der Differentialgleichung $\omega^1 = 0$. Da die Funktionen $u(\eta)$, $v(\eta)$ willkürlich sind, lassen sich insonderheit $u'(\eta = \mathring{\eta})$, $v'(\eta = \mathring{\eta})$ und damit auch

$$\nabla_2 u|_{\mathring{x}^i} = \frac{1}{k(\mathring{x}^i)} \frac{1}{\beta(\mathring{x}^i)} \mathring{v} \cdot u'(\mathring{\eta})$$

$$\nabla_2 v|_{\mathring{x}^i} = \frac{1}{k(\mathring{x}^i)} \frac{1}{\beta(\mathring{x}^i)} \mathring{v} \cdot v'(\mathring{\eta})$$

beliebig wählen. Das war zum Beweis des Satzes noch zu zeigen.

IV. Untersuchung der Randbedingungen.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Forderung (B) zu. Dazu müssen wir die bei den nach (A) zugelassenen Integralrelationen auftretenden Randintegrale betrachten. Nach Satz 4 haben diese die Gestalt

$$\text{(IV 1)} \qquad \oint \vartheta \quad \text{mit} \quad \vartheta = B\varphi^1 + A\varphi^2,$$

wobei A, B bezüglich u, v konjugierte Potentialfunktionen sind. Zunächst empfiehlt es sich, von A, B zu einem neuen Paar konjugierter Potentialfunktionen $\overline{A}, \overline{B}$ durch die auf dem Rande S eines einfach zusammenhängenden Gebietes T umkehrbar eindeutige Transformation

$$\text{(IV 2)} \qquad \begin{cases} A = (u\cos\gamma + \sin\gamma)\overline{A} - v\cos\gamma\,\overline{B} \\ B = v\cos\gamma\,\overline{A} + (u\cos\gamma + \sin\gamma)\overline{B} \end{cases}$$

überzugehen. Dabei soll γ den Winkel der Tangentenrichtung von S mit der Richtung $\omega^2 = 0$ angeben. γ bestimmt sich also aus

$$\text{(IV 3)} \qquad \omega^1 = \cos\gamma\, ds, \quad \omega^2 = \sin\gamma\, ds \quad \text{auf } S.$$

Mit den Werten für φ^1, φ^2 (II 11) sowie für ω^1, ω^2 (IV 3) ergibt sich

$$\text{(IV 4)} \qquad \vartheta = k\left\{\frac{u^2 + v^2}{v}\cos^2\gamma + 2\frac{u}{v}\sin\gamma\cos\gamma + \frac{1}{v}\sin^2\gamma\right\}\overline{A}\, ds.$$

Bei Einführen von $r, \bar{r}, n$ nach (II 7) können wir für den in geschweiften Klammern stehenden Ausdruck auch

$$r\cos^2\gamma + 2n\sin\gamma\cos\gamma + \bar{r}\sin^2\gamma$$

schreiben und erkennen daraus, daß er mit der Normalkrümmung b des von dem gesuchten Flächenstück bestimmten Randstreifens übereinstimmt [vgl. (I 7) und (IV 3)]. Damit haben wir

$$\vartheta = b \cdot \overline{A}(u, v; s)\, ds$$

bzw. mit der Bezeichnung $\vartheta = M\, ds$ der Einleitung:

$$M = b\overline{A}(u, v; s). \tag{IV 5}$$

Mit der Transformation (IV 2) ist erreicht, daß bei M nur noch eine willkürliche Funktion $\overline{A}$ auftritt, die nur an die Potentialgleichung gebunden ist:

$$\overline{A}_{uu} + \overline{A}_{vv} = 0. \tag{IV 6}$$

Das Auftreten der Funktionen u, v in den Argumenten von $\overline{A}$ ist störend, da sie keine unmittelbare geometrische Hedeutung besitzen. Wir werden versuchen, sie durch die geodätische Windung a und die Normalkrümmung b des Randstreifens zu ersetzen. Mit den Koeffizienten $r, \bar{r}, n$ der zweiten Grundform wird

$$a = -r\sin\gamma\cos\gamma + n(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) + \bar{r}\sin\gamma\cos\gamma,$$

und damit bestimmen sich a, b wegen (II 7) gemäß

$$\begin{cases} a = k\,\frac{1}{v}\{-(u^2+v^2)\sin\gamma\cos\gamma + u(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) + \sin\gamma\cos\gamma\} \\ b = k\,\frac{1}{v}\{(u^2+v^2)\cos^2\gamma + 2u\sin\gamma\cos\gamma + \sin^2\gamma\} \end{cases} \tag{IV 7}$$

als Funktionen von u, v. Daraus folgt, daß

$$U = \frac{k}{b}, \qquad V = \frac{a}{b} \tag{IV 8}$$

als Funktionen von u, v konjugierte Potentialfunktionen sind und daß

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} \neq 0 \tag{IV 9}$$

gilt, wie sich durch direkte Rechnung bestätigen läßt. Längs des Randes können wir also für u, v auch diese neuen Größen einführen. Setzen wir

$$\overline{A}(u, v; s) \equiv F(U, V; s), \tag{IV 10}$$

so genügt F wieder der Potentialgleichung

$$F_{UU} + F_{VV} = 0, \tag{IV 11}$$

falls (IV 6) besteht, und die letztere folgt auch aus der Gültigkeit von (IV 11). Jetzt ist

$$M = b \cdot F\left(\frac{k}{b}, \frac{a}{b}; s\right) \tag{IV 12}$$

zu setzen.

Um nun alle der Forderung (B) genügenden Randbedingungen zu finden, gehen wir so vor: Gleichwertig mit

$$\frac{\partial(M, \Pi)}{\partial(u, v)} = 0 \tag{B}$$

ist die folgende Beziehung

$$M = \Phi(\Pi; s), \tag{IV 13}$$

wobei $\Phi(t, s)$ eine willkürliche Funktion der zwei Argumente t und s ist. Indem wir nun die Randbedingung

$$\Pi(u, v; s) = \pi(s) \qquad [\text{vgl. (1)}]$$

und (IV 12) in (IV 13) einführen, erhalten wir endgültig die andbedingung in der Gestalt

$$b \cdot F\left(\frac{k}{b}, \frac{a}{b}; s\right) = f(s) = \Phi(\pi(s); s). \tag{IV 14}$$

Satz 5. *Vorgegeben sei für die Gauß-Codazzischen Gleichungen auf dem Rande eines einfach zusammenhängenden Gebietes der x^1, x^2-Ebene eine Randbedingung*

$$\Pi(u, v; s) = \pi(s).$$

Sollen Integralrelationen mit den Eigenschaften

A. sie sind frei von den Ableitungen der gesuchten Funktionen,

B. der Integrand des Randintegrales ist vermöge der Randbedingung eine bekannte Funktion der Bogenlänge

existieren, so besitzt die Randbedingung die Gestalt (IV 14). *Dabei sind a bzw. b geodätische Windung bzw. Normalkrümmung des Randes des gesuchten Flächenstückes. Die Funktion F genügt der Potentialgleichung.*

Mit diesem Satz haben wir das gewünschte Ergebnis. Wir erhalten also eine derartige Randbedingung, indem wir in (IV 14) für F eine Potentialfunktion wählen und k/b bzw. a/b für die Argumente U, V setzen. Der einfachste Fall einer Potentialfunktion ist eine lineare Funktion

$$F = \alpha + \gamma U + \beta V,$$

wobei α, β, γ beliebige Funktionen der Bogenlänge s sein dürfen. Führen wir a, b ein, so wird

$$F = \alpha + \gamma \frac{k}{b} + \beta \frac{a}{b}$$

und damit geht (IV 14) über in

$$\alpha(s)\, b + \beta(s)\, a + k\gamma(s) = f(s). \tag{IV 15}$$

Satz 6. *Zur Klasse der zugelassenen Randbedingungen gehören speziell solche, bei denen zwischen Normalkrümmung und geodätischer Windung eine lineare Beziehung besteht.*

Literatur.

[1] BLASCHKE, W.: Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin 1950. — [2] GOURSAT, E.: Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig 1893. — [3] HARTMANN, P., and A. WINTNER: On the embedding problem in differential geometry. Amer. J. Math. **72**, 553—564 (1950). — [4] JANET, M.: Sur la possibilite de plonger une espace de riemann donne dans une espace euclidien. Ann. Soc. Pol. Math. **5**, 38—43 (1927). — [5] NITSCHE, JOACHIM: Bestimmung der Flächen, deren Bogenelement negativer Krümmung als Quadratsumme zweier Pfaffscher Formen gegeben ist. Arch. Math. **3**, 50—59 (1952). — [6] NITSCHE, JOACHIM: Beiträge zum Randwertproblem quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme. Math. Nachr. **7**, 35—54 (1952).

Berlin-Dahlem, Hüttenweg 11.

(Eingegangen am 17. April 1954.)

VELTE, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 367—383 (1954)

Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale.

Von

WALDEMAR VELTE.

Bekanntlich gibt es bei mehrfachen Variationsintegralen in gewöhnlicher Form eine ganze Schar von Theorien, die sich durch Verwendung verschiedener unabhängiger Integrale unterscheiden, und die zu verschiedenen hinreichenden Legendreschen Bedingungen bzw. $\mathcal{E}$-Funktionen führen (vgl. [12], [3]). Insbesondere sind in dieser Schar von Theorien die De Donder-Weylsche und die Carathéodorysche als Sonderfälle enthalten (vgl. [16], [6], [2], [10]). Die erste hat den Vorzug, daß sie sehr einfache (lineare) Formeln liefert, während man zwangsläufig auf die Carathéodorysche „Determinantenmethode" geführt wird, wenn man nach einer Theorie sucht, die auch auf Probleme mit beweglichem Rand anwendbar ist (vgl. [3], [4]).

Es scheint, daß analoge Untersuchungen für Variationsintegrale in Parameterdarstellung bisher noch nicht angestellt worden sind. Auf die Anregung von H. BOERNER hin wird daher im folgenden eine Theorie von Variationsintegralen der Form $\int f(x_i, p_{i_1 \dots i_m})\, dt_1 \dots dt_m$ [die $p_{i_1 \dots i_m}$ sind die Richtungskoordinaten der Matrix $(\partial x_i/\partial t_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, n$; $m < n$] entwickelt, die über $\mathcal{E}$-Funktion, hinreichende Legendresche Bedingung, Hamilton-Jacobische Differentialgleichung bis zur Einbettung einer gegebenen Extremalen in ein geodätisches Feld führt. Sie stellt das Analogon zur Carathéodoryschen Theorie dar, ist also insbesondere auf Probleme mit beweglichem Rand anwendbar. Die Theorie in Parameterdarstellung wird besonders dadurch gerechtfertigt, daß sie einfacher und übersichtlicher ist als die analoge Theorie in gewöhnlicher Form, weil sie in den $p_{i_1 \dots i_m}$ linear wird.

Um $\mathcal{E}$-Funktion und Legendresche Bedingung herzuleiten, wird vom Kalkül der alternierenden Differentialformen Gebrauch gemacht. Für den Sonderfall $m = n - 1$ findet sich die Legendresche Bedingung schon bei RADON [14]. Die benutzte Legendresche Transformation reduziert sich für $m = 2$, $n = 3$ auf die von HAAR im Zusammenhang mit adjungierten Variationsproblemen verwendete Transformation ([9], [7]).

In einer früheren Arbeit [15], auf die kein Bezug genommen wird, wurde bereits der Sonderfall behandelt, in dem die partiellen Ableitungen von $f(x, p)$ nach $p_{i_1 \dots i_m}$ selbst wieder Komponenten eines m-Vektors sind, d.h. als Richtungskoordinaten einer Matrix gedeutet werden können. Allerdings waren die Ergebnisse insofern weniger allgemein, als von den „regulären Flächenelementen" dort mehr verlangt wurde als hier. Die Methode des Einbettungsbeweises ist von dort in wesentlich vereinfachter Form übernommen worden.

1. Im folgenden durchläuft der Index i stets die Werte $i=1, 2, \ldots, n$ $(2\leq n)$, der Index α die Werte $\alpha=1, 2, \ldots, m$ $(m<n)$. Wir betrachten dann im Raum der $n+\binom{n}{m}$ Variablen x_i und $p_{i_1\ldots i_m}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_m)$ eine Funktion $f(x_i, p_{i_1\ldots i_m})$, für die bisweilen auch kürzer $f(x, p)$ geschrieben wird. Sie soll nach allen Variablen so oft stetig differenzierbar sein wie es im folgenden benötigt wird. Ferner sei $f(x, p)$ positiv homogen erster Ordnung in den $p_{i_1\ldots i_m}$:

$$f(x, c\,p)=c\,f(x, p) \quad (\text{für } c>0). \tag{1.1}$$

Unter Benutzung der Abkürzungen $p_{(i)}=p_{i_1\ldots i_m}$ und $f_{(i)}=\dfrac{\partial f}{\partial p_{(i)}}$ erhält man aus (1.1) in bekannter Weise

$$f_{(i)}(x, c\,p)=f_{(i)}(x, p) \quad (\text{für } c>0) \tag{1.2}$$

$$f_{(i)}(x, p)\,p_{(i)}=f(x, p), \qquad f_{(i)(k)}\,p_{(k)}=0 \quad \text{bzw.} \quad \det(f_{(i)(k)})=0. \tag{1.3}$$

(Über doppelte Indizes ist zu summieren, also $f_{(i)}\,p_{(i)}=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m} f_{i_1\ldots i_m}\,p_{i_1\ldots i_m}$ usw.)

Das zu $f(x, p)$ gehörige Variationsproblem lautet

$$\int f(x_i, p_{(i)})\,dt_1\ldots dt_m=\text{extr.}, \tag{1.4}$$

wobei für $p_{(i)}$ die Grassmannschen Richtungskoordinaten der Matrix $(\partial x_i/\partial t_\alpha)$, d.h. die aus je m Zeilen gebildeten Determinanten einzusetzen sind. Wegen (1.1) ist das Variationsintegral invariant gegenüber Parametertransformationen mit positiver Funktionaldeterminante, und umgekehrt kann jedes gegenüber Parametertransformationen invariante Variationsintegral $\int' f\left(x_i, \dfrac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}\right)dt_1\ldots dt_m$ auch in der Form (1.4) mit (1.1) geschrieben werden (vgl. [8] oder [13]).

Es sei kurz an einige Eigenschaften der Richtungskoordinaten erinnert: Sie sind homogene Koordinaten, d.h. sie liegen unabhängig von der Wahl der Vektoren, die das betrachtete Flächenelement aufspannen, bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig fest. Allerdings sind sie, wenn $2\leq m\leq n-2$ ist, nicht unabhängig voneinander. Vielmehr genügen sie dann gewissen Gleichungen, die die Grassmannsche Mannigfaltigkeit oder den Grassmannschen Kegel definieren (vgl. etwa [1]):

$$p_{i_1 i_2 i_3\ldots i_m}\,p_{k_1 k_2 i_3\ldots i_m}-p_{k_1 i_2 i_3\ldots i_m}\,p_{i_1 k_2 i_3\ldots i_m}-p_{k_2 i_2 i_3\ldots i_m}\,p_{k_1 i_1 i_3\ldots i_m}=0 \tag{1.5}$$

$(i_\alpha, k_\beta=1, 2, \ldots, n)$. Als Determinanten sind die $p_{i_1\ldots i_m}$ natürlich schiefsymmetrisch in den Indizes. Gibt man sich umgekehrt schiefsymmetrische Größen $p_{i_1\ldots i_m}$ vor, die den Gln. (1.5) genügen, so läßt sich stets auch eine Matrix $(x_{i\alpha})$ angeben, deren Richtungskoordinaten sie sind. (Und zwar lassen sich die $x_{i\alpha}$ rational durch die $p_{i_1\ldots i_m}$ ausdrücken. Sind dann insbesondere die $p_{i_1\ldots i_m}$ k-mal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t, so gilt das gleiche von den $x_{i\alpha}$.)

Drückt man die Gln. (1.5) vermöge der schiefen Symmetrie der $p_{i_1 \dots i_m}$ allein durch die $p_{(i)}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ aus, und dividiert[1]) man sie dann noch durch $\sqrt{p_{(i)}\, p_{(i)}}$, so lassen sie sich, in irgendeiner Weise durchnumeriert, in der Gestalt

$$b_\varrho(p) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots) \tag{1.6}$$

schreiben, wobei die Funktionen $b_\varrho(p)$ positiv homogen erster Ordnung sind, also den Gleichungen

$$b_\varrho(p) = \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\, p_{(i)} \tag{1.7}$$

genügen.

Für das Variationsproblem interessieren die Werte von $f(x, p)$ also nur auf (1.6). Zwei Grundfunktionen $f(x, p)$ und $'f(x, p)$ (bzw. die zugehörigen Variationsintegrale) werden *kongruent* genannt, wenn man $f(x, p) = 'f(x, p)$ auf $b_\varrho(p) = 0$ hat. Es ist klar, daß kongruente Funktionen dasselbe Variationsproblem liefern.

Im allgemeinen sind die Funktionen $b_\varrho(p)$ nicht unabhängig voneinander, d.h. im allgemeinen ist ihre Anzahl größer als der Rang r der Matrix $(\partial b_\varrho / \partial p_{(i)})$. Wir werden daher bisweilen ein Teilsystem von r Funktionen $b_{\varrho'}(p)$ $(\varrho' = \varrho_1, \dots, \varrho_r)$ auswählen mit Rang $(\partial b_{\varrho'} / \partial p_{(i)}) = r$ an der betrachteten Stelle.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß die Extremalen von (1.4) in einer von der Wahl der Parameter unabhängigen Weise erklärt sind, nämlich durch das Verschwinden der ersten Variation bei einer beliebigen Schar von Vergleichsflächen $x_i = x_i(\tau, t_\alpha)$ mit gemeinsamem Rand, wobei die Funktion $I(\tau) = \int_G f\big(x(\tau, t_\alpha), p(\tau, t_\alpha)\big)\, dt_1 \dots dt_m$ und damit auch $dI/d\tau$ von der Wahl der Parameter t_α nicht abhängt. Im folgenden werden nur solche Extremalen betrachtet, die als zweimal differenzierbare Funktionen der Parameter gegeben sind und daher den Eulerschen Differentialgleichungen genügen:

$$f_{x_i} = \frac{\partial f_{x_{i\alpha}}}{\partial t_\alpha} \qquad \Big(\text{mit } f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_{i\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial x_{i\alpha}}\Big). \tag{1.8}$$

2. *Geodätische Felder. $\mathcal{E}$-Funktion.* Wir betrachten die Schar kongruenter Funktionen

$$f(x, p) + B(x, p). \tag{2.1}$$

Hier ist $B(x, p)$ eine beliebige Funktion mit $B(x, c\,p) = c\,B(x, p)$ (für $c > 0$) und

$$B(x, p) = 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0. \tag{2.2}$$

Es ist klar, daß jede zu $f(x, p)$ kongruente Funktion $'f(x, p)$ in der Form (2.1) geschrieben werden kann: Man braucht nur $B(x, p) = 'f(x, p) - f(x, p)$ zu setzen.

[1]) Der Punkt $p = 0$, d.h. die Spitze des Kegels, ist bei allen Betrachtungen ausgeschlossen.

Die Funktionen der Schar (2.1) sind natürlich wieder positiv homogen erster Ordnung in den $p_{(i)}$. Insbesondere hat man

$$f(x,p)+B(x,p)=\left(f_{(i)}(x,p)+B_{(i)}(x,p)\right)p_{(i)}. \tag{2.3}$$

Wir betrachten nun über dem Raum der $n+\binom{n}{m}$ Variablen x_i und $p_{(i)}$ die äußere Differentialform

$$\Omega=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m}\left(f_{i_1\ldots i_m}(x,p)+B_{i_1\ldots i_m}(x,p)\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}. \tag{2.4}$$

Ferner sei $(x,\pi(x))$ ein Feld von m-dimensionalen Flächenelementen, wobei die (x) in einem gewissen Gebiet des Raumes der x_i als stetig differenzierbare Funktionen erklärt sind. Trägt man $p=\pi(x)$ in (2.4) ein, so geht Ω über in eine Form $[\Omega]$, die über dem Raum der x_i erklärt ist:

$$[\Omega]=[f_{(i)}+B_{(i)}]\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}=\left(f_{(i)}(x,\pi(x))+B_{(i)}(x,\pi(x))\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}. \tag{2.5}$$

Definition. Das Feld $(x,\pi(x))$ heißt *geodätisch* bezüglich $f(x,p)+B(x,p)$, wenn $d[\Omega]=0$ ist.

Ist V eine $(m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die ganz im geodätischen Feld gelegen ist, und ist R ihr m-dimensionaler Rand, so ist nach dem Stokesschen Satz

$$\int_R[\Omega]=\pm\int_V d[\Omega]=0.$$

(Auf das Vorzeichen, d.h. die Orientierung kommt es hier nicht an.) Daraus folgt also, daß $\int[\Omega]$ vom Wege unabhängig ist, d.h. wenn $\bar{E}$ und E zwei Flächen mit gemeinsamem Rand sind, die beide im geodätischen Feld verlaufen, so ist

$$\int_{\bar{E}}[\Omega]=\int_E[\Omega] \tag{2.6}$$

oder, bei Benutzung von Parametern,

$$\int_{\bar{E}}[f_{(i)}+B_{(i)}]\,p_{(i)}\,dt_1\ldots dt_m\int_E=[f_{(i)}+B_{(i)}]\,p_{(i)}\,dt_1\ldots dt_m.$$

Es sei nun E in das geodätische Feld eingebettet, d.h. die an E tangentialen Flächenelemente seien zugleich Flächenelemente des Feldes. Dann ist

$$I_E=\int_E\left(f(x,p)+B(x,p)\right)dt_1\ldots dt_m=\int_E[f_{(i)}+B_{(i)}]\,p_{(i)}\,dt_1\ldots dt_m.$$

Daraus folgt

$$I_{\bar{E}}-I_E=\int_{\bar{E}}\left(f(x,p)+B(x,p)\right)dt_1\ldots dt_m-\int_{\bar{E}}[f_{(i)}+B_{(i)}]\,dt_1\ldots dt_m=\int_E\mathcal{E}\,dt_1\ldots dt_m$$

mit

$$\mathcal{E}(x,\bar{p},\pi)=f(x,\bar{p})+B(x,\bar{p})-\left(f_{(i)}(x,\pi(x))+B_{(i)}(x,\pi(x))\right)\bar{p}_{(i)}, \tag{2.7}$$

wobei $\mathcal{E}(x,\bar{p},\pi)$ nichts anderes ist als die *Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion*. Das ergibt unmittelbar

Satz 2.1. *Hinreichend für ein starkes Minimum ist, daß man das betrachtete Flächenstück in ein geodätisches Feld einbetten kann und daß außerdem die zugehörige $\mathcal{E}$-Funktion für $b_\varrho(\bar{p})=0$ nichtnegativ ist. (Von den Vergleichsflächen wird nur verlangt, daß sie im Feld verlaufen.)*

3. *Legendresche Bedingung.* Um zu hinreichenden Bedingungen für ein schwaches Minimum zu gelangen, verfährt man wie üblich: Taylor-Entwicklung von $f(x,\bar{p})+B(x,\bar{p})$ an der Stelle π liefert für die $\mathcal{E}$-Funktion

$$(3.1)\quad \begin{cases} \mathcal{E}(x,\bar{p},\pi)=f(x,\bar{p})+B(x,\bar{p})-f(x,\pi)-B(x,\pi)-[f_{(i)}+B_{(i)}](\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)}) \\ \qquad\qquad =\tfrac{1}{2}\{\tilde{f}_{(i)(k)}+\tilde{B}_{(i)(k)}\}(\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)})(\bar{p}_{(k)}-\pi_{(k)}), \end{cases}$$

und die Bedingungen $b_\varrho(\bar{p})=b_\varrho(\pi)=0$ lassen sich in der Form

$$(3.2)\qquad \frac{\partial\tilde{b}_\varrho}{\partial p_{(i)}}(\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)})=0$$

schreiben. (Hierbei bezeichnet $\sim$ ganz allgemein eine Mittelwertbildung.) Dies führt zur Betrachtung der Schar quadratischer Formen

$$(3.3)\qquad Q(B)=\{f_{(i)(k)}(x,p)+B_{(i)(k)}(x,p)\}\,\xi_{(i)}\xi_{(k)}$$

mit den Nebenbedingungen

$$(3.4)\qquad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=0.$$

Diese quadratischen Formen sind auch unter den Nebenbedingungen (3.4) niemals definit, denn man braucht nur $\xi_{(i)}=p_{(i)}$ mit $b_\varrho(p)=0$ zu setzen, um einmal $\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=b_\varrho(p)=0$ d.h. (3.4) zu erfüllen und zum anderen wegen der Homogenität der Funktion $f(x,p)+B(x,p)$ in den $p_{(i)}$ auch

$$\{f_{(i)(k)}(x,p)+B_{(i)(k)}(x,p)\}\,p_{(i)}p_{(k)}=0$$

zu haben.

Definition. Ein Flächenelement (x,p) heißt *positiv (negativ) regulär* bezüglich $f(x,p)+B(x,p)$, wenn die zugehörige quadratische Form (3.3) unter den Nebenbedingungen (3.4) und der zusätzlichen Bedingung

$$(3.5)\qquad p_{(i)}\xi_{(i)}=0$$

positiv (negativ) definit ist.

Satz 3.1. *Hinreichend für ein schwaches Minimum ist, daß man das betrachtete Flächenstück in ein geodätisches Feld einbetten kann und daß außerdem alle Flächenelemente des Flächenstückes positiv regulär sind, d.h. daß die zugehörige Legendresche Bedingung*

$$Q(B)=\{f_{(i)(k)}+B_{(i)(k)}\}\xi_{(i)}\xi_{(k)}>0 \quad \textit{für} \quad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=p_{(i)}\xi_{(i)}=0$$

erfüllt ist.

Beweis. Es sei $f+B$ diejenige Grundfunktion, bezüglich deren das geodätische Feld konstruiert wurde. Wir setzen $'f=f+B$, lassen aber den

Strich im folgenden der Einfachheit halber fort. Die $\mathcal{E}$-Funktion hat dann die Gestalt

$$(3.6)\qquad \mathcal{E}(x,\bar{p},\pi)=f(x,\bar{p})-f_{(i)}(x,\pi)\,\bar{p}_{(i)}=\tfrac{1}{2}\tilde{f}_{(i)(k)}(\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)})(\bar{p}_{(k)}-\pi_{(k)}).$$

Nun ist aber die $\mathcal{E}$-Funktion positiv homogen erster bzw. nullter Ordnung in $\bar{p}$ bzw. π. Wenn man lediglich das Vorzeichen von $\mathcal{E}$ feststellen will, darf man sich daher auf solche $\bar{p},\pi$ beschränken, die mittels $\sum\bar{p}_{(i)}^2=\sum\pi_{(i)}^2=1$ normiert sind, d.h. es genügt, (3.6) unter den Nebenbedingungen

$$b_\varrho(\bar{p})=b_\varrho(\pi)=0,\qquad \text{bzw.}\qquad \sum\bar{p}_{(i)}^2-1=\sum\pi_{(i)}^2-1=0$$

oder

$$(3.7)\qquad \frac{\partial\tilde{b}_\varrho}{\partial p_{(i)}}(\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)})=0,\qquad \tilde{p}_{(i)}(\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)})=0$$

zu betrachten. Alles übrige folgt nun wie üblich aus einem Satz über quadratische Formen mit linearen Nebenbedingungen, den man z. B. bei CARATHÉODORY[2]) findet:

Das Minimum der quadratischen Form

$$Q=f_{(i)(k)}\xi_{(i)}\xi_{(k)}\qquad \text{mit den Bedingungen}\qquad \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=p_{(i)}\xi_{(i)}=0$$

auf der Punktmenge $\xi_{(i)}\xi_{(i)}=1$ ist gleich der kleinsten Wurzel λ_1 der charakteristischen Gleichung

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} f_{(i)(k)}-\lambda\delta_{(i)(k)} & \dfrac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(i)}} & p_{(i)} \\ \dfrac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(k)}} & 0 & \\ p_{(k)} & & \end{vmatrix}=0.$$

(Alle Wurzeln sind reell.)

Für ein positiv reguläres Flächenelement (x^0,π^0) sind daher alle Wurzeln λ_i positiv. Und da die Wurzeln stetige Funktionen von $f_{(i)(k)}$, $\dfrac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}}$ und $p_{(i)}$ sind, sind auch die Wurzeln $\tilde{\lambda}_i$ von

$$\tilde{D}(\lambda)=\begin{vmatrix} \tilde{f}_{(i)(k)}-\lambda\delta_{(i)(k)} & \dfrac{\partial\tilde{b}_{\sigma'}}{\partial p_{(i)}} & \tilde{p}_{(i)} \\ \dfrac{\partial\tilde{b}_{\varrho'}}{\partial p_{(k)}} & 0 & \\ \tilde{p}_{(k)} & & \end{vmatrix}=0$$

alle positiv, sofern sich die $\tilde{f}_{(i)(k)}$, $\dfrac{\partial\tilde{b}_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}}$ und $\tilde{p}_{(i)}$ nur genügend wenig von $f_{(i)(k)}(x^0,\pi^0)$ usw. unterscheiden. Und dies ist gewiß der Fall für die Flächenelemente $(x,\bar{p})$ einer gewissen Umgebung $|x_i-x_i^0|<\varepsilon$, $|\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)}^0|<\varepsilon$. Für diese Flächenelemente $(x,\bar{p})$ hat man dann $\mathcal{E}(x,\bar{p},\pi^0)\geqq 0$, und zwar auch dann, wenn man nachträglich wieder auf die Normierung der $\bar{p}$ und π ver-

[2]) Siehe [5] Kap. 11 (Gewöhnliche Maxima und Minima).

zichtet. Daraus folgt dann unmittelbar, daß eine Fläche E mit lauter positiv regulären Flächenelementen ein schwaches Minimum liefert, d.h. ein Minimum bezüglich einer im geodätischen Feld verlaufenden Vergleichsfläche, die genügend dicht bei E bleibt und auch in der Richtung nicht zu stark von E abweicht.

4. *Das Carathéodorysche unabhängige Integral.* Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, ob es stets möglich ist, eine gegebene Extremale, d.h. Lösung der Eulerschen Differentialgleichungen, in ein geodätisches Feld einzubetten. Allerdings wird im folgenden nicht der allgemeine Fall behandelt, sondern es wird über die Funktion $B(x, p)$ in geeigneter Weise verfügt. Und zwar läßt sich unter der Voraussetzung

$$f(x, p) > 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0 \tag{4.1}$$

die Funktion $B(x, p)$ so wählen, daß die Funktion $f^*(x, p) = f(x, p) + B(x, p)$ die Eigenschaft

$$b_\varrho(f^*_{(i)}) = 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0$$

besitzt, d.h. daß mit $p_{(i)}$ auch $f^*_{(i)} = \partial f^* / \partial p_{(i)}$ der Grassmannschen Mannigfaltigkeit angehört. Dies ist eine einfache Folgerung aus dem

Satz 4.1 (H. Kneser). *Es lassen sich Funktionen $u_{(i)}(x, p)$ erklären, die in den p positiv homogen nullter Ordnung sind und nach allen Variablen ebenso oft stetig differenzierbar wie $f_{(i)}(x, p)$, so daß auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $\left(\text{in unserer Schreibweise also auf } b_\varrho(p) = 0, \text{ bzw. } \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}} dp_{(i)} = 0\right)$ stets*

$$u_{(i)} p_{(i)} = f_{(i)} p_{(i)}, \quad u_{(i)} dp_{(i)} = f_{(i)} dp_{(i)}, \quad b_\varrho(u_{(i)}) = 0 \tag{4.4}$$

erfüllt ist[3]).

Die Gln. $(4.4)_2$ $(u_{(i)} - f_{(i)})\, dp_{(i)} = 0$ bedeuten geometrisch einfach, daß im Raum der Variablen $p_{(i)}$ der Vektor mit den Komponenten $(u_{(i)} - f_{(i)})$ im Punkte p auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit senkrecht steht und daher in der Form

$$(u_{(i)} - f_{(i)}) = a_{\varrho'} \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}}$$

geschrieben werden kann[4]). Auflösen nach $a_{\varrho'}$ liefert $a_{\varrho'} = A_{\varrho'}(x, p)$, wobei die $A_{\varrho'}(x, p)$ positiv homogen nullter Ordnung in p sind und außerdem ebensooft stetig differenzierbar wie die $f_{(i)}(x, p)$. Die Funktion

$$f^*(x, p) = f(x, p) + B(x, p) \quad \text{mit} \quad B(x, p) = A_{\varrho'}(x, p) \cdot b_{\varrho'}(p)$$

besitzt dann wegen $f^*_{(i)} \equiv f_{(i)} + A_{\varrho'} \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} \equiv u_{(i)} \pmod{b_\varrho(p)}$ in der Tat die Eigenschaft $b_\varrho(f^*_{(i)}) = 0$ für $b_\varrho(p) = 0$.

[3]) Bei Kneser [11] findet man den Beweis des Satzes nur für $m = 2$ (n beliebig). Der Vollständigkeit halber wird daher am Schluß der Arbeit ein Beweis des Satzes angegeben.

[4]) Bezüglich der $b_{\varrho'}(p)$ s. Abschnitt 1.

Das im folgenden eingeführte unabhängige Integral ist das in Parameterdarstellung geschriebene Integral der Carathéodoryschen „Determinantenmethode", das den Vorzug besitzt, auch auf Probleme mit beweglichem Rand anwendbar zu sein, worauf hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

Zu diesem Zweck geht man von mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $S_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ aus. Mit $s_{(i)}$ seien die Richtungskoordinaten der Matrix $\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i}\right)$ bezeichnet. Dann ist die äußere Differentialform

$$\omega = dS_1 \wedge \cdots \wedge dS_m = \sum_{i_1 < \ldots < i_m} s_{i_1 \ldots i_m}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m} \tag{4.5}$$

offensichtlich ein vollständiges Differential und daher

$$\int \omega = \int s_{(i)}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m} \tag{4.6}$$

vom Wege unabhängig, d.h. man hat nach dem Stokesschen Satz $\int\limits_{\bar{E}} \omega = \int\limits_{E} \omega$, wenn $\bar{E}$ und E zwei m-dimensionale Flächenstücke mit demselben Rand sind. Bei Benutzung einer Parameterdarstellung $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_m)$ der betrachteten Flächen geht $\int \omega$ über in $\int \Delta\, dt_1 \ldots dt_m$ mit der Carathéodoryschen Determinante

$$\Delta = \left| \frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta} \right| = s_{(i)}(x)\, p_{(i)}.$$

Es soll nun versucht werden, Funktionen $S_\alpha(x_i)$ und ein geodätisches Feld $\big(x, \pi(x)\big)$, in das die gegebene Extremale eingebettet ist, so zu finden, daß $\omega = [\Omega]$ d.h. $s_{(i)}(x) = f_{(i)}\big(x, \pi(x)\big)$ gilt. Dazu werden noch einige Vorbereitungen benötigt.

5. *Zur Regularität.* Die regulären Flächenelemente lassen sich unter der Voraussetzung (4.1) auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 5.1. *Ein Flächenelement (x, p) ist dann und nur dann positiv regulär, wenn die quadratische Form*

$$Q_1 = \frac{\partial^2 \tfrac{1}{2} f^2}{\partial p_{(i)} \partial p_{(k)}} \xi_{(i)} \xi_{(k)} \tag{5.1}$$

unter den Nebenbedingungen (3.4) *positiv definit ist.*

Beweis. Zunächst darf man in der Definition der regulären Flächenelemente die Nebenbedingung (3.5) $p_{(i)}\, \xi_{(i)} = 0$ durch $f_{(i)}\, \xi_{(i)} = 0$ ersetzen. Um das zu zeigen, betrachten wir nebeneinander

$$Q = f_{(i)(k)}\, \xi_{(i)} \xi_{(k)} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}} \xi_{(i)} = 0, \quad p_{(i)}\, \xi_{(i)} = 0 \tag{5.2}$$

und

$$\overline{Q} = f_{(i)(k)}\, \eta_{(i)} \eta_{(k)} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}} \eta_{(i)} = 0, \quad f_{(i)}\, \eta_{(i)} = 0. \tag{5.3}$$

Im folgenden bezeichne ξ und η immer Vektoren, die den Gleichungen $p_{(i)}\, \xi_{(i)} = 0$ bzw. $f_{(i)}\, \eta_{(i)} = 0$ genügen. Es sei nun p ein beliebiger Vektor mit $|p| \neq 0$, $b_\varrho(p) = 0$. Dann spannt p mit jeder der Hyperebenen $p_{(i)}\, \xi_{(i)} = 0$

und $f_{(i)}\eta_{(i)}=0$ zusammen den vollen Raum auf, denn man hat $p_{(i)}p_{(i)}\neq 0$, $f_{(i)}p_{(i)}=f\neq 0$. Es kann also jeder Vektor ξ in der Form $\xi=\alpha p+\eta$ geschrieben werden und umgekehrt jeder Vektor η in der Form $\eta=-\alpha p+\xi$. Aus $\xi\neq 0$ folgt $\eta\neq 0$ und umgekehrt. Weiter folgt aus $\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=0$ auch $\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}(\alpha p_{(i)}+\eta_{(i)})=\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\eta_{(i)}=0$ und umgekehrt. Man kann daher schreiben

$$Q=f_{(i)(k)}(\alpha p_{(i)}+\eta_{(i)})(\alpha p_{(k)}+\eta_{(k)})=f_{(i)(k)}\eta_{(i)}\eta_{(k)}=\overline{Q}\quad\text{(wegen } f_{(i)(k)}p_{(k)}=0),$$

d.h. man kann (5.2) durch (5.3) ersetzen und umgekehrt.

Weiter ist $Q_1=f f_{(i)(k)}\xi_{(i)}\xi_{(k)}+(f_{(i)}\xi_{(i)})^2=fQ+(f_{(i)}\xi_{(i)})^2$. Ist nun (x,p) positiv regulär, so ist unter den Bedingungen (3.4) $Q\geqq 0$, und unter der zusätzlichen Bedingung $f_{(i)}\xi_{(i)}=0$ hat man sogar $Q>0$. In jedem Falle ist also $Q_1>0$ unter den Nebenbedingungen (3.4). Ist umgekehrt (x,p) nicht positiv regulär, dann ist selbst unter der zusätzlichen Bedingung $f_{(i)}\xi_{(i)}=0$ die Form $Q_1=fQ$ nicht positiv definit.

Anmerkung. Für positiv reguläre Flächenelemente ist also (vgl. [5], Kap. 11)

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\frac{1}{2}f^2}{\partial p_{(i)}\partial p_{(k)}} & \frac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(k)}}\\ \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} & 0\end{vmatrix}\neq 0. \tag{5.4}$$

6. *Die Legendresche Transformation.* Wir führen vorübergehend r weitere Variable $\mu_{\varrho'}$ ein und setzen $g(x,p,\mu)=f(x,p)+\mu_{\varrho'}b_{\varrho'}(p)$ und transformieren $p_{(i)}, \mu_{\varrho'}$ auf neue Größen $P_{(i)}, M_{\varrho'}$ mittels

$$P_{(i)}=g\,g_{(i)},\qquad M_{\varrho'}=b_{\varrho'}(p)\qquad\left(g_{(i)}=\frac{\partial g}{\partial p_{(i)}}\right). \tag{6.1}$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\frac{1}{2}g^2}{\partial p_{(i)}\partial p_{(k)}} & g\frac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(k)}}+b_{\sigma'}g_{(k)}\\ \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} & 0\end{vmatrix}$$

reduziert sich für $\mu_{\varrho'}=0$, $b_{\varrho'}(p)=0$ auf

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\frac{1}{2}f^2}{\partial p_{(i)}\partial p_{(k)}} & \frac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(k)}}\\ \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} & 0\end{vmatrix}\cdot f^{\binom{n}{m}}=D\cdot f^{\binom{n}{m}}.$$

Wegen (5.4) läßt sich daher (6.1) jedenfalls in der Umgebung von (x,p,μ) mit $\mu_{\varrho'}=0$, (x,p) positiv regulär, nach $p_{(i)}$ bzw. $\mu_{\varrho'}$ auflösen und man erhält

$$p_{(i)}=\varphi_{(i)}(x,P,M),\qquad \mu_{\varrho'}=\psi_{\varrho'}(x,P,M) \tag{6.2}$$

mit

$$c\,p_{(i)}=\varphi_{(i)}(x,c\,P,c\,M),\qquad \mu_{\varrho'}=\psi_{\varrho'}(x,c\,P,c\,M)\quad\text{für } c>0. \tag{6.3}$$

Erklärt man nun noch Funktionen $G(x, P, M)$ und $G_{(i)}(x, P, M)$ mittels

$$G = g(x, \varphi, \psi), \quad G_{(i)} = \frac{\varphi_{(i)}}{g(x, \varphi, \psi)}, \tag{6.4}$$

so findet man zunächst, daß für $M_{\varrho'} = b_{\varrho'}(p) = 0$ stets $\partial G / \partial P_{(i)} = G_{(i)}$ ist und daß $\partial G / \partial P_{(i)}$ der Grassmannschen Mannigfaltigkeit angehört. In der Tat folgt aus (6.1) und (6.4) $p_{(i)} P_{(i)} = g G$ und nach Differenzieren

$$(dG - G_{(i)} dP_{(i)}) = -(dg - g_{(i)} dp_{(i)}),$$

und wegen $g_{(i)} = \partial g / \partial p_{(i)}$ weiter

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial G}{\partial M_{\varrho'}} dM_{\varrho'} + \left(\frac{\partial G}{\partial P_{(i)}} - G_{(i)}\right) dP_{(i)}\right) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial g}{\partial \mu_{\varrho'}} d\mu_{\varrho'}\right)$$
$$= -\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - b_{\varrho'}(p)\, d\mu_{\varrho'}.$$

Für $b_\varrho(p) = 0$, d.h. auch $M_{\varrho'} = dM_{\varrho'} = 0$ folgt daraus $\frac{\partial G}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial G}{\partial P_{(i)}} = G_{(i)}$ und wegen (6.4) gehört mit $p_{(i)}$ auch $\partial G / \partial P_{(i)}$ der Grassmannschen Mannigfaltigkeit an.

Ferner bestätigt man sofort $G(x, cP, cM) = cG(x, P, M)$ und $G_{(i)}(x, cP, cM) = G_{(i)}(x, P, M)$ für $c > 0$, indem man von (6.3) Gebrauch macht.

Setzt man nun $F(x, P) = G(x, P, 0)$, $F_{(i)}(x, P) = G_{(i)}(x, P, 0)$, $F_{x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, P, 0)$ sowie $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, so erhält man insgesamt für $\mu_{\varrho'} = b_\varrho(p) = 0$ die Transformation

$$P_{(i)} = f f_{(i)}, \quad F_{(i)} = \frac{p_{(i)}}{f}, \quad F = f, \quad b_\varrho(p) = b_\varrho(P) = 0, \tag{6.5}$$

die sich sofort umkehren läßt[5]):

$$p_{(i)} = F F_{(i)}, \quad f_{(i)} = \frac{P_{(i)}}{F}, \quad f = F, \quad b_\varrho(p) = b_\varrho(P) = 0. \tag{6.6}$$

Diese Transformation liefert also eine im kleinen eineindeutige Zuordnung von Flächenelementen (x, p) und (x, P), und die Funktion $F(x, P)$ besitzt auf $b_\varrho(P) = 0$ folgende Eigenschaften:

$$F(x, cP) = cF(x, P), \quad F_{(i)}(x, cP) = F_{(i)}(x, P) \quad \text{für } c > 0 \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial P_{(i)}} = F_{(i)}, \quad F_{x_i} = -f_{x_i}. \tag{6.8}$$

7. *Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.* Setzt man $P_{(i)} = f f_{(i)}$ in $F(x, P) = f(x, p)$ ein, so erhält man die Identität $F(x_i, f f_{(i)}) = f$ bzw. wegen

[5]) Aus $b_\varrho(P) = 0$ folgt nämlich umgekehrt $\mu_{\varrho'} = 0$: Die $g_{(i)}$ sind Richtungskoordinaten einer Matrix $(\xi_{i\alpha})$. Setzt man $x_{i\alpha} = \partial x_i / \partial t_\alpha$, $g_{x_{i\alpha}} = \partial g / \partial x_{i\alpha}$, $c_{\alpha\beta} = \xi_{i\alpha} x_{i\beta}$, $\bar{c}_{\alpha\beta}$ algebraisches Komplement von $c_{\alpha\beta}$ in $(c_{\alpha\beta})$, so erhält man $|c_{\alpha\beta}| = g_{(i)} p_{(i)}$ sowie $g_{x_{i\alpha}} = g_{(i)} \partial p_{(i)} / \partial x_{i\alpha} = \partial |c_{\alpha\beta}| / \partial x_{i\alpha} = \xi_{i\beta} \bar{c}_{\beta\alpha}$, d.h. die Spalten von $(g_{x_{i\alpha}})$ und $(\xi_{i\alpha})$ sind Linearkombinationen voneinander und daher die $g_{(i)}$ (bis auf einen Faktor) zugleich die Richtungskoordinaten von $(g_{x_{i\alpha}})$ und ganz analog $f_{(i)}$ die von $(f_{x_{i\alpha}})$. Aus $f_{x_{i\alpha}} = g_{x_{i\alpha}}$ folgt dann $f_{(i)} = g_{(i)}$ bzw. $\mu_{\varrho'} = 0$.

der Homogenität von $F(x, P)$ in den $P_{(i)}$ die Identität

$$F(x_i, f_{(i)}) = 1.$$

Wenn nun $(x, \pi(x))$ irgendein geodätisches Feld ist, und wenn es Funktionen $S_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ gibt mit $s_{(i)}(x_i) = f_{(i)}(x, \pi(x))$, dann müssen die $S_\alpha(x_i)$ notwendig der Differentialgleichung

$$F(x_i, s_{(i)}) = 1 \tag{7.1}$$

genügen. (7.1) ist daher die *Hamilton-Jacobische Differentialgleichung* unseres Variationsproblems.

Um eine Extremale in ein geodätisches Feld einzubetten, wird man daher von der Differentialgleichung (7.1) ausgehen und eine Lösung $S_\alpha(x_i)$ so zu konstruieren suchen, daß auf der Extremalen $s_{(i)} = f_{(i)}$ gilt. Setzt man dann $P_{(i)} = s_{(i)}(x)$, so liefert (6.6) in eindeutiger Weise ein Feld von Flächenelementen $(x, \pi(x))$ mit $s_{(i)} = f_{(i)}(x, \pi(x))$ [wegen $F(x, s(x)) = f(x, \pi(x)) = 1$], d. h. ein geodätisches Feld, in das die Extremale eingebettet ist. Allerdings muß die Extremale genügend oft stetig differenzierbar sein. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird kein Wert darauf gelegt, mit möglichst geringen Voraussetzungen auszukommen.

Zuerst werden Hilfsfunktionen $S_\alpha(x_i)$ konstruiert, für die längs der Extremalen $s_{(i)} = f_{(i)}$ erfüllt ist, so daß sie wenigstens auf der Extremalen der Gl. (7.1) genügen. Dann werden die $S_\alpha(x_i)$ so abgeändert, daß sie auch außerhalb der Extremalen der Differentialgleichung genügen. Dies geschieht mit Hilfe der Charakteristikentheorie.

8. *Beweis der Einbettbarkeit.* Zunächst muß eine Bemerkung über die Richtungskoordinaten senkrechter Flächenelemente vorausgeschickt werden. Wir betrachten im R^n die m-dimensionale Ebene, die von den m Spaltenvektoren η_α der Matrix $(\eta_{i\alpha})$ $(i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, m)$ aufgespannt wird, sowie die dazu senkrechte $(n-m)$-dimensionale Ebene, die durch die Spaltenvektoren ξ_ϱ der Matrix $(\xi_{i\varrho})$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n-m)$ aufgespannt werde. Zwischen den Richtungskoordinaten $f_{i_1 \ldots i_m}$ bzw. $q_{j_1 \ldots j_{n-m}}$ der beiden Matrizen besteht dann der einfache Zusammenhang (s. etwa [1]):

Bis auf einen Faktor sind die $q_{j_1 \ldots j_{n-m}}$ gleich ihren algebraischen Komplementen in der Matrix $(\xi_{i\varrho} | \eta_{i\alpha})$ der n Spaltenvektoren $\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}, \eta_1, \ldots, \eta_m$. Bezeichnet man mit $[i]$ diejenige Folge, die aus $1, 2, \ldots, n$ durch Streichung von $(i) = i_1, \ldots, i_m$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_m)$ entsteht, so kann man auch kurz schreiben

$$q_{[i]} = k \cdot (-1)^s f_{(i)} \quad \text{mit} \quad s = \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha + \tfrac{1}{2} m(m+1).$$

Definition. Vermöge $f(x, p)$ kann jedem m-dimensionalen Flächenelement (x, p) ein $(n-m)$-dimensionales Flächenelement (x, q) zugeordnet werden mit

$$q_{[i]} = (-1)^s f_{(i)}(x, p) \quad \left(s = \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha + \tfrac{1}{2} m(m+1)\right).$$

(x, q) heißt zu (x, p) *transversal*.

Wir betrachten nun die Extremale

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_m). \tag{8.1}$$

Und zwar nehmen wir an, die Parameter seien bereits so gewählt, daß auf der Extremalen

$$f(x(t_\alpha), p(t_\alpha)) = 1 \tag{8.2}$$

gilt[6]). Ferner setzen wir voraus, daß die so vorbereiteten Funktionen (8.1) viermal stetig differenzierbar sind. Dann werden auf der Extremalen die $f_{(i)}(x, p)$ sowie die Richtungskoordinaten $q_{(j)}$ der transversalen Flächenelemente dreimal stetig differenzierbare Funktionen der t_α, und es läßt sich auch eine Matrix $(\xi_{i\varrho})$ finden mit ebensooft stetig differenzierbaren Elementen $\xi_{i\varrho}(t_\alpha)$, deren Richtungskoordinaten gerade die $q_{(j)}(t_\alpha)$ sind. Durch

$$x_i = \hat{x}_i(t_\alpha, u_\varrho) = x_i(t_\alpha) + \xi_{i\varrho}(t_\alpha)\, u_\varrho \tag{8.3}$$

ist dann eine m-parametrige Schar von $(n-m)$-dimensionalen Ebenen gegeben, deren Richtungskoordinaten gerade die $q_{(j)}$ sind, die also die Extremale $x_i = \hat{x}_i(t_\alpha, 0)$ transversal schneiden. Für die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(\hat{x}_1, \ldots, \partial\hat{x}_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_m, u_1, \ldots, u_{n-m})}$$

erhält man auf der Extremalen, wenn i Zeilenindex und α, ϱ Spaltenindizes sind,

$$D = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}\,\middle|\,\xi_{i\varrho}\right) = p_{(i)} f_{(i)} = f \neq 0. \tag{8.4}$$

Mit anderen Worten: Unter der Voraussetzung $f \neq 0$ haben die Flächenelemente (x, p) und (x, q) keine Richtung gemeinsam, d. h. sie spannen zusammen den vollen Raum auf. Man kann also wegen (8.4) in einer gewissen Umgebung des auf der Extremalen betrachteten Punktes eindeutig nach t_α, u_ϱ auflösen und erhält (dreimal stetig differenzierbare) Funktionen

$$t_\alpha = S_\alpha(x_1, \ldots, x_n), \quad u_\varrho = U_\varrho(x_1, \ldots, x_n).$$

Die Ebenenschar kann dann in dieser Umgebung auch in der Form

$$S_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = t_\alpha \tag{8.5}$$

geschrieben werden, und die t_α-Parameterkurven von (8.1) werden einfach als Durchschnitt der Extremalen (8.1) mit den $m-1$ Hyperflächen

$$S_{\alpha'}(x_1, \ldots, x_n) = \text{const} \quad (\alpha' = 1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, m)$$

erhalten.

[6]) Ist zunächst $f(x(t_\alpha), p(t_\alpha)) = \psi(t_\alpha)$, so setze man etwa $t_1^* = \int_0^{t_1} \psi(t_\alpha)\, dt_1$, $t_{\alpha'}^* = t_{\alpha'}$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$.

Die m Vektoren $\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_n}\right)$ spannen den zur $(n-m)$-dimensionalen Ebene $S_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \text{const}$ senkrechten Raum auf. Auf der Extremalen müssen daher die Richtungskoordinaten $s_{(i)}$ von $(\partial S_\alpha/\partial x_i)$ bis auf einen Faktor mit den $f_{(i)}$ übereinstimmen. Wegen (8.5) hat man auf (8.1) $\frac{\partial S}{\partial t_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ bzw. $|\partial S_\alpha/\partial t_\beta| = s_{(i)} p_{(i)} = 1$. Andererseits ist nach (8.2) auch $f_{(i)} p_{(i)} = 1$, d.h. es ist $s_{(i)} = f_{(i)}$ auf der Extremalen.

Zunächst soll noch eine algebraische Identität hergeleitet werden. Wir setzen $S_{i\alpha} = \partial S_\alpha/\partial x_i$, $x_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}$ sowie $c_{\beta\gamma} = S_{k\beta} x_{k\gamma}$. $\bar{c}_{\beta\gamma}$ bezeichne das algebraische Komplement von $c_{\beta\gamma}$ in $(c_{\beta\gamma})$. Betrachtet man $S_{i\alpha}$ und $x_{i\alpha}$ als unabhängige Variable, so erhält man, indem man $|c_{\beta\gamma}| = s_{(i)} p_{(i)}$ nach $S_{i\alpha}$ bzw. $x_{i\alpha}$ differenziert,

$$p_{(i)} \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i\alpha}} = x_{i\gamma} \delta_{\alpha\beta} \bar{c}_{\beta\gamma} = x_{i\gamma} \bar{c}_{\alpha\gamma} \quad \text{bzw.} \quad s_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}} = S_{i\beta} \delta_{\alpha\gamma} \bar{c}_{\beta\gamma} = S_{i\beta} \bar{c}_{\beta\alpha}$$

oder, indem man von (8.5), d.h. $c_{\alpha\beta} = \bar{c}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ auf (8.1) Gebrauch macht,

$$x_{i\alpha} = p_{(i)} \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i\alpha}}, \tag{8.6}$$

$$S_{i\alpha} = s_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}. \tag{8.7}$$

Insbesondere folgt aus $f_{x_{i\alpha}} = f_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}$ auf (8.1) wegen $s_{(i)} = f_{(i)}$

$$f_{x_{i\alpha}} = S_{i\alpha}. \tag{8.8}$$

Jetzt betrachten wir die Differentialgleichung (7.1). Es ist dies eine einzige Differentialgleichung für m gesuchte Funktionen $S_\alpha(x_i)$. Man kann sich daher $m-1$ der Funktionen willkürlich vorgeben und erhält eine Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion. Wir verfügen über diese Willkür, indem wir ein für allemal die (dreimal stetig differenzierbaren) Funktionen $S_{\alpha'}(x_i)$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$ aus (8.5) eintragen und die restliche gesuchte Funktion mit $y = S(x_i)$ bezeichnen. Schreibt man noch $y_i = \partial S/\partial x_i$ so geht (7.1) über in

$$H(x_i, y_i) = 1, \tag{8.9}$$

wobei $H(x_i, y_i)$ nach allen Variablen x_i, y_i mindestens zweimal stetig differenzierbar wird, so daß man auf die Differentialgleichung (8.9) die gewöhnliche Charakteristikentheorie anwenden kann.

Insbesondere machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß man die Werte der gesuchten Funktion $y = S(x_i)$ auf einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche vorgeben kann. Dazu betrachten wir auf der Extremalen den Punkt $x_i^0 = x_i(t_\alpha^0)$ und geben uns die Hyperfläche durch $x_n = x_n^0$ vor. Die Werte von $y = S(x_1, \ldots, x_n)$ geben wir uns auf dieser Hyperfläche durch $y = S_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$ vor, wobei $S_1(x_1, \ldots, x_n)$ die erste der Funktionen (8.5) ist. Dann hat man $y_{i'} = \frac{\partial S_1}{\partial x_{i'}}(x_1, \ldots, x_n^0)$ $(i' = 1, 2, \ldots, n-1)$, und zur

eindeutigen Berechnung von y_n kann die Differentialgleichung (8.9) dienen, falls $\partial H/\partial y_n \neq 0$ ist.

Auf der Extremalen läßt sich eine Lösung sofort angeben, nämlich $y_n = \frac{\partial S_1}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n^0)$, weil auf der Extremalen $H\left(x_i, \frac{\partial S_1}{\partial x_i}\right) = F(x_i, s_{(i)}) = 1$ ist. Andererseits ist $H(x_i, y_i)$ positiv homogen erster Ordnung in den y_i und daher $H(x_i, y_i) = \frac{\partial H}{\partial y_i} y_i$. Es können daher nicht alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial H}{\partial y_i}$ zugleich verschwinden, weil man sonst $H = 0$ hätte. Man darf annehmen, daß die Bezeichnungsweise so gewählt ist, daß gerade $\partial H/\partial y_n \neq 0$ ist, so daß man eindeutig nach y_n auflösen kann. Auf der Extremalen fällt dann die eindeutig bestimmte Lösung mit $y_i = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$ zusammen.

Mit den so festgelegten Anfangswerten integriere man die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \dot{y}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{8.10}$$

wobei die Bedingung $\partial H/\partial y_n = \dot{x}_n \neq 0$ geometrisch besagt, daß die Charakteristiken die Fläche $x_n = x_n^0$ durchsetzen ohne sie zu berühren und daher ein gewisses Gebiet des Raumes schlicht überdecken. Das liefert dann auch die Werte der y_i im Raum, und man erhält daraus in bekannter Weise die gesuchte Funktion $y = S(x_1, \ldots, x_n)$.

Damit ist eine Lösung $y = S(x_i)$ der Differentialgleichung (8.9) konstruiert. Der wesentliche Punkt dabei ist, daß die $(n-m)$-Flächen $S(x_i) = \text{const}$, $S_{\alpha'}(x_i) = \text{const}$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$ die Extremale transversal schneiden, d. h. daß ihre Richtungskoordinaten $s_{(i)}^*$ auf der Extremalen $s_{(i)}^* = f_{(i)}$ erfüllen. Um dies zu zeigen, müssen die charakteristischen Differentialgleichungen (8.10) näher betrachtet werden. Ausgeschrieben lauten sie

$$\dot{x}_i = F_{(i)}\left(x_k, y_k \frac{\partial s_{(k)}}{\partial S_{k1}}\right) \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i1}} \tag{8.11}_1$$

$$\dot{y}_i = -F_{x_i}\left(x_k, y_k \frac{\partial s_{(k)}}{\partial S_{k1}}\right) - F_{(i)}\left(x_k, y_k \frac{\partial s_{(k)}}{\partial S_{k1}}\right) y_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{j1}}\right). \tag{8.11}_2$$

Die Lösungskurven des Systems (8.11), im Raum der Variablen x_i, y_i gedeutet, sind durch die obige Wahl der Anfangswerte in ihrem ganzen Verlauf eindeutig festgelegt, weil die rechten Seiten von (8.11) stetig differenzierbare Funktionen von x_i und y_i sind.

Eine $(m-1)$-parametrige Schar von Lösungskurven im R^{2n} läßt sich sogar explizit angeben. Zu diesem Zweck betrachten wir auf (8.1) die $(m-1)$-parametrige Schar der t_1-Parameterkurven: $x_i = x_i(t_1, t_{\alpha'}^0)$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$. Es gilt dann der

Satz 8.1. *Die Kurven der $(m-1)$-parametrigen Schar im R^{2n}*

$$x_i = x_i(t_1, t_{\alpha'}^0), \qquad y_i = \frac{\partial S_1(x(t_1, t_{\alpha'}^0))}{\partial x_i} \tag{8.12}$$

sind Lösungen des Systems (8.11), die obigen Anfangsbedingungen genügen.

Mit anderen Worten: Die t_1-Kurven auf der Extremalen bilden eine Schar von Charakteristiken, von der die Extremale schlicht überdeckt wird, und die Werte der partiellen Ableitungen der konstruierten Lösung $y = S(x_1, \ldots, x_n)$ fallen auf der Extremalen mit $y_i = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}$ zusammen, so daß die Richtungskoordinaten $s^*_{(i)}$, gebildet mit den endgültigen Funktionen $S(x_i)$, $S_{\alpha'}(x_i)$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$, auf der Extremalen $s^*_{(i)} = s_{(i)} = f_{(i)}$ erfüllen. Die Legendresche Transformation liefert dann wie in Nr. 7 ausgeführt das zugehörige geodätische Feld, in das die Extremale eingebettet ist.

Zum Beweis von Satz 8.1 hat man also zu zeigen, daß die Gln. (8.11) durch (8.12) identisch erfüllt werden. Setzt man zunächst (8.12) in $(8.11)_1$ ein, so erhält man wegen $s_{(i)} = f_{(i)}(x, p)$ bzw. $F_{(i)}(x, s) = p_{(i)}$ auf der Extremalen

$$\dot{x}_i = x_{i1} = F_{(i)}(x, s)\, \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i1}} = p_{(i)}\, \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i1}}.$$

Dies ist nach (8.6) in der Tat eine Identität.

Setzt man nun (8.12) in $(8.11)_2$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial S_{i1}}{\partial t_1} = -F_{x_i}(x, s) - F_{(i)}(x, s)\, S_{k1}\, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}}\right). \tag{8.13}$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial S_{i1}}{\partial t_1} = \frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}\, \frac{\partial x_k}{\partial t_1} = \frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}\, \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}}\, F_{(i)}(x, s). \tag{8.14}$$

Es genügt also zu zeigen, daß die Differenz D_i von (8.13) und (8.14), nämlich

$$D_i = F_{x_i}(x, s) + F_{(i)}(x, s) \left\{ \frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}\, \frac{\delta s_{(i)}}{\partial S_{k1}} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}}\right) S_{k1} \right\}$$

null ist. Da $S_1(x_i)$ zweimal stetig differenzierbar ist, hat man

$$\frac{\partial S_{k1}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_i\, \partial x_k} = \frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}.$$

Das ergibt

$$D_i = F_{x_i}(x, s) + F_{(i)}(x, s) \left\{ \frac{\partial S_{k1}}{\partial x_i}\, \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}} + S_{k1}\, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}}\right) \right\} = F_{x_i} + F_{(i)} \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial x_i}.$$

Auf der Extremalen hat man aber nach (8.8) $S_{i\alpha} = f_{x_i \alpha}$ und daher

$$\frac{d f_{x_i \alpha}}{d t_\alpha} = \frac{d S_{i\alpha}}{d t_\alpha}\, \frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x_i\, \partial x_k} \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k\alpha}}\, F_{(i)}(x, s) = F_{(i)} \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial x_i}.$$

Andererseits liefert die Legendresche Transformation nach (8.6) $F_{x_i}(x, s) = -f_{x_i}(x, p)$, d. h.

$$D_i = \frac{d f_{x_i \alpha}}{d t_\alpha} - f_{x_i} = 0,$$

da die Fläche nach Voraussetzung Extremale ist, also den Eulerschen Differentialgleichungen genügt.

9. *Beweis des Kneserschen Satzes.* Wir betrachten die $p_{(i)}$ jetzt durchweg auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $b_\varrho(p)=0$, so daß sie stets als Richtungskoordinaten einer Matrix $(x_{i\alpha})$ angesehen werden können. Ist dann $p=p(t)$ eine stetig differenzierbare Kurve auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit, so lassen sich (vgl. Anmerkung in Nr. 1) stets auch stetig differenzierbare $x_{i\alpha}(t)$ angeben, so daß die $p_{(i)}(t)$ die Richtungskoordinaten von $(x_{i\alpha}(t))$ sind. Differenzieren längs der Kurve liefert

$$\frac{dp_{(i)}}{dt}=\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}\frac{dx_{i\alpha}}{dt} \quad \text{oder kurz} \quad dp_{(i)}=\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}dx_{i\alpha}.$$

Schreibt man wieder $f_{x_{i\alpha}}=\frac{\partial f}{\partial x_{i\alpha}}$ und bezeichnet die Richtungskoordinaten von $(f_{x_{i\alpha}})$ mit $v_{(i)}$, so erhält man zunächst

$$D=|f_{x_{i\alpha}}x_{i\beta}|=v_{(i)}p_{(i)}. \tag{9.1}$$

Andererseits hat man wegen $f_{x_{i\alpha}}=f_{(i)}\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}$ stets $f_{x_{i\alpha}}x_{i\beta}=f\,\delta_{\alpha\beta}$ d. h. $D=f^m$ oder

$$\frac{v_{(i)}}{f^{m-1}}p_{(i)}=f_{(i)}p_{(i)}. \tag{9.2}$$

Weiter ist

$$v_{(i)}dp_{(i)}=v_{(i)}\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}dx_{i\alpha},$$

wobei z. B. $\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i1}}dx_{i1}$ die Richtungskoordinaten der Matrix

$$(d\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_m)$$

sind, in der die $\mathfrak{x}_\alpha$ die Spaltenvektoren der Matrix $(x_{i\alpha})$ bezeichnen. Um dann den Term $v_{(i)}\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i1}}dx_{i1}$ zu berechnen, ersetze man einfach in (9.1) den Spaltenvektor $\mathfrak{x}_1$ durch $d\mathfrak{x}_1$. Das ergibt

$$v_{(i)}\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i1}}dx_{i1}=\begin{vmatrix} f_{x_{i1}}dx_{i1} & 0\cdots 0 \\ * & f\quad 0 \\ \vdots & \ddots \\ * & 0\quad f \end{vmatrix}=f^{m-1}f_{x_{i1}}dx_{i1},$$

insgesamt also

$$v_{(i)}dp_{(i)}=f^{m-1}f_{x_{i\alpha}}dx_{i\alpha}=f^{m-1}f_{(i)}\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}dx_{i\alpha}=f^{m-1}f_{(i)}dp_{(i)}$$

oder

$$\frac{v_{(i)}}{f^{m-1}}dp_{(i)}=f_{(i)}dp_{(i)}. \tag{9.3}$$

Jetzt betrachten wir die beiden Determinanten

$$v_{(i)}=|f_{x_{i_\nu\alpha}}|, \qquad p_{(k)}=|x_{k_\nu\alpha}|$$

und bilden ihr Produkt

$$v_{(i)}p_{(k)}=|f_{x_{i_\nu\alpha}}x_{k_\nu\alpha}|=\left|f_{(j)}\frac{\partial p_{(j)}}{\partial x_{i_\nu\alpha}}x_{k_\nu\alpha}\right|.$$

Hierin ist $\frac{\partial p_{(j)}}{\partial x_{i_\nu \alpha}} x_{k_\nu \alpha}$ wieder eine aus m Zeilen der Matrix $(x_{i\alpha})$ gebildete Determinante, d.h. $v_{(i)} p_{(k)}$ kann als Funktion der x_i, $p_{(i)}$ geschrieben werden, was wir durch Klammersetzung andeuten

$$w_{(i)(k)}(x, p) = [v_{(i)} p_{(k)}].$$

(Dieser Ausdruck hat auch dann einen Sinn, wenn die $p_{(i)}$ nicht der Grassmannschen Mannigfaltigkeit angehören.)

Erklärt man nun die Größen des Kneserschen Satzes mittels

$$u_{(i)}(x, p) = \frac{[v_{(i)} p_{(k)}] p_{(k)}}{f^{m-1} p_{(j)} (p_j)},$$

so erhält man, wenn man für die $p_{(i)}$ die Richtungskoordinaten der Matrix $(x_{i\alpha})$ einträgt,

$$u_{(i)} = \frac{v_{(i)}}{f^{m-1}}$$

und daher wegen (9.2) und (9.3) auch

$$u_{(i)} p_{(i)} = f_{(i)} p_{(i)}, \quad u_{(i)} dp_{(i)} = f_{(i)} dp_{(i)}, \quad b_\varrho(u_{(i)}) = 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0.$$

Außerdem bestätigt man sofort die in Satz 4.1 genannten Homogenitäts- und Differenzierbarkeitseigenschaften.

Literatur.

[1] Bertini-Duschek: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. 1924. — [2] Boerner, H.: Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math Ann. **112**, 187—220 (1936). — [3] Boerner, H.: Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung mehrfacher Integrale. Math. Z. **46**, 720—742 (1940). — [4] Boerner, H.: Carathéodorys Eingang zur Variationsrechnung. Jber. dtsch. Math.-Ver. **56**, 31—58 (1953). — [5] Carathéodory, C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig 1935. — [6] Carathéodory, C.: Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen. Acta Szeged **4**, 193—216 (1929). —. [7] Debever, R.: Sur quelques problèmes de géométries dérivées du calcul des variations. Bull. Acad. Roy. Belg. **28**, 794—808 (1942). — [8] Gross, W.: Das isoperimetrische Problem bei Doppelintegralen. Mh. Math. u. Phys. **27**, 70—120 (1916). — [9] Haar, A.: Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. Math. Ann. **100**, 481—502 (1928). — [10] Hölder, E.: Die infinitesimalen Transformationen der Variationsrechnung. Jber. dtsch. Math.-Ver. **49**, 162—178 (1939). — [11] Kneser, H.: Homogene Funktionen auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 101—103 (1940). — [12] Lepage, Th.-H.-J.: Sur les champs géodésiques du calcul des variations. Bull. Acad. Roy. Belg. **22**, 716—729, 1036—1046 (1936). — [13] Paquet, P. V.: Sur la géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann et les intégrales du calcul des variations. Bull. Acad. Roy Belg. **27**, 148—168 (1941). — [14] Radon, J.: Über einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale. Mh. Math. u. Phys. **22**, 53—63 (1911). — [15] Velte, W.: Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale in Parameterdarstellung. Mitt. math. Sem. Gießen **1953**, H. 45. — [16] Weyl, H.: Geodesic fields. Ann. of Math. **36**, 607—629 (1935).

Gießen, Mathematisches Seminar der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 1. April 1954.)

KLINGENBERG, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 384—406 (1954)

Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen.

Von
WILHELM KLINGENBERG.

Wir betrachten ein Axiomensystem für eine Ebene von projektivem Typus, in welchem nicht die Eindeutigkeitsforderung für die Verbindungsgerade und den Schnittpunkt erhoben wird. Diese Modifikation der Inzidenzaxiome ist nicht nur vom formalen Standpunkt aus jedenfalls zulässig, sondern sie trägt, wenn wir an die in einer Zeichenebene auftretenden „schleifenden Schnitte" denken, auch eine gewisse natürliche Motivierung[1]) in sich, wie sie von einem geometrischen Axiomensystem immer zu fordern ist.

Wir nennen zwei Punkte oder zwei Geraden benachbart, wenn sie mehr als eine Verbindungsgerade oder mehr als einen Schnittpunkt haben. In der gewöhnlichen projektiven Ebene ist offenbar jeder Punkt und jede Gerade nur zu sich selber benachbart, d.h.: Bei der Gültigkeit der in Rede stehenden Eindeutigkeitsforderungen wird die Nachbarrelation zur Gleichheitsrelation.

Unser Axiomensystem umfaßt als erste Gruppe eine Reihe von Inzidenzaxiomen, die außer den üblichen Forderungen der Existenz von Schnittpunkt und Verbindungsgerade und der Existenz von vier Punkten in hinreichend allgemeiner Lage drei Axiome über Nachbargeraden und Nachbarpunkte enthalten, die in einer Ebene mit Eindeutigkeitsaxiom trivialerweise erfüllt sind. Wir zeigen, daß durch diese Axiomgruppe eine in sich duale Inzidenzebene ε_p von projektivem Typus definiert ist mit der fundamentalen Eigenschaft, daß die Nachbarrelation klassenbildend ist. Die Zusammenfassung der Klassen benachbarter Punkte und Geraden zu Großpunkten und Großgeraden liefert eine der üblichen projektiven Inzidenzebenen $\bar{\varepsilon}_p$ [2]), in

[1]) J. HJELMSLEV hat versucht, eine „Geometrie der Wirklichkeit" zu begründen. Ein mathematisches Modell für das Verhalten von „wirklichen Geraden" und „wirklichen Punkten" gegenüber dem Schneiden und Verbinden glaubt er, jedenfalls in einem gewissen Maße, in der ebenen Geometrie über den dualen Zahlen zu finden; s. J. HJELMSLEV, Die natürliche Geometrie. Leipzig 1923.

Eine mathematisch präzise Fassung erhält das Problem, wenn man es als die Frage nach den Konsequenzen einer Einschränkung der Gültigkeit der Eindeutigkeitsforderung von Schnittpunkt und Verbindungsgerade in den Axiomen der Geometrie formuliert. Dazu finden sich, für die euklidische Ebene im wesentlichen, eine Reihe von Untersuchungen und Resultaten in J. HJELMSLEV, Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, 1. Mitt. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **8** (1929); 2. Mitt. **10** (1929); 3. Mitt. **19** (1942); 4. u. 5. Mitt. **22** (1945); 6. Mitt. **25** (1949).

[2]) Bei M. HALL, Projektive planes, Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943), heißt $\bar{\varepsilon}_p$ „free projektive plane". In W. KLINGENBERG, Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **18**, 120—143 (1952), nennen wir $\bar{\varepsilon}_p$ „projektive Inzidenzebene" und schreiben dafür ε_p, da wir in jener Arbeit stets die Eindeutigkeitsforderung erheben. Entsprechend nennen wir dort $\bar{\varepsilon}_a$ einfach „affine Inzidenzebene" und schreiben dafür ε_a.

denen das Eindeutigkeitsaxiom gilt. Es gibt also einen Homomorphismus von ε_p in eine eindeutige projektive Ebene.

Durch die Herausnahme einer Geraden g_∞^* und aller zu g_∞^* benachbarten Geraden g_∞ sowie aller mit diesen Geraden inzidierenden Punkte aus ε_p erhalten wir eine affine Inzidenzebene ε_a mit Nachbarelementen. In ε_a ist mit Hilfe der ausgezeichneten uneigentlichen Geraden g_∞^* in der üblichen Weise ein transitiver Parallelitätsbegriff erklärt, und es gibt zu einer Geraden durch einen Punkt genau eine Parallele. Jedoch wird es im allgemeinen zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt außer der Parallelen weitere Nichtschneidende geben; dies mag man in Beziehung setzen zu dem Auftreten von Schnittpunkten außerhalb einer beschränkten Zeichenebene. Schneidet jedoch eine Gerade h die Gerade g eindeutig, so schneidet h auch alle Parallelen von g.

Die zweite Axiomgruppe besteht in der Forderung, daß gewisse Schnittpunktsätze (nach D. HILBERT) oder Schließungssätze (nach K. REIDEMEISTER) gültig sein sollen. Jedem Schnittpunktsatz Σ in ε_p ist beim Übergang zur Großgeometrie ein Schnittpunktsatz $\bar{\Sigma}$ in $\bar{\varepsilon}_p$ zugeordnet. Dabei kann Σ so beschaffen sein, daß der zugehörige Schließungssatz $\bar{\Sigma}$ in der eindeutigen projektiven Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ trivial wird, d.h. eine Folge der in $\bar{\varepsilon}_p$ geltenden eindeutigen Inzidenzaxiome ist. Hierauf beruht es, daß man die bekannten Abhängigkeitsbeweise von Schließungssätzen in eindeutigen projektiven Ebenen nicht ohne weiteres zu Abhängigkeitsbeweisen in einer allgemeinen Ebene ε_p mit Nachbarelementen ausgestalten kann: Bei den Abhängigkeitsbeweisen in eindeutigen projektiven Ebenen wird eben im allgemeinen das Eindeutigkeitsaxiom für Schnittpunkt und Verbindungsgerade wesentlich benutzt. So müssen wir z.B. die Frage offenlassen, ob aus der Gültigkeit des Satzes von PAPPOS-PASCAL in ε_p schon die Gültigkeit aller Schließungssätze, insbesondere etwa des Satzes von DESARGUES, folgt — eine Frage, die für eindeutige projektive Ebenen $\bar{\varepsilon}_p$ bekanntlich positiv entschieden ist[3]).

Wir können jedoch zeigen, daß folgende Schließungssätze alle übrigen zur Folge haben, was im Hinblick auf eine spätere Anwendung wichtig ist: Wir gehen dazu von ε_p zu einer affinen Ebene ε_a mit Nachbarelementen über. In ε_a setzen wir die Gültigkeit des kleinen (affinen) Satzes von DESARGUES allgemein und des affinen Satzes von PAPPOS-PASCAL mit der Beschränkung auf ein festes, sich eindeutig schneidendes Paar von Trägergeraden g und g' voraus. Diese Voraussetzungen kommen einer bequemen Einführung einer nach dem HILBERTschen Vorbild erklärten Streckenrechnung[4]) entgegen: Wir wählen nämlich g und g' als Achsen eines Koordinatensystems und zeigen, daß auf Grund der vorausgesetzten Schließungssätze die Strecken unter der Addition und Multiplikation einen HJELMSLEVschen Ring oder H-Ring bilden.

Dabei ist ein H-Ring ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und von zwei Nullteilern wenigstens eine:

[3]) HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig u. Berlin 1930.

[4]) Vgl. D. HILBERT[3]). Wir schließen uns eng an die Darstellung der affinen Streckenrechnung an, wie sie sich bei W. KLINGENBERG[2]) findet.

den anderen teilt. Speziell ist also ein Körper ein H-Ring. Die Ebene ε_a und die zugehörige Ebene ε_p lassen sich nunmehr in der üblichen Weise als affine und projektive Geometrie über einem H-Ring beschreiben. Der Verallgemeinerung gegenüber einer affinen oder projektiven Geometrie über einem Körper besteht darin, daß an die Stelle der Bedingung „nicht Null" bei einem Körper die Bedingung „nicht Nullteiler" bei einem H-Ring tritt. So ist z.B. eine Gerade in ε_p festgelegt durch ein homogenes (d.h. ein bis auf einen gemeinsamen Faktor, der nicht Nullteiler ist, festgelegtes) geordnetes Elementtripel, bei dem nicht alle Elemente Nullteiler sind.

Das Auftreten von Nullteilern in einem H-Ring entspricht dem Auftreten von Nachbarelementen in ε_p oder ε_a. So sind z.B. in einer Ebene ε_p, die sich als projektive Geometrie über einem H-Ring beschreiben läßt, zwei Geraden oder zwei Punkte genau dann benachbart, wenn die durch die beiden Koordinatentripel bestimmten drei zweireihigen Determinanten Nullteiler sind. Die Nullteiler in einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ bilden ein teilerloses Ideal $\boldsymbol{N}$. Der Restklassenring $\boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ ist isomorph zum Koordinatenkörper der zugehörigen Großgeometrie.

Umgekehrt genügt eine projektive Geometrie über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ unseren Inzidenzaxiomen und es gelten — in geeigneter Formulierung — alle die Schließungssätze, die auch in einer projektiven Ebene über einem Körper gelten. Insbesondere folgen also aus den oben angegebenen beiden Schließungssätzen alle anderen in jeder Körpergeometrie gültigen Schließungssätze. Die Konstruktion des H-Ringes $\boldsymbol{R}_H$ mit Hilfe der Streckenrechnung in einem bestimmten Bezugssystem, wie wir sie oben beschrieben haben, erweist sich jetzt als unabhängig von diesem Bezugssystem insofern, als daß jedes andere Bezugssystem einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen H-Ring liefert.

Damit haben wir also die projektiven und affinen Ebenen ε_p und ε_a mit Nachbarelementen, in denen die oben angegebenen Schließungssätze gelten, als projektive und affine Geometrien über H-Ringen charakterisiert.

In den H-Ringen haben wir eine solche Klasse von Ringen vor uns, bei denen die zugehörigen projektiven und affinen Ebenen trotz der möglichen Mehrdeutigkeit von Schnittpunkt und Verbindungsgerade noch viele wichtige Eigenschaften der Körpergeometrien gelten. Man kann zeigen, daß über Ringen, die allgemeiner sind als H-Ringe, nicht mehr stets die Verbindungsgerade in der zugehörigen Geometrie existiert.

Bemerkenswert ist noch, daß die H-Ringe in engem Zusammenhang mit den allgemeinen Bewertungsringen zu stehen scheinen[5]). Jedenfalls lassen sich alle bekannten H-Ringe als Restklassenringe von Bewertungsringen darstellen: Sei $\boldsymbol{B}$ ein Bewertungsring (das ist ein Integritätsbereich mit Einselement, in dem von je zwei Elementen wenigstens eines Teiler des anderen ist) und $\boldsymbol{P}$ das Ideal der Nichteinheiten von $\boldsymbol{B}$. Ist $\boldsymbol{A}$ ein Ideal in $\boldsymbol{P}$, so ist $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ dann und nur dann H-Ring, wenn es nicht ein Primideal $\boldsymbol{Q}$ gibt mit $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{Q} < \boldsymbol{P}$.

[5]) Über Bewertungsringe und damit zusammenhängende Begriffe vgl. W. KRULL, Idealtheorie. Berlin 1935.

Diese Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn $A = (a) \neq (0)$ ein Hauptideal ist. Hier ordnen sich insbesondere die von J. HJELMSLEV angegebenen Verallgemeinerungen der dualen Zahlen unter: Man erhält sie als Restklassenring $K[x]/(x)^n$, wo $K[x]$ der Polynomring in einer Unbestimmten x über einem Körper K ist.

Es ist eine offene Frage, ob jeder H-Ring sich in der angegebenen Weise als Restklassenring eines Bewertungsringes darstellen läßt.

Ebenso, wie bei einer projektiven Ebene über einem Körper kann man für eine projektive Ebene über einem H-Ring durch Einführung von absoluten quadratischen Gebilden zu Ebenen von euklidischem und nichteuklidischem Typus gelangen, in denen die Eindeutigkeit für Schnittpunkt und Verbindungsgerade nicht gefordert sind. Doch kann man auch auf einem ganz anderen Wege etwa zu einer euklidischen Ebene mit Nachbarelementen gelangen: Die von HJELMSLEV begründete Spiegelungsgeometrie gibt uns die Möglichkeit hierzu.

J. HJELMSLEV[1]) war überhaupt der erste, der ebene euklidische und nichteuklidische Geometrien ohne Eindeutigkeitsforderungen genauer studiert hat, und zwar mit der Methode des Rechnens mit Geraden- und Punktspiegelungen, also den involutorischen Elementen der zugehörigen Bewegungsgruppe. Die Beschäftigung mit den HJELMSLEVschen Untersuchungen veranlaßte uns, zunächst einmal projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen zu untersuchen. In einer folgenden Note werden wir dann, gerüstet mit den hier gewonnenen Ergebnissen, auf die euklidische Geometrie mit Nachbarelementen mit den Methoden des Spiegelungskalküls eingehen[6]).

1. Projektive Ebenen mit Nachbarelementen.

1.1. Die Inzidenzaxiome.

D0. Unter einer *projektiven Inzidenzebene ε_p mit Nachbarelementen* verstehen wir eine Menge von Punkten $P, Q, R, \ldots$, in der gewisse Teilmengen, genannt Geraden $g, h, j, \ldots$, ausgezeichnet sind. Für $P \in g$ schreiben wir $P \mathrel{I} g$ oder $g \mathrel{I} P$ und nennen dann P und g auch inzident. Die Negation bezeichnen wir mit $P \mathrel{\not I} g$ oder $g \mathrel{\not I} P$. Für Punktepaare und Geradenpaare erklären wir die Relation „benachbart" folgendermaßen:

D1. P und Q heißen *benachbart*, $P \bigcirc Q$, wenn es g und h gibt mit $g \neq h$; $g, h \mathrel{I} P, Q$. Sind P und Q nicht benachbart, $P \oslash Q$, so heißen P und Q auch *fern*.

D2. g und h heißen *benachbart*, $g \bigcirc h$, wenn es P und Q gibt mit $P \neq Q$; $P, Q \mathrel{I} g, h$. Sind g und h nicht benachbart, $g \oslash h$, so heißen g und h auch *kreuzend*.

Hiermit formulieren wir als Axiome für ε_p[7]):

A1. Zu $P; Q$ gibt es g mit $g \mathrel{I} P, Q$. (Wir schreiben für ein g mit $g \mathrel{I} P, Q$ auch PQ. PQ heißt Verbindungsgerade von P und Q.)

[6]) Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen; erscheint in dieser Zeitschrift Bd. 60.

[7]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]), insbesondere die 3. Mitteilung.

A 2. Zu $g; h$ gibt es P mit $P \mathrel{I} g, h$. (Wir schreiben für ein P mit $P \mathrel{I} g, h$ auch $g\,h$. $g\,h$ heißt Schnittpunkt von g und h.)

A 3. Es gibt vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit $P_i \varnothing P_k$ $(i \neq k)$ und $P_i P_k \varnothing P_l P_m$ $(i \neq k, l;\ k \neq l)$, $(i, k, l = 1, 2, 3, 4)$.

A 4. Aus $g, h, j \mathrel{I} P$; $g \varnothing h$; $h \bigcirc j$ folgt $g \varnothing j$.

A 5. Aus $g \bigcirc h$; $j \varnothing g$ folgt $g\,j \bigcirc h\,j$ [8]).

A 6. Aus $P \bigcirc Q$; $Q \varnothing R$ folgt $PR \bigcirc QR$ [8]).

1.2. Bemerkungen. Inhaltlich besagen die Axiome folgendes: A 1 und A 2 bedeuten die Existenz der Verbindungsgeraden und des Schnittpunktes. A 3 besagt die Existenz von vier Punkten in allgemeiner Lage, nämlich so, daß sie zu je zweien fern sind und daß ihre von einem Punkt auslaufenden verschiedenen Verbindungsgeraden kreuzend sind. A 4 fordert, daß eine Gerade j, die durch den Schnittpunkt zweier Kreuzgeraden $g; h$ läuft, höchstens zu einer der Geraden $g; h$ benachbart sein kann. Anders ausgedrückt: Die Nachbarrelation für die Geraden eines Büschels ist transitiv. A 5 besagt, daß zwei Nachbargeraden $g; h$ von einer Kreuzgeraden j zu g in Nachbarpunkten geschnitten werden. A 6 fordert, dual hierzu, daß die Verbindungsgeraden zweier Nachbarpunkte $P; Q$ mit einem Fernpunkt R von P benachbart sind.

Gegenüber den üblichen projektiven Inzidenzaxiomen fehlt in unserem Axiomensystem die Forderung der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte. Wir können dies ausdrücken durch

$\overline{A}\,4.$ Aus $P \bigcirc Q$ folgt $P = Q$.

S 1.1. Wenn $\overline{A}\,4$ gilt, so gilt auch: Aus $g \bigcirc h$ folgt $g = h$.

Denn die Gültigkeit von $g \bigcirc h$ und $g \neq h$ würde nach D 2 die Existenz von $P; Q$ mit $P \bigcirc Q$; $P \neq Q$ bedeuten, entgegen $\overline{A}\,4$.

D 3. Gilt in ε_p $\overline{A}\,4$, so heißt ε_p *(eindeutige) projektive Inzidenzebene* $\bar{\varepsilon}_p$.

S 1.2. In $\bar{\varepsilon}_p$ sind A 4; A 5; A 6 triviale Folgen aus der Gleichheitsrelation, in die die Nachbarschaftsrelation entartet ist. $\bar{\varepsilon}_p$ ist also schon durch die Axiome A 1; A 2; A 3; $\overline{A}\,4$ definiert.

Das folgt unmittelbar aus $\overline{A}\,4$ und S 1.1.

1.3. Folgerungen aus A 1 bis A 6.

S 1.3. Auf den nach A 3; A 1 existierenden Geraden $P_i P_k$ gibt es die Punkte $Q_{ik} = Q_{ki} = (P_i P_k)(P_l P_m)$ mit $Q_{ik} \varnothing P_i, P_k$ $(i, k, l, m$ eine Permutation von $1, 2, 3, 4)$.

Es genügt, dies etwa für $i = 1$; $k = 2$ nachzuweisen: Nach A 2 gibt es den Schnittpunkt $Q_{12} = (P_1 P_2)(P_3 P_4)$. Wäre $Q_{12} \bigcirc P_1$, so würde wegen $P_1 \varnothing P_3$ aus A 6 folgen: $(P_1 P_3) \bigcirc (P_3 P_4)$, entgegen A 3. Ebenso folgt $Q_{12} \varnothing P_2$.

S 1.4. Es seien $P_i; P_k; P_l$ drei verschiedene Punkte aus A 3. Dann gilt für ein beliebiges P^* von ε_p: $P^* P_i \varnothing P^* P_k$ oder $P^* P_i \varnothing P^* P_l$.

[8]) Durch Übergang zu einer Kontraposition lassen sich A 5 und A 6 auch in symmetrischer Form formulieren. So kann man etwa an Stelle von A 5 schreiben: Aus $g \bigcirc h$; $g\,j \varnothing h\,j$ folgt $j \bigcirc g$; $j \bigcirc h$.

Denn wegen $P_k P_i \varnothing P_k P_l$ gilt nach A3 entweder $P_k P_i \varnothing P_k P^*$ oder $P_k P_l \varnothing P_k P^*$. Sei etwa $P_k P_i \varnothing P_k P^*$. Wäre $P^* P_i \bigcirc P^* P_k$, so würde aus A5 $P_i \bigcirc P_k$ folgen, entgegen A3; also gilt $P^* P_i \varnothing P^* P_k$.

S1.5. Zu P^* gibt es $g; h; j$ mit $g, h, j \mathrel{I} P^*$; $g \varnothing h$; $h \varnothing j$; $j \varnothing g$. (Die Existenz von drei Kreuzgeraden durch jeden Punkt.)

Beweis (Fig. 1). Nach S1.4 können wir etwa $P^* P_1 \varnothing P^* P_2$ annehmen. Gilt dann noch $P^* P_1 \varnothing P^* P_3$; $P^* P_2 \varnothing P^* P_3$, dann genügen $P^* P_1$; $P^* P_2$; $P^* P_3$ unseren Forderungen. Sei jetzt etwa $P^* P_2 \bigcirc P^* P_3$. Dann gilt nach A4: $P^* P_1 \varnothing P^* P_3$. Ferner gilt $P_2 P^* \bigcirc P_2 P_3$; $P_3 P^* \bigcirc P_3 P_2$, denn andernfalls würde mit $P^* P_2 \bigcirc P^* P_3$ aus A5 folgen: $P_2 \bigcirc P_3$. Wegen $P_2 P_1 \varnothing P_2 P_3$ folgt mit $P_2 P^* \bigcirc P_2 P_3$ nach A4: $P_2 P^* \varnothing P_2 P_1$. Ebenso folgt $P_3 P^* \varnothing P_3 P_1$. Schließlich können wir annehmen, daß etwa $P_1 P^* \varnothing P_1 P_3$ gilt (sonst gilt jedenfalls $P_1 P^* \varnothing P_1 P_2$, womit man ebenso weiterschließen kann). Damit sind $P_1 P^*$; $P^* P_3$; $P_3 P_1$ paarweise Kreuzgeraden. Es gilt also $P^* \varnothing P_1, P_3$. Denn wäre etwa $P^* \bigcirc P_1$, so würde aus A6 mit $P_1 \varnothing P_3$ folgen: $P_3 P_1 \bigcirc P_3 P^*$. Ebenso folgt $P^* \varnothing P_3$. Wir zeigen, daß für den nach S1.3 existierenden Punkt $Q = Q_{13}$ gilt: $P^* Q_{13} \varnothing P^* P_1, P^* P_3$. Dann genügen also $P^* P_1$; $P^* P_3$; $P^* Q_{13}$ unseren Forderungen. Wäre nun etwa $P^* Q_{13} \bigcirc P^* P_1$, so würde wegen $P_1 P^* \varnothing P_1 P_3 = P_1 Q_{13}$ mit A5 folgen: $P_1 \bigcirc Q_{13}$, entgegen S1.3.

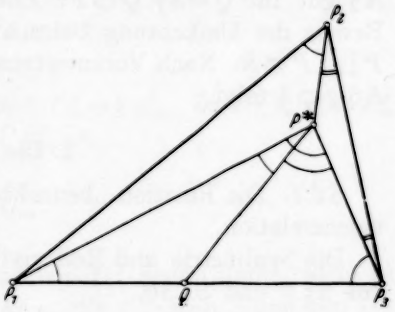

Fig. 1.

S1.6. Zu $P; R$ mit $P \varnothing R$ gibt es S mit $S \varnothing P, R$; $SP \varnothing SR$.

Denn es gibt PR. Von den nach S1.5 existierenden Geraden durch P gilt wenigstens für eine, etwa für g: $g \mathrel{I} P$; $g \varnothing PR$. Ebenso gibt es g' mit $g' \mathrel{I} R$; $g' \varnothing RP$. Für $S = g\,g'$ gilt nach A6: $S \varnothing P, R$ und nach A5: $g \varnothing g'$.

S1.7. Aus $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. (Transitivität der Nachbarrelation für Punkte.)

Wir beweisen die Kontraposition: Aus $P \varnothing R$ folgt $Q \varnothing P$ oder $Q \varnothing R$. Es gibt nämlich S mit der in S1.6 angegebenen Eigenschaft. Für SQ gilt nach A4 entweder $SQ \varnothing SP$ oder $SQ \varnothing SR$. Sei etwa $SQ \varnothing SP$. Dann gilt mit A6 und $P \varnothing S$: $P \varnothing Q$.

S1.8. Aus A1 bis A6 folgen die zu A1 bis A6 dualen Aussagen[9]).

Denn A1; A2 und A5; A6 sind bereits zueinander dual. Ein duales Gegenstück zu den vier Punkten aus A3 bilden die nach A3; A1 existierenden Geraden $g_1 = P_1 P_2$; $g_2 = P_2 P_3$; $g_3 = P_3 P_1$; $g_4 = Q_{12} Q_{23}$, wobei Q_{12}; Q_{23} nach S1.3 definiert sind. Zunächst gilt $g_i \varnothing g_k$ $(i \neq k; i, k = 1, 2, 3, 4)$: Für $i, k \neq 4$ folgt dies aus A3. Wäre $g_1 \bigcirc g_4$, so würde wegen $g_1 \varnothing g_2$ folgen: $P_2 \bigcirc Q_{23}$, im Widerspruch zu S1.3. Ebenso folgt $g_4 \varnothing g_2, g_3$. Weiter gilt aber auch $g_i g_k \varnothing g_l g_l$ $(i \neq k, l; k \neq l; i, k, l = 1, 2, 3, 4)$, wie man sich leicht überlegt. Die duale Aussage zu A4 folgt schließlich aus S1.7.

[9]) Das Duale einer Aussage A erhalten wir, wie üblich, indem wir in A die Geraden durch Punkte und die Punkte durch Geraden ersetzen.

S1.9. Zu g gibt es $P; Q; R$ mit $P, Q, R \mathrel{I} g$; $P \varnothing Q$; $Q \varnothing R$; $R \varnothing P$. (Die Existenz von drei Fernpunkten auf jeder Geraden.)

S1.10. Aus $g \bigcirc h$; $h \bigcirc j$ folgt $g \bigcirc j$. (Die Transitivität der Nachbarrelation für Geraden.)

Diese beiden Sätze sind dual zu S1.5 und S1.7. Wegen S1.8 sind sie also ebenfalls gültig.

S1.11. $g \bigcirc h$ gilt dann und nur dann, wenn es zu jedem $P \mathrel{I} g$ einen Nachbarpunkt $Q \mathrel{I} h$ und zu jedem $Q \mathrel{I} h$ einen Nachbarpunkt $P \mathrel{I} g$ gibt.

Es sei $g \bigcirc h$. Zu P mit $P \mathrel{I} g$ gibt es nach S1.5. j mit $j \mathrel{I} P$; $j \varnothing g$. Nach A5 gilt für $Q = hj$: $Q \bigcirc P$. Ebenso schließt man, von Q ausgehend. Zum Beweis der Umkehrung betrachten wir $R = g\,h$. Nach S1.9 gibt es P mit $P \mathrel{I} g$; $P \varnothing R$. Nach Voraussetzung gibt es Q mit $Q \mathrel{I} h$; $Q \bigcirc P$, woraus nach A6 $g \bigcirc h$ folgt.

2. Die Großgeometrie[7]).

S2.1. Die Relation „benachbart" für Punkte und Geraden ist eine Äquivalenzrelation.

Die Symmetrie und Reflexivität folgen aus D1 und D2, die Transitivität aus S1.7 und S1.10.

D5. Die Klassen benachbarter Punkte und benachbarter Geraden nennen wir *Großpunkte* $\overline{P}$ und *Großgeraden* $\overline{g}$. Die Relation „inzident" für ein Paar $\overline{P}; \overline{g}$ soll gelten, $\overline{P} \mathrel{I} \overline{g}$, wenn es $P; g$ mit $P \in \overline{P}$; $g \in \overline{g}$ so gibt, daß $P \mathrel{I} g$ gilt. Der so definierte Bereich heiße die zu ε_p gehörende *Großgeometrie* oder *Großinzidenzebene.*

S2.2. In der Großgeometrie gelten die Axiome A1; A2; A3; $\overline{\text{A}}$4. Wir bezeichnen sie daher auch mit $\overline{\varepsilon}_p$.

(a) Es gilt A1. Sind nämlich P und Q Repräsentanten von $\overline{P}$ und $\overline{Q}$, so repräsentiert gemäß D5 die Gerade PQ eine Verbindungsgerade von $\overline{P}; \overline{Q}$. Ebenso folgt die Gültigkeit von A2. Die durch die vier Punkte $P_1; P_2; P_3; P_4$ aus A3 bestimmten Großpunkte $\overline{P}_1; \overline{P}_2; \overline{P}_3; \overline{P}_4$ genügen wiederum einem Axiom A3; denn aus der Eigenschaft „nicht benachbart" in ε_p wird „verschieden" beim Übergang zur Großgeometrie $\overline{\varepsilon}_p$, und dies ist in $\overline{\varepsilon}_p$ gleichbedeutend mit „nicht benachbart". Denn aus $\overline{P} \bigcirc \overline{Q}$ folgt $\overline{P} = \overline{Q}$: $\overline{P} \bigcirc \overline{Q}$ bedeutet nämlich, daß es $P_1, P_2 \in \overline{P}$; $Q_1, Q_2 \in \overline{Q}$ gibt mit $g = P_1 Q_1$; $h = P_2 Q_2$; $g \varnothing h$. Nach A6 gilt dann für $R = g\,h$: $R \bigcirc P_1 \bigcirc P_2$; $R \bigcirc Q_1 \bigcirc Q_2$, also $\overline{P} = \overline{Q}$.

3. Affine Ebenen mit Nachbarelementen.

D6. Zu einer Geraden g_∞^* von ε_p gehört eine *affine Inzidenzebene* ε_a *mit Nachbarelementen.* Sie besteht aus der Gesamtheit der Geraden und Punkte von ε_p ausgenommen die Gerade g_∞^* und die zu g_∞^* benachbarten Geraden g_∞ sowie die mit g_∞ inzidierenden Punkte P_∞. Die Inzidenzrelation für ein Paar $g; P \in \varepsilon_a$ wird aus ε_p übernommen. Die nicht zu ε_a gehörenden Geraden g_∞ und Punkte P_∞ von ε_p heißen *uneigentlich*; insbesondere heißen g_∞^* und die

mit g_∞^* inzidierenden Punkte P_∞^* *ausgezeichnet uneigentlich.* $P, g \in \varepsilon_a$ heißen *eigentlich*[10]).

D7. Ist ε_p speziell eine Ebene $\bar{\varepsilon}_p$ mit Eindeutigkeitsaxiom $\bar{A}4$, so heißt die mit Hilfe einer Geraden gemäß D6 erklärte affine Inzidenzebene ε_a mit Nachbarelementen *(eindeutige) affine Inzidenzebene* $\bar{\varepsilon}_a$.

S3.1. Der Übergang von ε_p zu ε_a gemäß D6 bedeutet in der zugehörigen Großgeometrie $\bar{\varepsilon}_p$ den Übergang zu einer eindeutigen affinen Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_a$.

Denn die Konstruktion von ε_a aus ε_p bedeutet in der Großgeometrie die Herausnahme einer Großgeraden und der mit ihr inzidierenden Großpunkte aus $\bar{\varepsilon}_p$, also in der Tat die Konstruktion einer Ebene $\bar{\varepsilon}_a$.

S3.2. Seien $P, g \in \varepsilon_a$. Dann gilt $P \varnothing P_\infty; g \varnothing g_\infty$.

Das folgt unmittelbar aus D6.

S3.3. Zu $g \in \varepsilon_a$ gibt es genau einen Punkt $P_\infty^* = g\, g_\infty^*$. Zu $P \in \varepsilon_a$ und P_∞^* gibt es genau eine Verbindungsgerade $h = P P_\infty^* \in \varepsilon_a$.

Dies folgt aus S3.2.

S3.4. Aus $g \mathrel{I} P_\infty, Q_\infty; g \in \varepsilon_a$ folgt $P_\infty \bigcirc Q_\infty$.

Dies folgt aus S3.1.

S3.5. Für $P, Q \in \varepsilon_a$ gilt $P \bigcirc Q$ im Sinne von D1 genau dann, wenn es $g, h \in \varepsilon_a$ gibt mit $g \neq h; g, h \mathrel{I} P, Q$. Für $g, h \in \varepsilon_a$ gilt $g \bigcirc h$ im Sinne von D2 genau dann, wenn es zu $P \in \varepsilon_a; P \mathrel{I} g$ ein Q gibt mit $Q \in \varepsilon_a; Q \mathrel{I} h; Q \bigcirc P$ und wenn es zu $Q \in \varepsilon_a; Q \mathrel{I} h$ ein P gibt mit $P \in \varepsilon_a; P \mathrel{I} g; P \bigcirc Q$.

Das Letztere folgt aus S1.11 und S3.2.

D8. Für $g, h \in \varepsilon_a$ wird die Relation „g parallel h", $g \parallel h$, erklärt durch $g\, g_\infty^* = h\, g_\infty^*$. Die Negation wird mit $g \nparallel h$ bezeichnet.

S3.6. Eine affine Inzidenzebene ε_a mit Nachbarelementen hat folgende Eigenschaften (es sind dies diejenigen Eigenschaften, die wir später von ε_a allein benutzen werden): ε_a ist eine Menge von Punkten $P, Q, R, \ldots$, in der gewisse Teilmengen, genannt Geraden $g, h, j, \ldots$, ausgezeichnet sind. Statt $P \in g$ schreiben wir $P \mathrel{I} g$ und nennen P und g auch inzident. Die Negation wird mit $P \not\mathrel{I} g$ bezeichnet. P und Q heißen benachbart, $P \bigcirc Q$, wenn es $g; h$ gibt mit $g \neq h; g, h \mathrel{I} P, Q$. g und h heißen benachbart, $g \bigcirc h$, wenn es zu P mit $P \mathrel{I} g$ ein Q mit $Q \mathrel{I} h; Q \bigcirc P$ und zu Q mit $Q \mathrel{I} h$ ein P mit $P \mathrel{I} g; P \bigcirc Q$ gibt. Sind $P; Q$ nicht benachbart, $P \varnothing Q$, so heißen P und Q auch fern. Für die Geradenpaare g, h ist die symmetrische und reflexive Relation „parallel", $g \parallel h$, erklärt; die Negation wird mit $g \nparallel h$ bezeichnet.

Dabei gelten die Sätze:

(a) Zu $P; Q$ gibt es g mit $g \mathrel{I} P, Q$. Für g schreiben wir auch PQ und nennen es Verbindungsgerade.

(b) Es gibt drei Fernpunkte $P_1; P_2; P_3$ so, daß $P_i P_k \varnothing P_i P_l$ (i, k, l eine Permutation von 1, 2, 3).

(c) Zu g gibt es $P; Q$ mit $P, Q \mathrel{I} g; P \varnothing Q$.

[10]) Dies entspricht dem bekannten Übergang von einer eindeutigen projektiven Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ zu einer eindeutigen affinen Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_a$.

(d) Aus $P \bigcirc Q; Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$.
(e) Aus $g \bigcirc h; h \bigcirc j$ folgt $g \bigcirc j$.
(f) Aus $P \bigcirc Q; g = PR; h = QR; g \varnothing h$ folgt $R \bigcirc P, Q$.
(g) Aus $g \bigcirc h; P \mathrel{I} g, j; Q \mathrel{I} h, j; j \varnothing g$ folgt $P \bigcirc Q$.
(h) Aus $g \parallel h; h \parallel j$ folgt $g \parallel j$.
(i) Zu $g \parallel h; P \mathrel{I} g, j; j \varnothing g$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} h, j; j \varnothing h$.
(j) Zu $P; g$ gibt es genau ein h mit $h \parallel g; h \mathrel{I} P$.
[Die nächsten beiden Sätze folgen aus (a) bis (j).]
(k) Es sei $g \parallel h$. Dann gilt $g \bigcirc h$ dann und nur dann, wenn es $P; Q$ gibt mit $P \mathrel{I} g; Q \mathrel{I} h; P \bigcirc Q$.
(l) Es gebe $P_0; g; g'; h$ mit $P_0 \mathrel{I} g, g'; g \varnothing g'$. Dann gibt es P mit $P \mathrel{I} g, h; g \varnothing h$ oder P' mit $P' \mathrel{I} g', h; g' \varnothing h$.

Beweis. Zunächst ist es klar, daß die gemäß D6 erklärte Ebene den zu Anfang beschriebenen Charakter hat. Insbesondere kann wegen S1.11 die Eigenschaft „benachbart" auf die oben angegebene Weise beschrieben werden. Wir müssen also nur noch zeigen, daß die Sätze (a) bis (l) in ε_a gelten: (a) folgt aus A1. (b) gilt, da wenigstens einer der in A3 vorkommenden Punkte, etwa P_1, eigentlich ist. Nach S1.5 und S1.9 gibt es dann zwei Kreuzgeraden durch P_1 und auf jeder von ihnen einen eigentlichen Fernpunkt.

(c) folgt aus S1.9 und (d) und (e) folgen aus S1.7 und S1.10. (f) folgt aus A6 und (g) aus A5. (h) folgt aus D8 und S3.2. (i) folgt aus D8 und A6; denn wäre der Schnittpunkt von j und h uneigentlich, $hj = Q_\infty$, so würde nach S3.4 $Q_\infty \bigcirc P_\infty^* = g\, g_\infty^*$ gelten, also nach A6 $P \bigcirc P_\infty^*$. Aus $j \bigcirc h$ würde nach S 3.2, A5 $j \bigcirc g$ folgen.

(j) gilt wegen S3.3. Wenn in (k) $g \parallel h; P \mathrel{I} g; Q \mathrel{I} h; P \bigcirc Q$ gilt, so betrachten wir einen Punkt R mit $R \mathrel{I} g; R \varnothing P$ gemäß (c). Für $j = QR$ gilt wegen (g) und (i) $j \bigcirc g$ und $j \bigcirc h$, also nach (e) $g \bigcirc h$. Schließlich gilt auch (l), da für ein k mit $k \mathrel{I} P_0; k \parallel h$ wegen (e) $k \varnothing g$ oder $k \varnothing g'$ gilt, woraus mit (i) die Behauptung folgt.

Bemerkungen. Wir haben in S3.6 die wichtigsten Eigenschaften von ε_a zusammengestellt; dabei haben wir jedoch nicht näher untersucht, ob einige der genannten Sätze eine Folge der übrigen sind oder durch einfachere Sätze ersetzt werden können.

Vor allem bleibt es eine offene Frage, ob durch S3.6 die affine Inzidenzebene mit Nachbarelementen ε_a gekennzeichnet ist. Dazu müßte man zeigen, daß man eine Ebene mit den Eigenschaften von S3.6 in eine projektive Ebene mit Nachbarelementen ε_p einbetten kann. Wenn $\bar{A}4$ gilt, also ε_a eine eindeutige affine Ebene $\bar{\varepsilon}_a$ ist, dann ist eine solche Einbettung in eine projektive eindeutige Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ bekanntlich möglich: Von den Sätzen aus S3.6 werden dann nämlich ein Teil trivial und die übrigen [insbesondere (a), (b) und (j)] gestatten die Einführung einer uneigentlichen Geraden, durch welche $\bar{\varepsilon}_a$ zu einer Ebene $\bar{\varepsilon}_p$ ergänzt wird.

Gilt jedoch $\bar{A}4$ nicht, so gibt es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt außer der Parallelen noch weitere Nichtschneidende.

Außer den ausgezeichneten Idealpunkten, repräsentiert durch die Büschel paralleler Geraden, wird die Einführung weiterer Idealpunkte notwendig. Ob dieses auf Grund der Eigenschaften aus S3.6 so möglich ist, daß man dadurch eine Ebene vom Typ ε_p erhält, erscheint fraglich. Dies Problem ist von ähnlicher Art wie dasjenige, von einer begrenzten Ebene (mit Eindeutigkeitseigenschaften) auf eine vollständige Ebene zu schließen[11]). Letzteres ist bekanntlich möglich, wenn in der begrenzten Ebene gewisse Schnittpunktsätze gelten.

Auch in unserem Falle werden die folgenden Ergebnisse zeigen, daß man eine durch die Eigenschaften von S3.6 gekennzeichnete Ebene jedenfalls dann in eine Ebene ε_p einbetten kann, wenn gewisse Schließungssätze gelten. Vgl. S5.17.

4. Schließungssätze.

D9. Unter einem *Schließungssatz* oder *Schnittpunktsatz* Σ in ε_p verstehen wir eine Aussage folgender Art: Die Voraussetzung von Σ hat die Form: Es sei η_1 ein Element von ε_p (die η_i stehen hier für einen Punkt oder eine Gerade, und zwar ist bei einem bestimmten Schließungssatz genau festgelegt, um was für eine Art dieser beiden Elemente es sich handelt) und η_2 ein zweites Element von ε_p so, daß eine gegebenenfalls formulierte Inzidenzrelation zwischen η_1 und η_2 erfüllt ist; ferner seien $\eta_3, \ldots$ und schließlich η_n solche Elemente, daß eine gegebenenfalls formulierte Inzidenzrelation zwischen η_i und den $\eta_1, \ldots, \eta_{i-1}$ $(i = 3, \ldots, n)$ erfüllt ist. Außerdem sollen unter den Voraussetzungen von Σ noch solche Bedingungen vorkommen, die besagen, daß gewisse Elemente nicht benachbart sind, und zwar: Ist das Element η_k mit genau zwei Elementen η_i, η_j $(i, j < k)$ durch eine in Σ formulierte Inzidenzrelation verknüpft, so soll $\eta_i \varnothing \eta_j$ gelten; es soll dann also η_k eindeutig durch η_i, η_j bestimmt sein.

Ein Schließungssatz Σ ist nun eine Aussage der Art: Aus den Voraussetzungen von Σ folgt, daß zwei in den Voraussetzungen vorkommende Elemente inzidieren. Dabei wollen wir noch voraussetzen, daß der Schließungssatz so beschaffen sei, daß er in jeder projektiven Ebene über einem Körper gilt[12]).

D10. Einem Schließungssatz Σ in ε_p ordnen wir einen Schließungssatz $\bar{\Sigma}$ in der zugehörigen Großgeometrie $\bar{\varepsilon}_p$ dadurch zu, daß wir den Elementen η_i von Σ die Großelemente $\bar{\eta}_i$ aus $\bar{\varepsilon}_p$ zuordnen.

Daß die Definition D10 sinnvoll ist, folgt aus

S4.1. Beim Übergang von Σ zu $\bar{\Sigma}$ gemäß D10 gehen die Voraussetzungen von Σ wieder in die Voraussetzungen eines Schließungssatzes, wie sie in D9 formuliert sind, über.

[11]) Vgl. hierzu: R. Moufang, Die Einführung der idealen Elemente in die ebene Geometrie mit Hilfe des Satzes vom vollständigen Vierseit. Math. Ann. **105**, 759—778 (1931).

[12]) Vergleiche die grundsätzlichen Bemerkungen über Schnittpunktsätze bei R. Moufang, Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene. Math. Ann. **105**, 536—601 (1931).

Das folgt unmittelbar aus D9, wenn man beachtet, daß wegen S2.2 die Eigenschaft „nicht benachbart" in ε_p beim Übergang zu $\bar{\varepsilon}_p$ erhalten bleibt.

Bemerkungen. Es erhebt sich die Frage nach der Abhängigkeit zwischen Schließungssätzen in ε_p. Die bekannten Abhängigkeitsbeweise von Schließungssätzen in $\bar{\varepsilon}_p$ lassen sich im allgemeinen nicht ohne weiteres auf Ebenen ε_p mit Nachbarelementen übertragen, in denen $\bar{A}4$ nicht gilt; denn bei diesen Beweisen wird meistens wesentlich $\bar{A}4$, das Eindeutigkeitsaxiom, benutzt.

Daß die Abhängigkeitsfragen in einer Ebene ε_p mit nichttrivialen Nachbarelementen komplizierter sind als in einer Ebene $\bar{\varepsilon}_p$, können wir auch daraus abnehmen, daß einem Schließungssatz Σ in ε_p ein trivialer Schließungssatz $\bar{\Sigma}$ in $\bar{\varepsilon}_p$ entsprechen kann, das ist ein Schließungssatz $\bar{\Sigma}$, der in jeder eindeutigen projektiven Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ gilt.

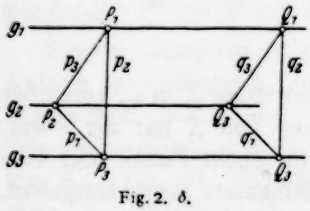

Fig. 2. δ.

Dies führt uns auf folgendes Axiom:

A^*. In ε_p sollen alle die Schließungssätze Σ gelten, die beim Übergang zu $\bar{\Sigma}$ gemäß D10 trivial werden, also eine Folge von A1, A2, A3 und $\bar{A}4$ sind.

Hiermit gilt dann offenbar der folgende Satz:

S4.2. Falls in ε_p das Axiom A^* gilt, dann ist jeder Beweis für die Abhängigkeit von Schließungssätzen in ε_p auch ein Beweis für die Abhängigkeit der entsprechenden Schließungssätze in ε_p.

Die Forderung A^* ist jedoch unbefriedigend, da man keinen Überblick über darin enthaltenen Aussagen hat. Auch dürfte es schwer fallen, bei einer vorgegebenen Ebene ε_p zu entscheiden, ob sie die Eigenschaft A^* hat oder nicht.

Wir wollen daher künftig das Axiom A^* nicht fordern und einen tieferliegenden Beitrag zum Abhängigkeitsproblem von Schließungssätzen in ε_p geben, der auch für eine spätere Anwendung wichtig ist. Dazu definieren wir zwei Schließungssätze in ε_a.

D11. Ein Schließungssatz Σ in ε_a ist ebenso definiert wie ein Schließungssatz in ε_p mit dem einzigen Unterschied, daß neben die Relation „inzident" hier auch die Relation „parallel" treten kann[13]).

D12. Unter dem *(affinen) kleinen Satz von Desargues* δ (Fig. 2; hier ist der gemeinsame Punkt von q_1 und g_2 mit Q_2 zu bezeichnen) verstehen wir folgenden Schließungssatz in ε_a[14]): Aus $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$; $P_2, Q_2 \mathrm{I} g_2$; $p_1, p_3 \mathrm{I} P_2$; $p_1, p_3 \oslash g_2$; $P_1 \mathrm{I} p_3, g_1$; $P_3 \mathrm{I} p_1, g_3$; $P_1 \oslash P_3$; $p_2 \mathrm{I} P_1 P_3$; $q_1 \mathrm{I} Q_2$; $q_1 \parallel p_1$; $q_3 \mathrm{I} Q_2$; $q_3 \parallel p_3$; $Q_1 \mathrm{I} q_3, g_1$; $Q_3 \mathrm{I} q_1, g_3$; $q_2 \mathrm{I} Q_1, Q_3$ folgt $q_2 \parallel p_2$.

Die Elemente $g_1; g_2; g_3; P_2; Q_2; p_1; p_3$, welche nicht durch zwei Relationen mit den vorhergehenden verknüpft sind, heißen *definierende Elemente* von δ.

[13]) Hiermit ist auch klar, was man unter einem Schließungssatz in einer durch die Eigenschaften aus S 3.6 definierten Ebene verstehen wird.

[14]) Ist ε_a speziell eine eindeutige affine Ebene $\bar{\varepsilon}_a$, so ist das Folgende als „kleiner Satz von Desargues" bekannt. Vgl. etwa W. KLINGENBERG[2]).

S4.3. Durch D12 ist ein Schließungssatz im Sinne von D11 definiert.

Beweis. Denn zunächst gilt δ bekanntlich in jeder affinen Ebene über einem Körper. Wir müssen noch zeigen, daß diejenigen Elemente, welche durch zwei Relationen mit den vorhergehenden verknüpft sind, durch diese Relationen eindeutig festgelegt sind. Es handelt sich um alle die Elemente, welche nicht zu den definierenden Elementen gehören, nämlich $P_1; P_3; p_2; q_1; q_3; Q_1; Q_3; q_2$.

Für den Beweis benötigen wir nur die in S3.6 angegebenen Eigenschaften von ε_a. Und zwar folgt die Eindeutigkeit von $P_1; P_3$ aus (i). Für p_2 folgt sie aus $P_1 \varnothing P_3$. Für $q_1; q_3$ folgt sie aus (j). Für q_2 folgt die Eindeutigkeit aus $Q_1 \varnothing Q_3$.

Entweder ist $g_1 \varnothing g_3$, und dann folgt $Q_1 \varnothing Q_3$ aus (k). Oder es ist $g_1 \bigcirc g_3$. Dann schließen wir folgendermaßen: Aus $P_1 \varnothing P_3$ folgt wegen (g) $p_2 \bigcirc g_1, g_3$; hieraus folgt wegen (e) $p_2 \varnothing p_1, p_3$; hieraus folgt wegen (f) $P_2 \varnothing P_1, P_3$; hieraus folgt wegen (k) $g_2 \varnothing g_1, g_3$; hieraus folgt wegen (k) $Q_2 \varnothing Q_1, Q_3$. Ferner folgt aus $P_2 \varnothing P_1, P_3$ und $P_1 \varnothing P_3$ wegen (g) $p_1 \varnothing p_3$; hieraus folgt wegen $q_1 \parallel p_1$; $q_3 \parallel p_3$ und wegen (i) $q_1 \varnothing q_3$, also wegen (f) und (d) $Q_1 \varnothing Q_3$.

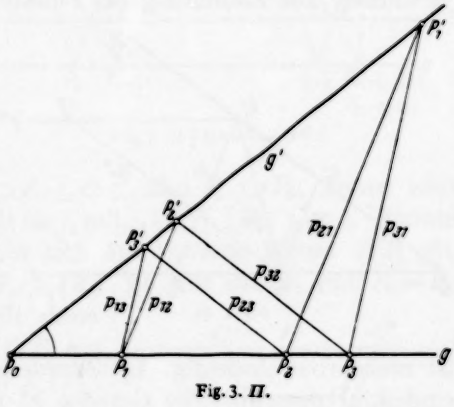

Fig. 3. *II*.

D13. Unter dem *(affinen) Satz von Pappos-Pascal* Π (Fig. 3) verstehen wir folgenden Schließungssatz in ε_a[15]): Aus $P_0 \mathrm{I} g, g'$; $g \varnothing g'$; $P_1' \mathrm{I} g'$; $P_1' \varnothing P_0$; $P_2, P_3 \mathrm{I} g$; $p_{32} \mathrm{I} P_3$; $P_2' \mathrm{I} g', p_{32}$; $g' \varnothing p_{32}$; $p_{31} \mathrm{I} P_3, P_1'$; $p_{21} \mathrm{I} P_2, P_1'$; $p_{23} \parallel p_{32}$; $p_{23} \mathrm{I} P_2$; $P_3' \mathrm{I} g', p_{23}$; $p_{12} \parallel p_{21}$; $p_{12} \mathrm{I} P_2'$; $P_1 \mathrm{I} p_{12}, g$; $p_{13} \parallel p_{31}$; $p_{13} \mathrm{I} P_3'$ folgt $p_{13} \mathrm{I} P_1$.

Die Elemente $P_0; g; g'; P_1'; P_2; P_3; p_{32}$, welche nicht durch zwei Relationen mit den vorhergehenden verknüpft sind, heißen *definierende Elemente* von Π.

S4.4. Durch D13 ist ein Schließungssatz im Sinne von D11 definiert.

Beweis. Zunächst gilt Π bekanntlich in jeder affinen Ebene über einem Körper. Wir müssen noch zeigen, daß die durch zwei Relationen mit den vorhergehenden Elementen verknüpften Elemente von Π durch diese Relationen eindeutig festgelegt sind. Es handelt sich um die Elemente $P_2'; p_{31}; p_{21}; p_{23}; P_3'; p_{12}; P_1; p_{13}$. Wieder verwenden wir S3.6.

Für P_2' folgt es unmittelbar aus der Voraussetzung $p_{32} \varnothing g'$; für p_{31} und p_{21} folgt dies wegen $P_1' \varnothing P_0$ und $g \varnothing g'$ aus (f). Für p_{23} folgt es aus (j), für P_3' aus (i). Für p_{12} folgt es aus (j), für P_1 aus $p_{21} \varnothing g$ und (i) [dabei folgt $p_{21} \varnothing g$ aus $P_1' \varnothing P_0$ und $g \varnothing g'$ mit (g)]. Für p_{13} folgt die Eindeutigkeit aus (j).

[15]) Ist speziell ε_a eine eindeutige affine Ebene $\bar{\varepsilon}_a$, so ist das Folgende als „affiner Satz von Pappos-Pascal" bekannt. Vgl. etwa W. KLINGENBERG[2]).

5. Die Streckenrechnung.

5.1. Die Streckenrechnung in ε_a. Wir führen nach dem HILBERTschen Vorbild in ε_a eine Streckenrechnung ein[4]).

D 14. Unter einem *Bezugssystem* $\mathfrak{B}$ (Fig. 4) in ε_a verstehen wir Elemente $P_0; g; g'; P_1; P_1'$ mit $g, g' \mathrel{I} P_0$; $g \not\equiv g'$; $P_1 \mathrel{I} g$; $P_1' \mathrel{I} g'$; $P_1, P_1' \not\equiv P_0$.

S 5.1. Im Bezugssystem $\mathfrak{B}$ gilt $P_1 \not\equiv P_1'$ und für $g_1 = P_1 P_1'$ gilt $g_1 \not\equiv g, g'$. Dies folgt aus (g) und (f).

D 15. Im Bezugssystem $\mathfrak{B}$ (Fig. 4) definieren wir noch ergänzend: $g_1 = P_1 P_1'$ und g^* mit $g^* \parallel g$; $g^* \mathrel{I} P_1'$. Die Punkte von g bezeichnen wir mit $P_a, P_b, \ldots$. Zu P_a gibt es g_a mit $g_a \parallel g_1$; $g_a \mathrel{I} P_a$. Zu g_a ist eindeutig P_a' durch $P_a' \mathrel{I} g_a, g'$ bestimmt. Die Zuordnung der Punkte $P_a, P_b, \ldots$ zu den Punkten $P_a', P_b', \ldots$

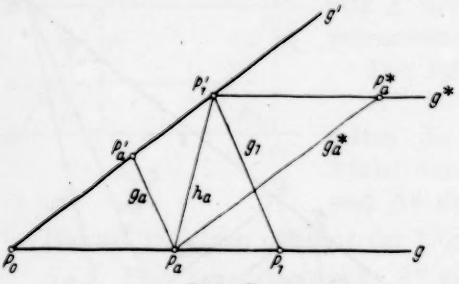

Fig. 4. $\mathfrak{B}$.

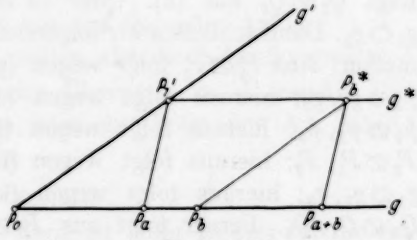

Fig. 5. $a+b$.

ist umkehrbar eindeutig. Insbesondere ist $P_0 = P_0'$. Einem P_a sind weiterhin eindeutig zugeordnet die Geraden g_a^* mit $g_a^* \mathrel{I} P_a$; $g_a^* \parallel g'$ und $h_a = P_a P_1'$ und der Punkt P_a^* mit $P_a^* \mathrel{I} g_a^*, g^*$. Wir nennen die Punkte $P_a, P_b, \ldots$ von g auch *Strecken* und bezeichnen sie dann mit $a, b, \ldots$. Insbesondere bezeichnen wir die durch P_1 und P_0 gegebenen Strecken mit 1 und 0.

S 5.2. Die in D 15 ausgesprochenen eindeutigen Zuordnungen folgen aus S 3.6. Ferner gilt $P_a \not\equiv P_a^*$ wegen (k).

D 16. Wir ordnen dem geordneten Streckenpaar $a; b$ eine mit $a+b$ bezeichnete Strecke zu nach der Vorschrift: $P_{a+b}\, P_b^* \parallel h_a$. Diese Zuordnung heiße *Addition*; $a+b$ heiße *Summe* von $a; b$ (Fig. 5).

S 5.3. (I) Die Summe $a+b$ existiert für jedes Paar $a; b$ und ist eindeutig festgelegt. (II) Es gibt zu $a; b$ eindeutig bestimmte Strecken x und y so, daß $x+a=b$ und $a+y=b$ gelten. (III) Es ist $a+0=0+a=a$. (IV) Aus $P_a, P_b \circ P_0$ folgt $P_{a+b} \circ P_0$; $P_{b+a} \circ P_0$; $P_{a+c}, P_{c+b} \circ P_c$.

(I), (II), (III) folgen unmittelbar aus D 16 und S 3.6. (IV) gilt, weil aus $P_a \circ P_0$ mit (f) folgt $h_a \circ g'$ und mit (i) hieraus $P_{a+b}\, P_b^* \circ g_b^*$. Wegen $g_b^* \not\equiv g$ folgt mit (g) $P_{a+b} \circ P_b$, also aus $P_b \circ P_0$ mit (d) $P_{a+b} \circ P_0$. Ebenso folgt der Rest.

D 17. Wir ordnen dem geordneten Streckenpaar $a; b$ eine mit $a\,b$ bezeichnete Strecke zu nach der Vorschrift: $P_{ab} \mathrel{I} j_a, g$ mit $j_a \mathrel{I} P_b'$; $j_a \parallel h_a$. Diese Zuordnung heiße *Multiplikation*, $a\,b$ das *Produkt* von $a; b$ (Fig. 6).

S 5.4. (I) Das Produkt $a\,b$ existiert stets und ist eindeutig festgelegt. (II) Es gibt zu $a; b$, falls $P_a \not\equiv P_0$, eindeutig bestimmte x und y so, daß $x\,a = b$

und $a\,y = b$ gelten. (III) Es gilt $a\,1 = 1\,a = a$. $a\,0 = 0\,a = 0$. (IV) Aus $P_a \bigcirc P_0$ folgt $P_{ab} \bigcirc P_0$; $P_{ba} \bigcirc P_0$. (V) Aus $P_a, P_b \varnothing P_0$ folgt $P_{ab} \varnothing P_0$. (VI) Zu a mit $P_a \bigcirc P_0$ gibt es b; c mit $b, c \neq 0$; $a\,b = 0$; $c\,a = 0$.

Beweis. (I) folgt aus D17 mit $h_a \varnothing g$ und (i). (II) gilt, da aus $P_a \varnothing P_0$ folgt $h_a \varnothing g'$; mit Hilfe von j_a mit $j_a \parallel h_a$; $j_a \mathrel{I} P_b$ ist P'_y durch $P'_y \mathrel{I} g'$, j_a eindeutig festgelegt. Ferner gilt mit $P_a \varnothing P_0$ auch $P'_a \varnothing P_0$. Damit ist $j_x = P_b P'_a$ eindeutig bestimmt. (III) folgt unmittelbar aus D17.

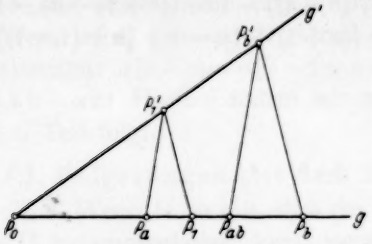

Fig. 6. ab.

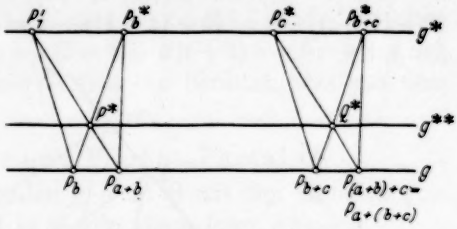

Fig. 7. $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(IV) folgt, da mit $P_a \bigcirc P_0$ gilt $h_a \bigcirc g'$; $j_a \bigcirc g'$, also $P_{ab} \bigcirc P_0$. Ferner folgt aus $P_a \bigcirc P_0$ auch $P'_a \bigcirc P_0$; mit $h_b \varnothing g$ gilt für j_b mit $j_b \parallel h_b$; $j_b \mathrel{I} P'_a$: $j_b \varnothing g$. Hieraus folgt $P_{ba} \bigcirc P_0$ mit $P_{ba} \mathrel{I} g, j_b$. (V) ergibt sich auf ähnliche Weise. (VI) gilt, weil aus $h_a \bigcirc g'$ folgt $j_a \bigcirc g'$ mit $j_a \mathrel{I} P_0$; $j_a \parallel h_a$. Es gibt also P'_b mit $P'_b \neq P_0$; $P'_b \mathrel{I} g'$, j_a. Für das zugehörige b gilt dann $a\,b = 0$; $b \neq 0$. Ferner gibt es zu $P'_a \bigcirc P_0$ ein j_c mit $j_c \mathrel{I} P_0$, P'_a; $j_c \neq g'$. Durch h_c mit $h_c \mathrel{I} P'_1$; $h_c \parallel j_c$ ist dann ein c bestimmt mit $c\,a = 0$; $c \neq 0$.

D18. Falls $P_a \bigcirc P_0$, so heißt die zugehörige Strecke a *Nullteiler*. Die Menge der Nullteiler bezeichnen wir mit $\boldsymbol{N}$.

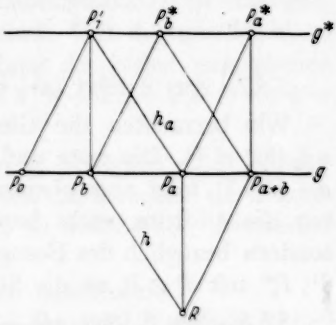

Fig. 8. $a+b = b+a$.

5.2. Folgerungen mit δ.

S5.5. Aus δ folgt $(a+b)+c = a+(b+c)$ für $a+b \notin \boldsymbol{N}$.

Beweis (Fig. 7). Denn aus $a+b \notin \boldsymbol{N}$ folgt $h_{a+b} \varnothing g'$. Nach (i) gibt es damit P^* mit $P^* \mathrel{I} g^*_b$, h_{a+b}. Es gibt g^{**}; Q^* mit $g^{**} \mathrel{I} P^*$; $g^{**} \parallel g^* \parallel g$; $Q^* \mathrel{I} g^{**}$, g^*_{b+c}. Wir fassen g; g^{**}; g^*; P^*; Q^*; h_{a+b}; g^*_b als definierende Elemente von δ auf. Man überzeugt sich leicht, daß die notwendigen Voraussetzungen dafür, daß die übrigen Elemente von δ eindeutig bestimmt sind, gelten. Somit folgt aus δ: $Q^* \mathrel{I} P^*_c\, P_{(a+b)+c}$, wobei wir das Ergebnis etwas anders formuliert haben als in D12. Indem wir hiermit g; g^{**}; g^*; P^*; Q^*; g^*_b; h_{a+b} als definierende Elemente von δ wählen, folgt $P^*_{b+c}\, P_{(a+b)+c} \parallel P^*_b\, P_{a+b}$. Da anderseits auch $P^*_{b+c}\, P_{a+(b+c)} \parallel P^*_b\, P_{a+b}$ gilt und $P^*_b\, P_{a+b} \varnothing g$ ist, folgt $P_{(a+b)+c} = P_{a+(b+c)}$.

S5.6. Aus δ folgt $a+b = b+a$.

Beweis (Fig. 8). Es sei zunächst $a \notin \boldsymbol{N}$. Es gibt h mit $h \mathrel{I} P_b$; $h \parallel h_a \parallel P^*_b\, P_{a+b}$. Die Elemente h_a; $P^*_b\, P_{a+b}$; h; P^*_b; P_{a+b}; g^*_b; g^* bestimmen als definierende

Elemente von δ die übrigen eindeutig; so gilt insbesondere $g_b^* \varnothing P_b^* P_{a+b}$ wegen $a \notin \boldsymbol{N}$. Aus δ folgt mit $R; R \mathrel{I} h; R P_{a+b} \parallel P_b P_b^* : R P_a \parallel h_b$. Damit wählen wir $R P_{a+b}$; g_b^*; g_a^*; P_b; P_b^*; g; h als definierende Elemente von δ, wobei insbesondere $h \varnothing g_b^*$ aus $a \notin \boldsymbol{N}$ folgt. Aus δ folgt $P_a^* P_{a+b} \parallel P_a R \parallel h_b$. Da auch $P_a^* P_{b+a} \parallel h_b$ gilt und $h_b \varnothing g$, folgt $P_{a+b} = P_{b+a}$.

Hiermit gilt auch im Fall $b \notin \boldsymbol{N}$: $a+b=b+a$. Es sei jetzt $a, b \in \boldsymbol{N}$. Dann folgt (da nach S5.3 aus $c \in \boldsymbol{N}$; $d \notin \boldsymbol{N}$ folgt $c+d \notin \boldsymbol{N}$) mit S5.5: $a+b = a+(b+(1-1)) = a+((b+1)-1) = (a+(b+1))-1 = ((b+1)+a)-1 = (b+(1+a))-1 = (b+(a+1))-1 = b+((a+1)-1) = b+(a+(1-1)) = b+a$.

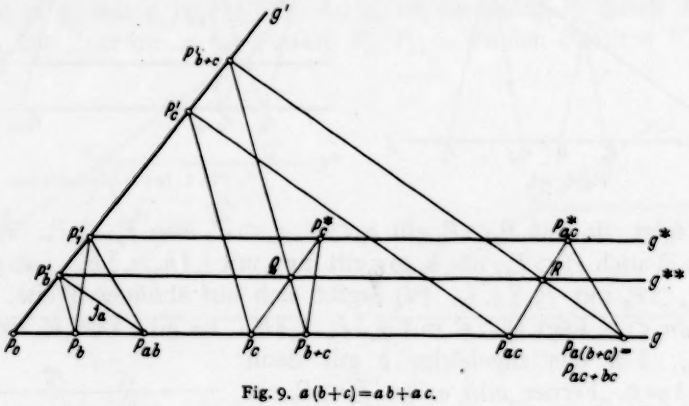

Fig. 9. $a(b+c)=ab+ac$.

S5.7. Aus δ folgt $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Wir betrachten die Gleichungen $(a+b)+c=c+(a+b)=a+(c+b)=a+(b+c)$ [16]). Die erste und dritte Gleichung folgen aus S5.6. $c+(a+b)=a+(c+b)$ folgt aber ebenso wie die Gleichung $a+b=b+a$ in S5.6, wenn wir die Addition nicht bezüglich des Bezugssystems $\mathfrak{B}$ aus D14 erklären, sondern bezüglich des Bezugssystems $\mathfrak{B}'$, in welchem die Elemente $P_b; g; g_b^*; P; P_b^*$ mit $P \varnothing P_b$ an die Stelle von $P_0; g; g'; P_1; P_1'$ treten.

S5.8. Aus δ folgt $a(b+c)=ab+ac$ [17]).

Beweis (Fig. 9; hier ist P_{ab+ac} an Stelle von P_{ac+bc} zu lesen). In der Bezeichnungsweise von D15 wird also behauptet: $P_{ac}^* P_{a(b+c)} \parallel P_1' P_{ab} = h_{ab}$.

[16]) Die geometrische Bedeutung dieser Zerlegung des Assoziativgesetzes in drei Gleichungen erhellt aus einer Bemerkung von F. BACHMANN, vgl. W. KLINGENBERG[2]) S. 130.

[17]) Mit diesem Ergebnis haben wir jetzt alle diejenigen Rechengesetze aus δ hergeleitet, die sich auch in einer eindeutigen Ebene $\bar{\varepsilon}_a$ aus δ ergeben, vgl. etwa W. KLINGENBERG[2]). In $\bar{\varepsilon}_a$ kann man jetzt noch die Geradengleichung aus δ herleiten; die Strecken bilden dann das sog. Veblen-Wedderburn-System, vgl. M. HALL[3]). Unsere Herleitung der Geradengleichung in ε_a gemäß S5.14 benutzt aber nicht nur den Schließungssatz δ; mit unserer Methode kommen wir also nicht zu einem verallgemeinerten Veblen-Wedderburn-System, welches die Ebenen ε_a in denen δ gilt, kennzeichnen würde. Es wäre interessant zu erfahren, ob man nicht durch andere Anordnung der Beweise doch noch die Eigenschaften des bis hierher unter Verwendung von δ konstruierten Zahlsystems vollständig angeben kann.

Es sei zunächst $c \notin \boldsymbol{N}$. Es gibt g^{**} mit $g^{**} \mathrm{I} P_b'$; $g^{**} \| g$ und Q mit $Q \mathrm{I} g^{**}$, g_{b+c}. $g; g^{**}; g^*; P_b'; Q; g'; g_b$ bilden ein System definierender Elemente für δ, so daß $Q \mathrm{I} g_c^*$ folgt. Es gibt R mit $R \mathrm{I} g^{**}, g_{ac}^*$. Damit bestimmen $g'; g_c^*; g_{ac}^*$; $P_c; Q; g; g_c$ als definierende Elemente von δ die anderen Elemente von δ eindeutig; insbesondere gilt wegen $c \notin \boldsymbol{N}$: $P_c' \varnothing P_{ac}$. Mit k_a; $k_a \| P_c' P_{ac}$; $k_a \mathrm{I} P_{b+c}'$, $P_{a(b+c)}$ folgt damit aus δ: $R \mathrm{I} k_a$. Es gibt j_a mit $j_a \| h_a$; $j_a \mathrm{I} P_b'$. Damit bilden $g; g^{**}; g^*; P_b'; R; g'; j_a$ ein System definierender Elemente für δ, aus welchem die Behauptung $P_1' P_{ab} \| P_{ac}^* P_{a(b+c)}$ folgt.

Wenn $c \in \boldsymbol{N}$ gilt, so folgt mit $c+1 \notin \boldsymbol{N}$ und S5.6; S5.7 und dem eben Bewiesenen: $a(b+c) = a(b-1+c+1) = a(b-1) + a(c+1) = a\,b - a + a\,c + a = a\,b + a\,c$. Hierbei haben wir auch $a(-1) = -a$ benutzt, was aus dem ersten Teil folgt.

5.3. Folgerungen mit dem Satz von Pappos-Pascal Π.

S5.9. Wenn Π so gilt, daß die Geraden $g; g'$ in $\mathfrak{B}$ mit den Geraden $g; g'$ von Π zusammenfallen, kurz, wenn Π in $\mathfrak{B}$ gilt, dann folgt $a\,b = b\,a$.

Die Elemente P_0; g; g'; P_1'; P_b; P_a; g_b bilden nämlich gerade ein zulässiges System von Erzeugenden für Π.

S5.10. Gilt Π in $\mathfrak{B}$ und gilt δ, so folgt $(a\,b)c = a(b\,c)$.

Von den Gleichungen $(a\,b)\,c = c(a\,b) = a(c\,b) = a(b\,c)$[16]) sind die erste und dritte eine Folge von S5.9. $c(a\,b) = a(c\,b)$ folgt für $b \notin \boldsymbol{N}$ ebenfalls direkt aus Π, da dann $P_0; g; g'; P_b'; P_{ab}; P_{cb}; g_{ab}$ den Schließungssatz Π so erzeugen, daß die übrigen Elemente eindeutig bestimmt sind. Gilt dagegen $b \in \boldsymbol{N}$, so schließen wir mit $b' = b - 1 \notin \boldsymbol{N}$ unter Verwendung der bisher gewonnenen Regeln: $(a\,b)\,c = \big(a(b'+1)\big)\,c = (a\,b' + a)\,c = (a\,b')\,c + a\,c = a(b'\,c) + a\,b = a(b'\,c + c) = a\big((b'+1)\,c\big) = a(b\,c)$.

S5.11. Führt man in ε_a eine Streckenrechnung bezüglich eines Bezugssystems $\mathfrak{B}$ ein und gelten Π in $\mathfrak{B}$ und δ, so bilden die Strecken einen kommutativen Ring $\boldsymbol{R}$ mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und die Nullteiler ein Ideal $\boldsymbol{N}$ bilden.

Das ist eine Zusammenfassung der bisherigen Resultate.

S5.12. Neben der Basis $\mathfrak{B}$ betrachten wir die durch die Elemente $P_0; g'; g; P_1'; P_1$ definierte Basis $\mathfrak{B}'$. Die Strecken in $\mathfrak{B}'$ werden durch die Punkte $P_a', P_b', \ldots$ von $\mathfrak{B}$ repräsentiert; wir bezeichnen sie mit $a', b', \ldots$. An Stelle von $P_a', P_b', \ldots$ schreiben wir auch $P_{a'}, P_{b'}, \ldots$. Wenn jetzt die Voraussetzungen von S5.11 gelten, dann bilden die Strecken $a', b', \ldots$ bezüglich der zu $\mathfrak{B}'$ gehörenden Streckenrechnung einen zu $\boldsymbol{R}$ isomorphen Ring $\boldsymbol{R}'$.

Beweis. Wir bezeichnen die Verknüpfungen der Strecken $a', b', \ldots$ mit $a' + b'$ und $a'\,b'$. Wir wollen zeigen, daß $(a\,b)' = a'\,b'$ und $(a+b)' = a' + b'$ gelten. Ersteres ist, wie man leicht einsieht, äquivalent mit der jedenfalls in $\boldsymbol{R}$ gültigen Regel $a^{-1}(a\,b) = (a^{-1}\,a)\,b$[18]).

$(a+b)' = a' + b'$ beweisen wir (Fig. 10) mit Hilfe von $g_{a'}^*$ mit $g_{a'}^* \| g \| g^*$; $g_{a'}^* \mathrm{I} P_a'$ und Q mit $Q \mathrm{I} g_b^*, g_{a'}^*$. Hiermit sind nämlich $g; g_{a'}^*; g^*; P_a'; Q; g'; g_a$

[18]) Hier ist $a \notin \boldsymbol{N}$ vorausgesetzt. Für $a \in \boldsymbol{N}$ schließt man mit $a = a^* + 1$, $a^* \notin \boldsymbol{N}$ und der Regel $(a+b)' = a' + b'$ folgendermaßen: $(a\,b)' = (a^*\,b + b)' = a^{*\prime}\,b' + b' = a'\,b'$.

zulässige definierende Elemente von δ, so daß $Q \mathrel{I} g_{a+b}$ folgt. Es gibt $P_{a'}^*$ mit $P_{a'}^* \mathrel{I} g_1^*, g_{a'}^*$. Die Elemente $g_1^*; g_b^*; g'; P_b'; Q; g_b; g$ definieren eindeutig δ, woraus $P_{a'}^* P_{a+b}' \parallel P_1 P_b'$ folgt. Andererseits gilt $P_1 P_b' \parallel P_{a'}^* P_{b'+a'}$, woraus, da P_{a+b}' und $P_{b'+a'}$ beide eindeutig definiert sind, $(a+b)' = b' + a' = a' + b'$ folgt.

D 19. Wir geben eine Vorschrift an, nach der jedem Punkt $P \in \varepsilon_a$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ ein geordnetes Streckenpaar $(a; b)$ als *affine Koordinaten bezüglich* $\mathfrak{B}$ zugeordnet werden: Dazu bestimmen wir $g_P; g_P'$ durch $g_P, g_P' \mathrel{I} P$; $g_P \parallel g$; $g_P' \parallel g'$ und $P_a; P_b'$ durch $P_a \mathrel{I} g, g_P'$; $P_b' \mathrel{I} g', g_P$. Durch P_a und P_b' sind nach D15 eindeutig a und b bestimmt.

S 5.13. Die Punkte $P \in \varepsilon_a$ und ihre Koordinaten entsprechen sich eindeutig.

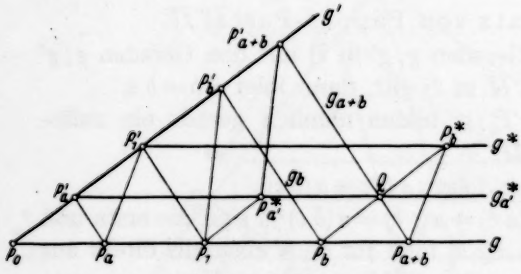

Fig. 10. $(a+b)' = a' + b'$.

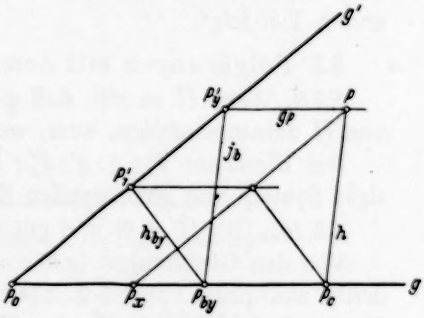

Fig. 11. $b\,y + x = c$.

Dies folgt aus den einfachsten Eigenschaften von ε_a gemäß S3.6.

S 5.14. Die Geraden $h \in \varepsilon_a$ lassen sich in bezug auf $\mathfrak{B}$ umkehrbar eindeutig auf die bis auf einen gemeinsamen Faktor $f \notin \boldsymbol{N}$ festgelegten geordneten Elementtripel $(u; v; w)$ von $\boldsymbol{R}$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ abbilden. Sind $(x; y)$ die Koordinaten eines Punktes $P \in \varepsilon_a$, so gilt $P \mathrel{I} g$ genau dann, wenn $u\,x + v\,y + w = 0$ gilt.

Beweis. Gemäß S3.6 (l) nehmen wir zunächst an (Fig. 11): Es gibt P_c mit $P_c \mathrel{I} g, h$; $g \not\parallel h$. Für P mit den Koordinaten $(x; y)$ gelte $P \mathrel{I} h$. Es gibt h_b mit $h_b \mathrel{I} P_1'$; $h_b \parallel h$ und P_b mit $P_b \mathrel{I} g, h_b$. Es gibt j_b mit $j_b \parallel h_b \parallel h$; $j_b \mathrel{I} P_y'$ und $P_{by} \mathrel{I} g, j_b$. Die Elemente $g; g_P; g^*; P_y'; P; g'; j_b$ definieren eindeutig δ, woraus $b\,y + x = c$ folgt.

Andernfalls gibt es P_c' mit $P_c' \mathrel{I} g', h$; $g' \not\parallel h$. Dann folgt wie eben für ein $P' = (x'; y')$ mit $P' \mathrel{I} h$: $b'\,x' + y' = c'$, womit wegen S5.12 auch $b\,x + y = c$ gilt.

Die so der Geraden h eindeutig zugeordneten Elementtripel der Form $(1; b; -c)$ oder $(b; 1; -c)$ bestimmen umgekehrt die Gerade h eindeutig durch die Forderungen $h \parallel h_b$; $h \mathrel{I} P_c$ oder $h \parallel h_b' = P_1 P_b'$; $h \mathrel{I} P_c'$. Dabei folgt aus der linearen Gleichung die Gültigkeit der Inzidenzrelation.

S 5.15. Zu $a, b \in \boldsymbol{R}$ gibt es $m \in \boldsymbol{R}$ oder $n \in \boldsymbol{R}$ so, daß $a = m\,b$ oder $b = n\,a$ gilt.

Sei $P = (a; b)$. Es gibt $h = P P_0$. Nach S5.14 gibt es zu h ein Tripel $(u; v; w)$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ und $w = 0$; $u\,a + v\,b = 0$. Nach S5.11 folgt hieraus bei $u \notin \boldsymbol{N}$: $a = -v\,u^{-1}\,b$ und bei $v \notin \boldsymbol{N}$: $b = -u\,v^{-1}\,a$.

D 20. Unter einem HJELMSLEV*schen Ring* oder *H-Ring* $\boldsymbol{R}_H$ verstehen wir einen kommutativen Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler Einheit ist und von zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt.

S 5.16. In einer affinen Inzidenzebene mit Nachbarelementen ε_a, oder allgemeiner, in einer durch die Eigenschaften von S 3.6 definierten Ebene mögen die Schließungssätze δ und Π in der angegebenen Formulierung gelten, dabei Π mit der Beschränkung auf ein festes Geradenpaar $g; g'$. Wählt man $g; g'$ als Achsen eines Bezugssystems, so läßt sich mit Hilfe der nach dem HILBERTschen Vorbild eingeführten Streckenrechnung zeigen, daß die Ebene ε_a in der üblichen Weise als affine Geometrie über einem H-Ring beschrieben werden kann: Den Punkten entsprechen die geordneten Elementpaare $(x; y)$, den Geraden die homogenen Tripel $(u; v; w)$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ und der Inzidenzrelation die lineare Gleichung $u\,x + v\,y + w = 0$. $u\,v' - v\,u' = 0$ bedeutet, daß die Geraden g und g' mit den Koordinaten $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ parallel sind.

Dies ist eine Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse.

5.4. Der Übergang zu ε_p.

S 5.17. Es sei eine affine Ebene ε_a mit Nachbarelementen auf die in S 5.16 angegebene Weise als affine Geometrie über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ beschrieben. Dann kann man die projektive Inzidenzebene ε_p, in die ε_a eingebettet ist, auf folgende Weise als projektive Geometrie über dem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ beschreiben: Den Punkten und Geraden von ε_p entsprechen die geordneten homogenen Elementtripel $(x; y; z)$ und $(u; v; w)$ von $\boldsymbol{R}_H$, in denen nicht alle Elemente Nullteiler sind, und die Inzidenzrelation wird durch $u\,x + v\,y + w\,z = 0$ beschrieben. Den nicht zu ε_a gehörenden Elementen von ε_p entsprechen die Tripel mit $z \in \boldsymbol{N}$ und $u, v \in \boldsymbol{N}$.

Gleichzeitig lehrt der Beweis dieses Satzes, daß eine Ebene ε_a^*, die durch die Eigenschaften von S 3.6 definiert ist, sich in eine Ebene ε_p einbetten läßt, sobald in ε_a^* die Schließungssätze δ und Π in der in S 5.16 angegebenen Weise gelten.

Beweis. Wir verwenden die durch die Elemente $P_0; g; g'; P_1; P_1'$ definierte Basis $\mathfrak{B}$. Zu einem uneigentlichen Punkt $P_\infty \notin \varepsilon_a$ gibt es $h_0 = P_0 P_\infty$. (I) Es sei $h_0 \not\circ g$. Dann gilt für $h_1 = P_1 P_\infty : h_1 \not\circ h_0$. P_∞ ist also eindeutig durch h_0 und h_1 bestimmt. Die Koordinaten von $h_0; h_1$ normieren wir zu $(1; v; 0)$; $(1; v_1; -1)$, wobei $v - v_1 \in \boldsymbol{N}$ ist. Damit ordnen wir dem Punkt P_∞ die Koordinaten $(-v; 1; v_1 - v)$ zu, aus denen sich umgekehrt eindeutig die Koordinaten von h_0 und h_1 bestimmen. Auf diese Weise ist jedem homogenen Tripel $(x; y; z)$ mit $y \notin \boldsymbol{N}$; $z \in \boldsymbol{N}$ eineindeutig ein uneigentlicher Punkt zugeordnet.

(II) Es gelte $h_0 \circ g$, also $h_0 \not\circ g'$. Es gibt h_1' mit $h_1' = P_1' P_\infty$; $h_1' \not\circ h_0$. P_∞ ist also eineindeutig durch $h_0; h_1'$ bestimmt. Die Koordinaten von $h_0; h_1'$ normieren wir zu $(u; 1; 0)$; $(u_1'; 1; -1)$, wobei $u, u - u_1' \in \boldsymbol{N}$ ist. Als Koordinaten von P_∞ nehmen wir $(1; -u; u_1' - u)$. Umgekehrt ist jedem homogenen Tripel $(x; y; z)$ mit $y, z \in \boldsymbol{N}$; $x \notin \boldsymbol{N}$ hierdurch ein P_∞ zugeordnet.

Die uneigentlichen Geraden g_∞ werden durch die Punktepaare $P_\infty = g\, g_\infty$; $P'_\infty = g'\, g_\infty$ bestimmt. Die Koordinaten von P_∞; P'_∞ haben die Form $(0;1;z)$; $(1;0;z')$ mit $z, z' \in \boldsymbol{N}$. Damit ordnen wir g_∞ das Tripel $(z';z;1)$ zu und umgekehrt bestimmt jedes Tripel $(u;v;w)$ mit $u, v \in \boldsymbol{N}$ und $w \notin \boldsymbol{N}$ eindeutig zwei Punkte P_∞; P'_∞ und damit die Gerade $g_\infty = P_\infty P'_\infty$.

Zum Schluß überzeugt man sich davon, daß bei diesen Definitionen die Inzidenzrelation in ε_p durch die lineare Gleichung $u\,x + v\,y + w\,z = 0$ beschrieben wird.

6. Projektive und affine Ebenen über H-Ringen.

6.1. Die projektive Ebene über einem H-Ring.

D21. Die projektive Ebene über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$, $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$, wird von den als Punkte $P; Q; R; \ldots$ und Geraden $g; h; j; \ldots$ bezeichneten homogenen (d.h. bis auf einen gemeinsamen Faktor $f \notin \boldsymbol{N}$ festgelegten) geordneten Elementtripeln $(x; y; z)$ und $(u; v; w)$ gebildet, zwischen denen die Relation „inzident" durch $u\,x + v\,y + w\,z = 0$ erklärt ist. Dabei sollen in den Tripeln nicht alle Elemente Nullteiler sein.

S6.1. In $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ gilt $g \bigcirc g'$ dann und nur dann, wenn für die zugehörigen Tripel $(u; v; w)$; $(u'; v'; w')$ gilt

$$(1) \qquad v\,w' - w\,v', \quad w\,u' - u\,w', \quad u\,v' - v\,u' \in \boldsymbol{N}.$$

Ebenso gilt $P \bigcirc P'$ dann und nur dann, wenn für die zugehörigen Tripel $(x; y; z)$; $(x'; y'; z')$ gilt

$$(2) \qquad y\,z' - z\,y', \quad z\,x' - x\,z', \quad x\,y' - y\,x' \in \boldsymbol{N}.$$

Es genügt, die Behauptung für die Punkte zu beweisen: Wenn (2) nicht gilt, dann bestimmen P; P' offenbar nach dem üblichen Auflösungsverfahren eindeutig eine Verbindungsgerade. Gilt dagegen (2), so nehmen wir etwa $x \notin \boldsymbol{N}$ an. In $\boldsymbol{R}_H$ läßt sich stets die Beziehung $r(x\,y' - y\,x') = s(z\,x' - x\,z')$ so erfüllen, daß $r = 1$ oder $s = 1$ gilt. Sei etwa $s = 1$. Für die durch $(x^{-1}(-y\,v - z); v; 1)$ bestimmte Gerade g gilt $g \mathrel{I} P$. Wenn wir $v = r$ wählen, gilt auch $g \mathrel{I} P'$. Wegen $x\,y' - y\,x' \in \boldsymbol{N}$ gibt es r' mit $r' \neq 0$; $r'(x\,y' - y\,x') = 0$. Wenn wir $v = r + r'$ wählen und dadurch g' mit $g' \neq g$ definieren, so gilt auch $g' \mathrel{I} P, P'$.

S6.2. In $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ gelten die Axiome A1 bis A6, $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ ist also eine projektive Inzidenzebene mit Nachbarelementen ε_p.

Beweis. A1 und A2 ergeben sich aus dem Beweis von S6.1. Dem Axiom A3 genügen etwa die Punkte $(1;0;0)$; $(0;1;0)$; $(0;0;1)$; $(1;1;1)$. Zum Beweis von A4 zeigen wir: Aus $g \bigcirc g'$; $g' \bigcirc g''$ folgt $g \bigcirc g''$. Die Voraussetzungen schreiben sich nach S6.1 in der Form

$$(3) \qquad \begin{cases} v\,w' - w\,v', \; w\,u' - u\,w', \; u\,v' - v\,u', \; v'\,w'' - w'\,v'', \\ \qquad w'\,u'' - u'\,w'', \; u'\,v'' - v'\,u'' \in \boldsymbol{N}. \end{cases}$$

Es sei nun etwa $u' \notin \boldsymbol{N}$. Dann gilt auch $u, u'' \notin \boldsymbol{N}$. Denn wäre etwa $u \in \boldsymbol{N}$, so würde aus $u\,v' - v\,u', \; w\,u' - u\,w' \in \boldsymbol{N}$ folgen: $v, w \in \boldsymbol{N}$. Wir normieren also u, u', u'' zu 1. Setzen wir dies in (3) ein, so folgt aus den Eigenschaften von

$\boldsymbol{R}_H$ unmittelbar: $v\,w''-w\,v''$, $w-w''$, $v''-v\in\boldsymbol{N}$, was nach S6.1 der Behauptung $g\bigcirc g''$ entspricht.

Zum Beweis von A5 betrachten wir g, g', g'' mit $g\bigcirc g', g\oslash g''$, woraus nach dem eben Bewiesenen folgt $g'\oslash g''$. Damit lassen sich die Koordinaten von $P=g\,g''$ und $P'=g'\,g''$ in der Form schreiben

$$P=(v\,w''-w\,v'';\ w\,u''-u\,w'';\ u\,v''-v\,u'')$$
$$P'=(v'\,w''-w'\,v'';\ w'\,u''-u'\,w'';\ u'\,v''-v'\,u'').$$

Bilden wir hiermit die zweireihigen Determinanten gemäß (2), so finden wir für diese die Werte

$$q\,u'',\ q\,v'',\ q\,w''\quad\text{mit}\quad q=u''(v\,w'-w\,v')+v''(w\,u'-u\,w')+w''(u\,v'-v\,u').$$

Wegen $g\bigcirc g'$ gilt nach S6.1 $q\in\boldsymbol{N}$, so daß auch $P\bigcirc P'$ gilt.

A6 folgt ebenso wie A5.

S6.3. Der Übergang von $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ zur Großgeometrie bedeutet den Übergang zu der Ebene $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$, wo $\boldsymbol{K}\cong\boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ ein Körper ist, isomorph zum Restklassenring nach dem teilerlosen Ideal $\boldsymbol{N}$ der Nullteiler.

Der Übergang zur Großgeometrie bedeutet ja das Rechnen modulo der Nullteiler in $\boldsymbol{R}_H$. Da alle Nichtnullteiler invertierbar sind, ist $\boldsymbol{N}$ teilerlos, $\boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ also ein Körper.

S6.4. In $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ gelten alle Schließungssätze; d.h. alle diejenigen Typen von Schließungssätzen, die auch im Spezialfall $\boldsymbol{R}_H=\boldsymbol{K}$ gelten, wo $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$ die projektive Ebene über einem Körper ist.

Betrachten wir nämlich einen Schließungssatz Σ in $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$, so bemerken wir, daß sich die einzelnen Voraussetzungen von Σ alle unter alleiniger Verwendung der Ringoperationen ausdrücken lassen, unter Verwendung des Reziproken eines Elements. Ebenso ist die Behauptung von Σ, die auf eine Körperidentität führt, schon als Ringidentität formulierbar.

Betrachten wir nun denselben Schließungssatz Σ in einer Ebene $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$, so können wir alle Voraussetzungen ebenso formulieren wie in einer Ebene $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$. Denn sobald ein Element η_k in den Voraussetzungen von Σ mit zwei Elementen η_i, η_j durch Inzidenzrelationen verknüpft ist, d.h., sobald ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen ist, existiert diese Lösung auch in $\boldsymbol{R}_H$, da η_i, η_j dann ja nicht benachbart sind, die Determinanten des Gleichungssystems also nicht alle Nullteiler sind. Damit drückt sich dann aber auch die Behauptung von Σ in $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ ebenso aus wie in $\varepsilon_P(\boldsymbol{K})$, nämlich als Ringidentität.

6.2. Die affine Ebene über einem H-Ring.

D22. Die *affine Ebene über einem H-Ring* $\boldsymbol{R}_H$, $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$, wird von den als Punkte bezeichneten geordneten Elementpaaren $(x; y)$ und den als Geraden bezeichneten geordneten homogenen Tripeln $(u; v; w)$ mit $u\notin\boldsymbol{N}$ oder $v\notin\boldsymbol{N}$ gebildet, zwischen denen die Relation „inzident" durch $u\,x+v\,y+w=0$ erklärt ist. Zwei Geraden heißen parallel, wenn für ihre Koordinaten gilt $u\,v'-v\,u'=0$.

S6.5. Sei $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ eine projektive Ebene über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$. Der Übergang zu einer affinen Ebene gemäß D6 mit der Geraden $(0;0;1)$ als ausgezeichneter uneigentlicher Geraden führt auf eine in D22 definierte affine Ebene über $\boldsymbol{R}_H$, $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$. Die durch $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ induzierten Relationen „benachbart" für Punkte und Geraden drücken sich in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ folgendermaßen aus: $P \bigcirc P'$ entspricht $x-x', y-y' \in \boldsymbol{N}$ und $g \bigcirc g'$ entspricht (1).

Die Beweise liegen auf der Hand. Ebenso folgt unmittelbar aus **6.1**:

S6.6. In $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ gelten alle Schließungssätze.

S6.7. In **5.** hatten wir einer Ebene ε_a, in der der kleine affine Satz von Desargues δ, D12, allgemein und der affine Satz von Pappos-Pascal Π, D13, mit der Beschränkung aus ein festes Paar von Trägergeraden gilt, einen H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ so zugeordnet, daß ε_a isomorph zu $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ wurde. Es gilt: $\boldsymbol{R}_H$ ist der Ebene (bis auf Isomorphie) eindeutig zugeordnet in folgendem Sinne: 1. Eine beliebige andere Wahl der Trägergeraden für den Satz von Pappos-Pascal Π führt auf einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen H-Ring. 2. Eine beliebige von Π unabhängige Wahl des Bezugssystems in ε_a führt auf einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen H-Ring.

Beweis. Sei $\mathfrak{B}$ das Bezugssystem, in welchem Π gültig ist. Dann gilt Π nach S6.6 auch in jedem anderen Bezugssystem $\mathfrak{B}^*$. Wir müssen also nur noch zeigen, daß in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ die Streckenrechnung unabhängig ist von der Wahl von $\mathfrak{B}$ und immer auf einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen Ring $\boldsymbol{R}_H^*$ führt. Dazu ordnen wir der durch den Punkt $(a;0)$ repräsentierten Strecke a in $\mathfrak{B}$ die durch den Punkt $(x_0+a(x_1-x_0);\ y_0+a(y_1-y_0))$ repräsentierte Strecke a^* in $\mathfrak{B}^*$ zu, wenn $(x_0;y_0)$ und $(x_1;y_1)$ die Koordinaten der Punkte P_0^* und P_1^* von $\mathfrak{B}^*$ sind. Diese Zuordnung ist nun mit der Addition und Multiplikation in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ vertauschbar: Denn falls $\boldsymbol{R}_H$ ein Körper $\boldsymbol{K}$ ist, gilt dies bekanntlich; im allgemeinen Falle gilt es deshalb auch, weil es sich bei der Addition und Multiplikation in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ um eindeutige Operationen handelt, die sich koordinatenmäßig in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ ebenso ausdrücken wie in $\varepsilon_a(\boldsymbol{K})$.

6.3. Ein Zusammenhang zwischen H-Ringen und Bewertungsringen[5]).

D23. Ein *Bewertungsring* $\boldsymbol{B}$ ist ein Integritätsbereich mit Einselement, in welchem von je zwei Elementen wenigstens eines das andere teilt.

S6.8. Es sei $\boldsymbol{B}$ ein Bewertungsring. Die Nichteinheiten von $\boldsymbol{B}$ bilden ein teilerloses Primideal $\boldsymbol{P}$. Sei $\boldsymbol{A}$ ein Ideal $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{P}$. $\overline{\boldsymbol{B}} \cong \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ ist dann und nur dann ein H-Ring, wenn es nicht ein Primideal $\boldsymbol{Q}$ gibt mit $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{P}$.

Korollar: Ist $\boldsymbol{A}$ ein beliebiges Ideal in $\boldsymbol{P}$, so ist der Quotientenring von $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ ein H-Ring $\boldsymbol{R}_H$. Man kann $\boldsymbol{R}_H$ auch in der Form $\boldsymbol{B}^*/\boldsymbol{A}^*$ beschreiben: Dazu sei $\boldsymbol{Q}$ das minimale Primideal mit $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{P}$. $\boldsymbol{B}^*$ sei der Quotientenring von $\boldsymbol{B}$ bezüglich $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{A}^*$ das zu $\boldsymbol{A}$ gehörende Ideal in $\boldsymbol{B}^*$. Dann wird $\boldsymbol{B}^*/\boldsymbol{A}^*$ isomorph zum Quotientenring von $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$.

Beweis. Sei $a, b \in \boldsymbol{P}$ und es sei $a = c\,b$. Dann wird $a+b = a(1+c) \in \boldsymbol{B}$, $1+c \in \boldsymbol{B}$. Wäre $(a+b)^{-1} = a^{-1}(1+c)^{-1} \in \boldsymbol{B}$, so würde $a^{-1} \in \boldsymbol{B}$ folgen, entgegen der Voraussetzung. Ebenso widerspricht die Annahme: Aus $a \in \boldsymbol{P}$, $b \in \boldsymbol{B}$ folgt

$a^{-1}b^{-1} \in \boldsymbol{B}$ der Voraussetzung. Also ist $\boldsymbol{P}$ ein Ideal und nach Definition sogar teilerlos.

Sei $\boldsymbol{A}$ ein Ideal in $\boldsymbol{P}$. $\overline{\boldsymbol{B}} \cong \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ ist wieder ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem von je zwei Elementen eines das andere teilt. $\overline{\boldsymbol{P}} \cong \boldsymbol{P}/\boldsymbol{A}$ ist das Ideal der Nichteinheiten in $\overline{\boldsymbol{B}}$. Wir müssen untersuchen, wann $\overline{\boldsymbol{P}}$ nur aus Nullteilern besteht. Jedenfalls bilden die Nullteiler ein Primideal $\overline{\boldsymbol{Q}}$: Falls $\bar{a}, \bar{b}$ von $\bar{a}', \bar{b}' \neq 0$ anulliert werden und $\bar{a}' = \overline{r}\,\bar{b}'$ ist, so wird $a + b$ von $\bar{a}'$ annulliert. Das Produkt zweier Nichtnullteiler ist wieder Nichtnullteiler.

Dem Primideal $\overline{\boldsymbol{Q}}$ entspricht in $\boldsymbol{B}$ ein Primideal $\boldsymbol{Q}$ mit $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{A} \cong \overline{\boldsymbol{Q}}$. Hiermit folgt dann unsere Behauptung.

S6.9. Beispiele von H-Ringen auf Grund von S6.8 sind die folgenden:

1. $\boldsymbol{R}$ sei ein diskreter Bewertungsring, etwa der folgende: Im Polynombereich $\boldsymbol{K}[x]$ einer Unbestimmten x über dem Körper $\boldsymbol{K}$ sei $p = p(x)$ ein Primpolynom und $\boldsymbol{B}_p(x)$ der Ring der ganzen Elemente aus dem Körper $\boldsymbol{K}(x)$ bezüglich der zu $p(x)$ gehörenden Bewertung. Dann ist $\boldsymbol{B}_p(x)/(p^n)$ (n eine positive natürliche Zahl) ein H-Ring.

Wählt man speziell $p(x) = x$, so erhält man die schon von J. HJELMSLEV betrachtete Verallgemeinerung der dualen Zahlen; letztere sind der Spezialfall: $n = 2$, $\boldsymbol{K}$ der Körper der reellen Zahlen.

$(p(x))$ ist ein teilerloses Ideal in $\boldsymbol{K}[x]$. Daher gilt $\boldsymbol{B}_p(x)/(p^n) \cong \boldsymbol{K}[x]/(p^n)$.

2. Sei $\boldsymbol{C}$ der Ring der ganzen rationalen Zahlen, $\boldsymbol{C}_p$ der Ring der bezüglich der p-adischen Bewertung ganzen Zahlen aus dem Körper der rationalen Zahlen. Dann ist $\boldsymbol{C}/(p^n) \cong \boldsymbol{C}_p/(p^n)$ ein H-Ring. Für $n = 1$ erhält man die endlichen Primkörper.

3. Nach W. KRULL[5]) kann man folgendermaßen zu einer beliebigen geordneten abelschen Gruppe Γ einen Bewertungsring $\boldsymbol{B}$ angeben, der Γ als Wertegruppe hat: Man betrachte über einem Körper $\boldsymbol{K}$ der Körper $\boldsymbol{K}'$ aller „rationalen Funktionen" in einer Unbestimmten x, wobei als Exponenten von x die Elemente von Γ genommen sind. Diejenigen Elemente von $\boldsymbol{K}'$, deren Differenz der „Grade" in Zähler und Nenner nicht negativ ist, bilden einen Bewertungsring $\boldsymbol{B}$. Wählt man als Γ etwa die additive Gruppe der reellen Zahlen, so ist $\boldsymbol{B}/(x)$ ein H-Ring, in welchem nicht der Basissatz für Ideale gilt.

Bemerkung. Alle bekannten Typen von H-Ringen lassen sich in der angegebenen Weise als Restklassenringe von Bewertungsringen beschreiben. Es ist eine offene Frage, ob dadurch die H-Ringe gekennzeichnet sind.

6.4. Angeordnete H-Ringe.

D24. Ein H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ heißt *angeordnet*, wenn in $\boldsymbol{R}_H$ eine Menge $\boldsymbol{P}$ erklärt ist mit den Eigenschaften: 1. $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{P}$. 2. $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{P}$. 3. $\boldsymbol{P} \cap -\boldsymbol{P} = 0$. 4. $\boldsymbol{P} \cup -\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_H$[19]).

[19]) Dies ist eine Verallgemeinerung des Begriffs Anordnung von Integritätsbereichen auf Ringe mit Nullteilern, vgl. G. PICKERT, Einführung in die Höhere Algebra. Göttingen 1951.

In der dritten Forderung von D 24 soll die 0 nicht die leere Menge bezeichnen, sondern das Nullelement von $\boldsymbol{R}_H$. Damit soll also der „Positivbereich" $\boldsymbol{P}$, im Unterschied zu PICKERT, die Null enthalten. $\boldsymbol{P}$ hat nichts mit den Primidealen aus **6.3** zu tun.

Hier ist $-\boldsymbol{P}$ die Menge der mit -1 multiplizierten Elemente von $\boldsymbol{P}$. An Stelle von $a \in \boldsymbol{P}, a \neq 0$ schreiben wir auch $a > 0$ und nennen a positiv.

$\boldsymbol{R}_H$ heißt *archimedisch geordnet*, wenn $\boldsymbol{R}_H$ angeordnet ist und es zu $a > 0$ ein $b \in \boldsymbol{R}_H$ gibt mit $a\,b - 1 \geq 0$.

S6.10. Ist $\boldsymbol{R}_H$ angeordnet, so folgt aus $a, b > 0$: $a + b > 0$, $a\,b \geq 0$.

Dies folgt ebenso wie über einem Integritätsbereich.

S6.11. Ist $\boldsymbol{R}_H$ archimedisch geordnet, so ist $\boldsymbol{R}_H$ ein Körper[20]).

Wir müssen zeigen, daß $\boldsymbol{R}_H$ keine Nullteiler außer der Null enthalten kann: $a \in \boldsymbol{N}$, $a \neq 0$ bedeutet, daß es a' mit $a' \neq 0$, $a\,a' = 0$ gibt, wobei wir $a, a' > 0$ annehmen können. Da $\boldsymbol{R}_H$ archimedisch geordnet ist, gibt es b mit $a\,b - 1 \geq 0$. Multiplikation mit a' liefert $-a' \geq 0$, also $-a' > 0$, was wegen $a' > 0$ der Regel 3. in D24 widerspricht.

[20]) Dies ist der mathematische Kern einer schon von J. HJELMSLEV stammenden Bemerkung, J. HJELMSLEV[1]) 1. Mitt. S. 17: „Bei Annahme der Anordnungsaxiome und des Eudoxischen Axioms ist die Eindeutigkeit der geraden Linie durch zwei Punkte beweisbar.

Hamburg, Universität, Institut für Angewandte Mathematik.

(Eingegangen am 10. April 1954.)

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 407/408 (1954)

Zum Satz von Sylow.

Von
HELMUT WIELANDT.

In der Theorie der endlichen Gruppen kennt man den grundlegenden

Satz von SYLOW [4]: (1) Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung g. (2) Es sei h ein Teiler von g, welcher zu g/h teilerfremd ist. (3) h sei eine Primzahlpotenz. Dann gilt: Jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung ein Teiler von h ist, liegt in mindestens einer Untergruppe der Ordnung h von $\mathfrak{G}$; je zwei Untergruppen der Ordnung h sind in $\mathfrak{G}$ konjugiert.

Man verdankt P. HALL [2] die wichtige Erkenntnis, daß die Einschränkung (3) für h durch eine Voraussetzung über die Struktur von $\mathfrak{G}$ ersetzt werden kann: (3′) $\mathfrak{G}$ sei auflösbar. Im folgenden wird gezeigt, daß für nicht auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ ein verwandter Satz gilt. Man darf nämlich (3) auch durch die folgende Voraussetzung ersetzen: (3″) $\mathfrak{G}$ enthalte eine nilpotente Gruppe (d.h. ein direktes Produkt von p-Gruppen) der Ordnung h. Dies besagt der

Satz: *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g enthalte eine nilpotente Untergruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung h zu ihrem Index g/h teilerfremd ist. $\mathfrak{M}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung m ein Teiler von h ist. Dann gibt es in $\mathfrak{G}$ ein Element G mit der Eigenschaft $\mathfrak{M} \subseteq G^{-1}\mathfrak{H}G$.*

Den Beweis stützen wir auf den

Hilfssatz: *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g enthalte eine nilpotente Untergruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung h zu g/h teilerfremd ist. Die Primfaktorzerlegung von h sei $h = p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma$. Es sei $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz p^ϱ der Primzahl p ist. $\mathfrak{G}^*$ sei der Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$, seine Ordnung sei g^*. Dann enthält $\mathfrak{G}^*$ eine nilpotente Untergruppe $\mathfrak{H}^*$, für welche*

$$\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{H}^* \subseteq T^{-1}\mathfrak{H}T \quad \text{für ein passendes } T \in \mathfrak{G}$$

gilt und deren Ordnung die Form $h^* = p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma$ hat und zu g^*/h^* teilerfremd ist.

Beweis des Hilfssatzes. Wir bezeichnen die p-Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}_p$; sie ist auch eine Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_p^*$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}^*$ und mit p^α ihre Ordnung; es ist $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{G}_p^*$. Wir bestimmen nach SYLOW ein $T \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_p^* \subseteq T^{-1}\mathfrak{H}_p T$ und setzen $\mathfrak{H}^* = T^{-1}\mathfrak{H}T \cap \mathfrak{G}^*$. Dann ist $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{H}^*$. Ferner ist $\mathfrak{H}^* \subseteq T^{-1}\mathfrak{H}T$, also ist $\mathfrak{H}^*$ nilpotent. Es ist nur noch die Behauptung über die Ordnung von $\mathfrak{H}^*$ nachzuprüfen, im einzelnen

$$h^* \mid p^\alpha q^\beta \dots r^\gamma, \qquad p^\alpha \mid h^*, \qquad p \nmid h^* p^{-\alpha}, \qquad q^\beta \dots r^\gamma \mid h^*.$$

Die ersten beiden Aussagen folgen aus $\mathfrak{H}^* \subseteq T^{-1}\mathfrak{H}T$ und $\mathfrak{G}_p^* \subseteq \mathfrak{H}^*$. Die dritte folgt daraus, daß $\mathfrak{G}_p^*$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}^*$ ist, und die vierte daraus,

daß $T^{-1}\mathfrak{H}T$ als nilpotente Obergruppe von $\mathfrak{P}$ eine Gruppe der Ordnung $q^{\sigma}\dots r^{\nu}$ enthält, die sogar elementweise mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar ist und daher gewiß in $\mathfrak{G}^*$, also auch in $\mathfrak{H}^*$ liegt.

Wir beweisen nun den oben ausgesprochenen Satz in zwei Schritten.

I. $\mathfrak{M}$ sei auflösbar. Dann schließen wir durch vollständige Induktion bezüglich g. Da der Satz für $g=1$ trivial ist (sogar für $m=1$), können wir $g>1$, sogar $m>1$ annehmen. Dann besitzt $\mathfrak{M}$ als auflösbare Gruppe einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{P}$, dessen Ordnung eine Primzahlpotenz $p^{\varrho}>1$ ist; es gilt $p^{\varrho}\,|\,m\,|\,h$. Wie im Hilfssatz bezeichne $\mathfrak{G}^*$ den Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{G}$ ist, so ist $\mathfrak{P}$ ein gemeinsamer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$; dann können wir zu den Faktorgruppen nach $\mathfrak{P}$ übergehen und nach Induktionsvoraussetzung ein $G\in\mathfrak{G}$ mit der verlangten Eigenschaft finden. Wenn aber $\mathfrak{G}^*\neq\mathfrak{G}$ ist, so erfüllt $\mathfrak{G}^*$ zusammen mit der im Hilfssatz konstruierten Gruppe $\mathfrak{H}^*$ die Voraussetzungen des Satzes; dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $G^*\in\mathfrak{G}^*$ mit

$$\mathfrak{M}\leqq G^{*-1}\,\mathfrak{H}^*\,G^*\leqq(T\,G^*)^{-1}\,\mathfrak{H}\,(T\,G^*).$$

II. Wir beenden den Beweis des Satzes, indem wir durch einen Induktionsschluß nach m zeigen, daß $\mathfrak{M}$ stets auflösbar ist. Für $m=1$ ist nichts zu beweisen. Ist $m>1$, so wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, daß jede echte Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ auflösbar ist. Nach I können wir schließen, daß $\mathfrak{N}$ zu einer Untergruppe von $\mathfrak{H}$ konjugiert und daher nilpotent ist. Es ist also jede echte Untergruppe von $\mathfrak{M}$ nilpotent, daher ist $\mathfrak{M}$ nach einem Satz von O. SCHMIDT ([3]; auch IWASAWA [1]) auflösbar.

Bemerkung. Es ist eine offene Frage, ob in dem Satz die Voraussetzung über die Struktur von $\mathfrak{H}$ abgeschwächt werden kann, ob es z. B. genügt, $\mathfrak{H}$ als überauflösbar vorauszusetzen (d. h. mit Primzahlen als Hauptindizes). Auflösbarkeit von $\mathfrak{H}$ genügt sicher nicht; denn wie P. HALL bemerkt hat ([2] S. 102), enthält die einfache Gruppe der Ordnung 7.24 zwei nicht konjugierte Untergruppen der Ordnung 24.

Literatur.

[1] IWASAWA, K.: Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. phys.-math. Soc. Japan (III) **23**, 1—4 (1941). — [2] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [3] SCHMIDT, O.: Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind. Recueil math. Moscou **31**, 366—372 (1924). — [4] SYLOW, L.: Théorèmes sur les groupes de substitutions. Math. Ann. **5**, 584—594 (1873).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 19. April 1954.)

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 409—434 (1954)

Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen.

Von
BERTRAM HUPPERT.

Eine Kette von Normalteilern $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_1 < \cdots < \mathfrak{N}_j = \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ heißt eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i$ minimaler (von $\mathfrak{E}$ verschiedener) Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$ ist. Die Gruppen $\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i$ nennen wir Hauptfaktoren, ihre Ordnungen Hauptindizes von $\mathfrak{G}$. Für die Hauptreihen gilt das Analogon des Satzes von JORDAN-HÖLDER, welches besagt, daß die Hauptfaktoren von zwei Hauptreihen abgesehen von der Anordnung isomorph sind (SPEISER [27], S. 41). Die Hauptfaktoren sind charakteristisch einfach, also direkte Produkte von schlechthin einfachen Gruppen (ZASSENHAUS [38], S. 77). Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ auflösbar, so sind die Hauptfaktoren elementar abelsch, daher schon durch Angabe ihrer Ordnung völlig beschrieben.

Die Kompositionsreihen endlicher Gruppen sind schon früh betrachtet worden, sind sie doch mit dem Problem der Auflösung einer algebraischen Gleichung engstens verknüpft. Für rein gruppentheoretische Zwecke scheinen jedoch die Hauptreihen von größerer Bedeutung zu sein. Während alle Indizes einer Kompositionsreihe einer auflösbaren Gruppe Primzahlen sind, die auflösbaren Gruppen sich also durch ihre Kompositionsreihen nicht weiter klassifizieren lassen, liefern die Hauptreihen eine interessante Möglichkeit, die auflösbaren Gruppen in feinere Klassen einzuteilen. Die wichtigste und einfachste Klasse sind diejenigen Gruppen, deren sämtliche Hauptindizes Primzahlen sind. Diese Gruppen, welche wir im Anschluß an ZAPPA überauflösbar nennen wollen, bilden eine natürliche Verallgemeinerung der nilpotenten Gruppen. Auch im Falle, daß die Hauptindizes Primzahlen oder Primzahlquadrate sind, lassen sich einige Aussagen machen. Die Betrachtung von Gruppen mit höheren Primzahlpotenzen als Hauptindizes stößt auf Schwierigkeiten und erfordert in erster Linie die Kenntnis der auflösbaren Untergruppen der linearen Gruppen $GL(k, p)$[1]).

Neben den Normalteilern und Hauptreihen von $\mathfrak{G}$ betrachten wir die maximalen Untergruppen und die „Maximalketten" $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_0 > \mathfrak{U}_1 > \cdots > \mathfrak{U}_e = \mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{U}_{i+1}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{U}_i$ sei. Zwischen Hauptreihen und Maximalketten besteht bei auflösbaren Gruppen ein interessanter Zusammenhang (§ 1). Die Frage, welche Gruppen als maximale Untergruppen einer einfachen Gruppe auftreten können, scheint bisher nicht behandelt worden zu sein. In § 2 zeigen wir: Enthält $\mathfrak{G}$ eine maximale Untergruppe, welche nilpotent ist und nur reguläre Sylowgruppen hat (regulär im Sinne von

[1]) Bezeichnung nach v. d. WAERDEN [30], S. 5.

P. HALL [10]), so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. § 3 enthält Hilfssätze über Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe. In § 4 untersuchen wir die schon erwähnten überauflösbaren Gruppen. Es folgen in § 5 Bemerkungen über Gruppen, deren Hauptindizes höhere Primzahlpotenzen sind. Für Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen lassen sich zum Teil abschließende Resultate angeben (§ 6). § 7 enthält einen Satz über Gruppen mit lauter überauflösbaren eigentlichen Untergruppen und Anwendungen auf Gruppen mit lauter invarianten zweitmaximalen oder drittmaximalen Untergruppen.

Bezeichnungen. $(\mathfrak{G})$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$ (alle auftretenden Gruppen sind endlich); $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$; ist p eine Primzahl, so sei $\mathfrak{G}_p$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$; ist p^α die höchste p-Potenz, welche $(\mathfrak{G})$ teilt, so nennen wir eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index p^α ein p-Komplement und bezeichnen p-Komplemente mit ${}_p\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$; ist $\mathfrak{U}$ eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so schreiben wir $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$; den Normalisator von $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$, den Zentralisator mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$; $\mathfrak{U} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ (entsprechend $\mathfrak{U} \triangleleft \mathfrak{G}$); $\mathfrak{U} \lessdot \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$; $\Phi(\mathfrak{G})$ = FRATTINI-Gruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ = FITTING-Gruppe = maximaler nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $GXG^{-1} = X^G$; $G\mathfrak{U}G^{-1} = \mathfrak{U}^G$; $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$ sei der Index von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$; p und q bezeichnen stets Primzahlen; wir setzen $(X, Y) = XYX^{-1}Y^{-1}$; $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ sei die von allen (U, V) mit $U \in \mathfrak{U}$ und $V \in \mathfrak{V}$ erzeugte Untergruppe.

§ 1. Hauptreihen und Maximalketten.

Der folgende Hilfssatz ist ein Spezialfall eines Satzes von R. BAER ([1], S. 651). Der Beweis von BAER benutzt den Begriff des schwach hyperzentralen Normalteilers und ist das Ergebnis längerer Betrachtungen. Wir geben für den uns hier allein interessierenden Fall einer auflösbaren Gruppe einen kurzen Beweis an.

Hilfssatz 1. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar, $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{S}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S}$. Ist $\mathfrak{S}$ minimal gewählt, d.h. gilt für jede eigentliche Untergruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ stets $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Ordnung $(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S}$ mit minimalem $\mathfrak{S}$. Angenommen, es wäre $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler ist, folgt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{S}$. Offenbar ist $\mathfrak{N}$ auch minimaler Normalteiler von $\mathfrak{S}$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{S}$, so können wir den Satz auf $\mathfrak{S}$ anwenden und erhalten $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{S}$ ist. Wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \geq \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})$ folgt nun $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T}$. Da aber $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{S}$, so widerspricht dies der Wahl von $\mathfrak{S}$, womit ein Widerspruch gegen die Annahme $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{E}$ erreicht ist.

b) Ist $\mathfrak{S}=\mathfrak{G}$, so folgt, da $\mathfrak{S}$ minimal gewählt wurde, daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ in der FRATTINI-Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ liegt. Als minimaler Normalteiler liegt $\mathfrak{N}$ im Zentrum der FITTING-Gruppe $\mathfrak{F}$ (s. BAER [1], S. 649), woraus sich $\mathfrak{F}\leq\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ ergibt. Wir erhalten damit $\mathfrak{F}\leq\Phi(\mathfrak{G})$. Dies ist aber bei auflösbaren Gruppen nicht möglich, wie leicht aus GASCHÜTZ [8], S. 165, Satz 10 folgt. Also kann auch der Fall b) nicht eintreten.

Definition 1. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar und $p\,|\,(\mathfrak{G})$. Wir betrachten alle die Hauptindizes p^{α_i} von $\mathfrak{G}$, welche Potenzen der festen Primzahl p sind.* $\max\limits_i \alpha_i = r_p(\mathfrak{G})$ *nennen wir den p-Hauptrang von $\mathfrak{G}$.* $\max\limits_{p\,|\,(\mathfrak{G})} r_p(\mathfrak{G})$ *bezeichnen wir als Hauptrang von $\mathfrak{G}$.* Da in unserer Untersuchung kein anderer Rangbegriff auftritt, sprechen wir auch kurz vom p-Rang $r_p(\mathfrak{G})$ oder vom Rang $r(\mathfrak{G})$.

Einen Zusammenhang zwischen Hauptreihen und Maximalketten gibt Satz 1 an.

Satz 1. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. p^{j_p} sei die höchste p-Potenz, welche überhaupt in irgend einer Maximalkette von $\mathfrak{G}$ als Index auftritt. Dann ist $j_p = r_p(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Zunächst eine Vorbemerkung: Ist $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so erhalten wir durch Schnitt einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{U}$ eine Kette von Normalteilern von $\mathfrak{U}$. Bei diesem Prozeß sind die Indizes sicher nicht größer geworden. Verfeinerung dieser Kette (nach Streichen gleicher Glieder) liefert eine Hauptreihe von $\mathfrak{U}$, deren Indizes also gewiß nicht größer sind als die Indizes einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$. Daher ist $r_p(\mathfrak{U})\leq r_p(\mathfrak{G})$. Weiter sehen wir sofort, daß stets $r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\leq r_p(\mathfrak{G})$ gilt, denn eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist ein Stück einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$.

Nun beweisen wir Satz 1 durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Wir zeigen zunächst $r_p(\mathfrak{G})\leq j_p(\mathfrak{G})$.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach Hilfssatz 1 erlaubt $\mathfrak{G}$ eine Zerlegung $\mathfrak{G}=\mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{N}=\mathfrak{E}$. Ist $(\mathfrak{N})=q^\beta$ mit $q\neq p$, so haben wir gemäß der Induktionsannahme $r_p(\mathfrak{G})=r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=j_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\leq j_p(\mathfrak{G})$. Ist aber $p=q$, so können wir die eben gemachte Betrachtung auf den zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ gehörigen Teil der Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ anwenden und haben nur noch $\beta\leq j_p(\mathfrak{G})$ zu zeigen. Wir legen eine Maximalkette durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}\,\mathfrak{N}$. Angenommen es sei $\beta > j_p(\mathfrak{G})$. Dann kann $\mathfrak{S}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{S}\,\mathfrak{N}$ sein. Somit existiert eine Untergruppe $\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}\,\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{E}<\mathfrak{M}<\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}$ invariant in $\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}$. Als Untergruppe der abelschen Gruppe $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{N}$ und auch mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ elementweise vertauschbar. Damit folgt $\mathfrak{M}\lhd\mathfrak{G}$. Dies ist ein Widerspruch, da $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Also gilt doch $\beta\leq j_p(\mathfrak{G})$, womit $r_p(\mathfrak{G})\leq j_p(\mathfrak{G})$ bewiesen ist.

b) Nun haben wir noch $j_p(\mathfrak{G})\leq r_p(\mathfrak{G})$ zu beweisen. Dies folgt leicht mittels Induktion unter Heranziehung der folgenden Tatsache: Ist $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}<\mathfrak{G}$, so gilt *entweder* $\mathfrak{N}\leq\mathfrak{U}$ *oder* $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{U}=\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}=\mathfrak{U}\,\mathfrak{N}$. ($j_p(\mathfrak{G})\leq r_p(\mathfrak{G})$ wird auch in ORE [23] bewiesen.)

Hilfssatz 2. *Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Unter den Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}$ kommen keine anderen Gruppen vor als unter den Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.*

Ein Spezialfall dieses Satzes wurde von uns schon an einer anderen Stelle erwähnt (HUPPERT [*13*]). Wir können auf den einfachen Beweis hier verzichten, da er sich von den früheren Betrachtungen nicht unterscheidet.

Zusatz. *Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, so erhalten wir aus Hilfssatz 2 $r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}) = \mathrm{Max}\{r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}), r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\}$. Die gleiche Aussage gilt auch mit $r(\mathfrak{G})$ statt $r_p(\mathfrak{G})$.*

Aus dem Zusatz folgt sofort: Unter den Normalteilern $\mathfrak{N}$ mit $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\leq k$ gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten.

§ 2. Maximale Untergruppen.

Satz 2. *Sei $\mathfrak{T}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{T}$ nilpotent mit lauter regulären Sylowgruppen* (im Sinn von P. HALL [*10*]), *so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Da sich die Voraussetzung auf alle Faktorgruppen überträgt, genügt der Nachweis eines von $\mathfrak{E}$ verschiedenen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$.

Zunächst behandeln wir den Fall, daß $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{G}:\mathfrak{T})$ nicht teilerfremd sind. Sei p eine Primzahl mit $p\,|\,(\mathfrak{T})$ und $p\,|\,(\mathfrak{G}:\mathfrak{T})$. Die p-Sylowgruppe $\mathfrak{T}_p$ von $\mathfrak{T}$ habe die Ordnung p^α. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)$ von $\mathfrak{T}_p$ umfaßt $\mathfrak{T}$, und seine Ordnung ist nach einem bekannten Satz durch $p^{\alpha+1}$ teilbar. Daher ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{T}$, also gilt $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)=\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{T}_p\lhd\mathfrak{G}$. Weiterhin können wir annehmen, daß $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{G}:\mathfrak{T})$ teilerfremd sind. Dann ist $\mathfrak{T}_p$ p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$.

Ist p eine Primzahl mit $p\,|\,(\mathfrak{T})$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)\neq\mathfrak{T}$, so haben wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)=\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{T}_p\lhd\mathfrak{G}$, womit ein auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gefunden ist. Wir können daher annehmen, daß $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)=\mathfrak{T}$ gilt für alle $p\,|\,(\mathfrak{T})$. Nach WIELANDT [*34*], Satz 5 existiert dann für jedes solche p ein Normalteiler $\mathfrak{N}_p$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_p\cong\mathfrak{T}_p$. Setzen wir $\mathfrak{D}=\bigcap_p\mathfrak{N}_p$, so ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{D}\mathfrak{T}$ [wegen der Teilerfremdheit von $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{T})$].

Sei $q\,|\,(\mathfrak{T})$. Dann ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{D}\,\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)$, also $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}\cong\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)/\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)\cap\mathfrak{D}\cong\mathfrak{T}$. Wegen der Teilerfremdheit von $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)\cap\mathfrak{D})$ gibt es nach einem Satz von ZASSENHAUS ([*38*], S. 125) eine Untergruppe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)$ mit $\mathfrak{R}\cong\mathfrak{T}$. Da Ordnung und Index von $\mathfrak{T}$ teilerfremd sind, $\mathfrak{T}$ nilpotent ist und $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{R}$ gleiche Ordnung haben, sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert, also auch $\mathfrak{R}<\mathfrak{G}$ (siehe WIELANDT [*35*]). Nun folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)\geq\{\mathfrak{R},\mathfrak{T}_q\}=\mathfrak{G}$, mithin $\mathfrak{T}_q\lhd\mathfrak{G}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Ohne jede Voraussetzung über die Sylowgruppen von $\mathfrak{T}$ ist Satz 2 nicht richtig. Wie N. ITÔ in [*16*] bemerkt hat, enthält die lineare Gruppe $PSL(2,p)$ mit $p=2^k-1$ und $k\geq 4$ ihre 2-Sylowgruppen als maximale Untergruppen. Es ist eine offene Frage, ob Satz 2 für ein $\mathfrak{T}$ mit ungerader Ordnung ohne Einschränkung der Struktur der Sylowgruppen von $\mathfrak{T}$ noch richtig ist.

Satz 3. *Hat jede maximale Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *Primzahlindex, so ist* $\mathfrak{G}$ *auflösbar*[2]).

Beweis. Die Voraussetzung überträgt sich auf alle Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Wir beweisen die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Zu jeder maximalen Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ vom Index q erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als transitive Permutationsgruppe in q Symbolen, den Nebenklassen nach $\mathfrak{U}$. Bei dieser Darstellung wird ein Normalteiler $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. Ist keine dieser Darstellungen treu, so sind nach unserer Induktionsannahme alle die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ auflösbar. Ist $\mathfrak{D}$ der Durchschnitt aller der Normalteiler $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ auflösbar, und $\mathfrak{D}$ liegt in der FRATTINI-Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$, ist daher auch auflösbar. Insgesamt folgt so die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Zu betrachten bleibt noch der Fall, daß $\mathfrak{G}$ eine treue Darstellung vom Primzahlgrad p besitzt. $\mathfrak{N}$ sei ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ direktes Produkt von isomorphen einfachen Gruppen. Da $(\mathfrak{N})$ durch p, aber nicht durch p^2 teilbar ist, muß $\mathfrak{N}$ einfach sein. $\mathfrak{N}$ enthält eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$. Da alle Konjugierten von $\mathfrak{G}_p$ schon in $\mathfrak{N}$ konjugiert sind, haben wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)\,\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p) \neq \mathfrak{G}$, so liegt $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$, die einen Index $q \neq p$ hat. Setzen wir $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{V} = \mathfrak{L}$, so ist $(\mathfrak{N}) : (\mathfrak{L}) = (\mathfrak{G}) : (\mathfrak{V}) = q$. $\mathfrak{N}$ besitzt daher eine Darstellung als Permutationsgruppe vom Grad q, die wegen $q < p$ nicht treu sein kann. Somit ist $\mathfrak{N}$ nicht einfach, im Widerspruch zur obigen Feststellung. Daher muß $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}$ gelten und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar.

§ 3. Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe.

Die Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe bilden eine wichtige Klasse von auflösbaren Gruppen. Neben den nilpotenten Gruppen gehören dazu die im nächsten Paragraphen betrachteten überauflösbaren Gruppen und die zweistufig metabelschen Gruppen. Wie wir bei anderer Gelegenheit zeigen werden, hat auch das Produkt von zwei abelschen Gruppen eine nilpotente Kommutatorgruppe.

Nach einem Satz von WIELANDT [33] ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann nilpotent, wenn $\mathfrak{G}' \leq \Phi(\mathfrak{G})$ gilt. Eine ganz ähnliche Charakterisierung der Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe wird uns mehrfach von Nutzen sein.

Hilfssatz 3. *Genau dann ist* $\mathfrak{G}'$ *nilpotent, wenn* $\mathfrak{G}''$ *in* $\Phi(\mathfrak{G})$ *liegt.*

Beweis. a) Sei $\mathfrak{G}'$ nilpotent. Nach WIELANDT [33] gilt dann $\mathfrak{G}'' \leq \Phi(\mathfrak{G}')$. Aus GASCHÜTZ [8], Satz 5 folgt $\Phi(\mathfrak{G}') \leq \Phi(\mathfrak{G})$, also $\mathfrak{G}'' \leq \Phi(\mathfrak{G})$.

b) Nun sei umgekehrt $\mathfrak{G}'' \leq \Phi(\mathfrak{G})$. Dann ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}' \cap \Phi(\mathfrak{G})$ nilpotent, und nach GASCHÜTZ [8], Satz 10 ergibt sich die Nilpotenz von $\mathfrak{G}'$.

Satz 4. *Sei* $\mathfrak{G}'$ *nilpotent.* $\mathfrak{H}$ *sei eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *deren Index und Ordnung teilerfremd sind. Dann ist* $\mathfrak{H}'$ *invariant in* $\mathfrak{G}$.

[2]) Diesen Satz verdankt der Verf. Herrn N. ITÔ und Herrn H. WIELANDT.

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Existiert eine Primzahl p mit $p \mid (\mathfrak{G}')$ und $p \nmid (\mathfrak{H})$, so hat $\mathfrak{G}$ einen in $\mathfrak{G}'$ gelegenen Normalteiler $\mathfrak{N}$, dessen Ordnung eine Potenz von p ist, etwa die p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}'$. Nach unserer Induktionsannahme folgt $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}' \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}' \leq \mathfrak{G}'$ gilt $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}' = \mathfrak{N} \times \mathfrak{H}'$. Daher ist $\mathfrak{H}'$ charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}'$, ist also invariant in $\mathfrak{G}$. Gibt es jedoch keine Primzahl obiger Art, so haben wir $(\mathfrak{G}') \mid (\mathfrak{H})$ und daher $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{H}$. Dann ist sogar $\mathfrak{H}$ invariant in $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{H}'$ erst recht.

Unter den Voraussetzungen von Satz 4 sind insbesondere die Kommutatorgruppen der Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ invariant. Das direkte Produkt $\prod_{p \mid (\mathfrak{G})} \mathfrak{G}_p'$ ist daher ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Faktorgruppe eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen ist.

Satz 5. *Sei $\mathfrak{G}'$ nilpotent. Die p-Sylowgruppe der* FRATTINI-*Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist dann der Durchschnitt der* FRATTINI-*Gruppen aller p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{D} = \bigcap_{x \in \mathfrak{G}} \Phi(\mathfrak{G}_p^x)$. Unsere Behauptung lautet $\mathfrak{D} = \Phi_p(\mathfrak{G})$.

a) $\mathfrak{D}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und liegt in $\Phi(\mathfrak{G}_p)$. Nach GASCHÜTZ [8], Satz 5 folgt $\mathfrak{D} \leq \Phi_p(\mathfrak{G})$.

b) Nun müssen wir noch $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \mathfrak{D}$ nachweisen. Dazu führen wir eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ durch.

Liegt $\mathfrak{G}'$ nicht in jeder p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$, so enthält $\mathfrak{G}'$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Die Induktionsannahme liefert uns $\Phi_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \leq \Phi(\mathfrak{G}_p)\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. Nun gilt aber $\Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \geq \Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ (GASCHÜTZ [8], S. 162), also, auch $\Phi_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \geq \Phi_p(\mathfrak{G})\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. Es folgt somit $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \Phi(\mathfrak{G}_p)\,\mathfrak{N}$. Wegen $p \nmid (\mathfrak{N})$ haben wir sogar $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \Phi(\mathfrak{G}_p)$. Dies ist richtig für jede p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$, womit $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \mathfrak{D}$ nachgewiesen ist.

Zu behandeln bleibt noch der Fall, daß $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{G}_p$ liegt, $\mathfrak{G}_p$ also in $\mathfrak{G}$ invariant ist. Dann folgt sofort $\Phi(\mathfrak{G}_p) \leq \Phi(\mathfrak{G})$. Zu zeigen haben wir $\Phi(\mathfrak{G}_p) = \Phi_p(\mathfrak{G})$. Dazu betrachten wir $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}_p)$. Die Sylowgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_p$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist wegen $\Phi(\overline{\mathfrak{G}}_p) = \mathfrak{E}$ elementar abelsch. Zu zeigen ist nun $\Phi_p(\overline{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{E}$, d. h. wir müssen nachweisen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ keinen Normalteiler von p-Potenzordnung besitzt, der in jeder maximalen Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt. Angenommen, es gebe doch einen Normalteiler mit diesen Eigenschaften. Sei $\mathfrak{K}$ ein minimaler. Fassen wir $\overline{\mathfrak{G}}_p$ als einen Modul mit einem p-Komplement ${}_p\overline{\mathfrak{G}}$ (ein solches existiert nach HALL [9] für auflösbare Gruppen stets) von $\overline{\mathfrak{G}}$ als Operatorenbereich auf, so enthält $\overline{\mathfrak{G}}_p$ den invarianten Teilmodul $\mathfrak{K}$, ist also halbreduzibel und dann nach der SCHURschen Erweiterung des Satzes von MASCHKE (v. d. WAERDEN [29], S. 182) auch vollreduzibel. Es gibt daher einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{K} \times \mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{G}}_p$. Dann ist ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$ eine maximale Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$; denn wäre ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{L}$ eine echte Obergruppe von ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$, so wäre $\mathfrak{L}$ Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ und hätte wegen $\overline{\mathfrak{G}}_p = \mathfrak{K} \times \mathfrak{M}$ die Gestalt $\tilde{\mathfrak{K}} \times \mathfrak{M}$ mit $\tilde{\mathfrak{K}} < \mathfrak{K}$. Dann müßte auch $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{K} = \{\tilde{\mathfrak{K}} \times \mathfrak{M}\} \cap \mathfrak{K} = \tilde{\mathfrak{K}}$ ein Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ sein. Da aber $\mathfrak{K}$ minimaler Normalteiler ist, folgt $\tilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{E}$, und ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$ ist doch maximale Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$. ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$ enthält aber $\mathfrak{K}$ nicht, im Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Definition 2. *$\mathfrak{G}$ heißt eine Gruppe mit Sylowturm, wenn in $\mathfrak{G}$ und in jeder Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ mindestens eine Sylowgruppe invariant ist.*

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit Sylowturm, so lassen sich die voneinander verschiedenen Primteiler p_i von $(\mathfrak{G})$ in eine solche Reihenfolge $p_1, p_2, \ldots, p_k$ bringen, daß für $i=1, \ldots, k$ stets $\mathfrak{G}_{p_1} \ldots \mathfrak{G}_{p_i}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Besonders wichtig ist der Spezialfall $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Dann sprechen wir von einem geordneten Sylowturm.

Beim Beweis von Satz 5 hatten wir nur benutzt, daß die folgende Eigenschaft für $\mathfrak{G}$ und alle Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ erfüllt ist: Ist $(\mathfrak{F})=p^\alpha$, so gilt $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_p$. Dies trifft offenbar für Gruppen mit Sylowturm zu. Es ist auch für auflösbare Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen richtig: Denn aus $\mathfrak{G}_p \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{F}$ folgt $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_p$. Also gilt Satz 5 auch für Gruppen mit Sylowturm und auflösbare Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen.

§ 4. Überauflösbare Gruppen.

Definition 3. *Die Gruppen vom Hauptrang 1 nennen wir überauflösbar* (s. auch Zappa [*36*]).

Der folgende Satz ist bekannt (Itô [*14*] und Ore [*23*]), ergibt sich aber aus unseren bisherigen Überlegungen sehr einfach:

Satz 6. *Genau dann ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar, wenn in jeder Maximalkette alle Indizes Primzahlen sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar, so sind nach Satz 1 die Indizes in jeder Maximalkette Primzahlen. Sind umgekehrt alle Indizes in den Maximalketten Primzahlen, so ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 3 auflösbar und dann nach Satz 1 überauflösbar.

Der Vollständigkeit halber beweisen wir noch

Satz 7. *Jede überauflösbare Gruppe besitzt einen geordneten Sylowturm.*

(Dieser Satz ist bekannt; s. etwa Hall [*9*].)

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler der überauflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N})=q$, p der maximale Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Aus der Richtigkeit des Satzes für die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_p \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Ist $q=p$, so haben wir $\mathfrak{G}_p \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Ist jedoch $q<p$, so gilt, da die Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ nur Primteiler $\leq q-1$ enthält, $\mathfrak{G}_p\,\mathfrak{N}=\mathfrak{N}\times\mathfrak{G}_p$ und dann auch $\mathfrak{G}_p \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Leicht folgt nun die volle Behauptung.

Satz 8. *Haben alle maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ Primzahlindex, so ist die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ nilpotent.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})=p$. Stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{U}$, so erhalten wir eine transitive Permutationsgruppe vom Primzahlgrad p. Nach Satz 3 ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. Eine auflösbare und transitive Permutationsgruppe vom Primzahlgrad ist bekanntlich metabelsch (s. etwa Perron [*24*], S. 151). Ist $\mathfrak{N}$ der bei der betrachteten Darstellung auf $\mathfrak{E}$ abgebildete Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so haben wir demnach $\mathfrak{G}'' \leq \mathfrak{N} \leq \mathfrak{U}$. Die zweite Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}''$ liegt also in jeder maximalen Untergruppe und somit auch in $\Phi(\mathfrak{G})$. Nun folgt aus Hilfssatz 3 unsere Behauptung.

Speziell enthält Satz 8 die Aussage, daß die Kommutatorgruppe einer überauflösbaren Gruppe nilpotent ist. Dies wurde schon 1902 von E. WENDT bewiesen (WENDT [31]; einen sehr einfachen Beweis gab ORE in [23]). Wir werden bald sehen, daß jede Gruppe mit der in Satz 8 vorausgesetzten Eigenschaft überauflösbar ist.

Eine endliche Gruppe ist bekanntlich genau dann nilpotent, wenn alle maximalen Untergruppen invariant sind. Insbesondere haben in diesem Fall alle maximalen Untergruppen Primzahlindex. Somit bilden diejenigen Gruppen, deren sämtliche maximalen Untergruppen Primzahlindex haben, eine Oberklasse der nilpotenten Gruppen. Diese Klasse enthält nach Satz 3 nur auflösbare Gruppen und gemäß Satz 6 alle überauflösbaren Gruppen. Überraschend ist

Satz 9. *Genau dann ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar, wenn alle maximalen Untergruppen Primzahlindex haben.*

Dem Beweis von Satz 9 schicken wir einige Betrachtungen voraus:

Wir führen noch einen weiteren Rangbegriff ein, der für manche Zwecke brauchbarer ist als Definition 1.

Definition 4[3]). *Die Zahlen $p_i^{\alpha_i}$ seien die Hauptindizes der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$. Das kleinste gemeinsame Vielfache der α_i nennen wir den arithmetischen Rang $\bar{r}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.*

[$\bar{r}(\mathfrak{G}) = 1$ und $r(\mathfrak{G}) = 1$ sind also gleichwertig; ebenso $\bar{r}(\mathfrak{G}) = 2$ und $r(\mathfrak{G}) = 2$.]

Hilfssatz 4. a) *Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Gruppe, $\Gamma(\mathfrak{A})$ eine über dem Galois-Feld $GF(p)$ irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\Gamma(\mathfrak{A})$ zyklisch.*

b) *Eine Matrix A von zu p teilerfremder Ordnung mit Elementen aus $GF(p)$ ist genau dann über $GF(p)$ irreduzibel, wenn ihr charakteristisches Polynom $\varphi(x)$ in $GF(p)[x]$ irreduzibel ist.*

Beweis. a) Sei $\mathfrak{m}$ der Darstellungsmodul zu $\Gamma(\mathfrak{A})$. Wir suchen nun die erlaubten Endomorphismen von $\mathfrak{m}$ auf, d.h. die mit $\Gamma(\mathfrak{A})$ vertauschbaren linearen Abbildungen von $\mathfrak{m}$ in sich. Diese bilden wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{m}$ einen Schiefkörper (v. D. WAERDEN [29], S. 154), der überdies endlich ist, also ein GALOIS-Feld. Da $\Gamma(\mathfrak{A})$ abelsch ist, sind auch die Matrizen von $\Gamma(\mathfrak{A})$ erlaubte Endomorphismen. $\Gamma(\mathfrak{A})$ ist demnach isomorph zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines GALOIS-Feldes, ist also zyklisch.

b) Wegen $p \nmid$ Ordnung A läßt sich A in einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(p)$ auf Diagonalgestalt transformieren.

Sei zunächst $\varphi(x)$ über $GF(p)$ irreduzibel. Wäre A über $GF(p)$ reduzibel, also $A^S = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$ (mit geeigneter Matrix S), und wären die $\varphi_i(x)$ die charakteristischen Polynome der A_i, so würde folgen $\varphi(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$, entgegen der Annahme. Also ist bei irreduziblem $\varphi(x)$ die Matrix A irreduzibel.

[3]) Diese Definition und die beiden folgenden Hilfssätze gehen auf eine Anregung von Herrn WIELANDT zurück. Der ursprüngliche Beweis des Verf. für Satz 9 war wesentlich umständlicher.

Nun sei umgekehrt A irreduzibel. Angenommen, $\varphi(x)$ wäre über $GF(p)$ reduzibel, $\varphi(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_k(x)$ mit irreduziblen $\varphi_i(x)$. Wegen der Vollkommenheit von $GF(p)$ haben die $\varphi_i(x)$ keine mehrfachen Wurzeln. Die A_i seien Begleitmatrizen zu den $\varphi_i(x)$ (v. d. WAERDEN [29], S. 123). Da die A_i lauter verschiedene Eigenwerte haben, ließe sich $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$ auf die gleiche Diagonalgestalt bringen wie A. Wir hätten dann $A^S = \bar{A}$ mit einer geeigneten Matrix S. Nach v. d. WAERDEN [30], S. 70 könnte S sogar mit Elementen aus $GF(p)$ gewählt werden. Dies widerspräche der Annahme, daß A irreduzibel ist. Also muß $\varphi(x)$ über $GF(p)$ irreduzibel sein.

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{G}'$ nilpotent, so gilt $\bar{r}(\mathfrak{G}) = \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))$.*

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Sei $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}_{p_1} \times \mathfrak{F}_{p_2} \times \cdots$ mit $\mathfrak{F}_{p_i} \neq \mathfrak{E} \neq \mathfrak{F}_{p_i}$. Wegen $\Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}) \geq \Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{F}_{p_i}/\mathfrak{F}_{p_i}$ folgt aus der Induktionsannahme

$$\bar{r}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}) = \bar{r}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}/\Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i})) \leq \bar{r}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}/\Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{F}_{p_i}/\mathfrak{F}_{p_i})$$
$$= \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{F}_{p_i}) \leq \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})).$$

Mit Hilfssatz 2 erhalten wir $\bar{r}(\mathfrak{G}) = \bar{r}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_1} \cap \mathfrak{F}_{p_2}) \leq \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))$. Wegen $\bar{r}(\mathfrak{G}) \geq \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))$ ist damit die Behauptung bewiesen.

b) Nun sei $(\mathfrak{F}) = p^z$. Da $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist, haben wir $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{F}$. Daraus folgt $\mathfrak{G}_p \trianglelefteq \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$. Jedes p-Komplement ${}_p\mathfrak{G}$ ist abelsch. Wegen $\Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{F}$ und Satz 5 ist $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}_p)$. Nun betrachten wir die von einem p-Komplement ${}_p\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ induzierten Automorphismen und fassen dabei $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ als Darstellungsmodul für ${}_p\mathfrak{G}$ auf. Ein Automorphismus, der $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ elementweise fest läßt, hat zur Ordnung eine Potenz von p (ZASSENHAUS [38], S. 45). Da $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{F}$ seinen Zentralisator enthält (FITTING [6], S. 105), so ist die Darstellung von ${}_p\mathfrak{G}$ treu. Die irreduziblen Teilmoduln von $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ haben Dimensionen ϱ_i mit $\varrho_i \mid \bar{r} = \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))$. Nach Hilfssatz 4 genügen die Eigenwerte der Matrizen, welche den Elementen aus ${}_p\mathfrak{G}$ zugeordnet sind, irreduziblen Gleichungen der Grade ϱ_i, liegen also alle in $GF(p^{\bar{r}})$. Daraus folgt $A^{p^{\bar{r}}-1} = E$ für alle $A \in {}_p\mathfrak{G}$. Nun verfeinern wir die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{G}_p$ zu einer charakteristischen Reihe von $\mathfrak{G}_p$. Auf jeder Faktorgruppe dieser Reihe erfährt ${}_p\mathfrak{G}$ eine Darstellung. Sei $\Gamma = \{B\}$ ein irreduzibler Anteil, der nach Hilfssatz 4 zyklisch ist. Die Eigenwerte von B liegen wegen $B^{p^{\bar{r}}-1} = E$ in $GF(p^{\bar{r}})$, genügen daher über $GF(p)$ einer irreduziblen Gleichung von einem Grad σ mit $\sigma \mid \bar{r}$. Nach Hilfssatz 4 folgt Grad $\Gamma = \sigma \mid \bar{r}$. Damit ist $\bar{r}(\mathfrak{G}) = \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))$ bewiesen.

Beweis von Satz 9. Wir führen eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ durch.

a) Ist $\Phi(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{E}$, so haben wir nach Induktionsannahme $r(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) = 1 = \bar{r}(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}))$. Daraus folgt mit Hilfssatz 5 unter Beachtung von Satz 8 die Behauptung $r(\mathfrak{G}) = \bar{r}(\mathfrak{G}) = 1$.

b) Ist aber $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$, so liegt ein minimaler Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nicht in jeder maximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Sei also $\mathfrak{N} \not\leqq \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = p$. Dann ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{U}$, also $(\mathfrak{N}) = (\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = p$. Durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ folgt die Behauptung.

Aus Satz 9 ziehen wir nun zwei einfache Folgerungen:

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ *überauflösbar, so auch* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ überauflösbar, so haben nach Satz 6 alle maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ Primzahlindex. Den maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ entsprechen umkehrbar eindeutig mit Indexerhaltung die maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche also auch alle Primzahlindex haben. Aus Satz 9 folgt nun die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Satz 11. *Sei* $\mathfrak{M}$ *eine Menge von Gruppen mit den folgenden drei Eigenschaften*:

1. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathfrak{M}$, *so sei auch jede Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{M}$.
2. *Mit* $\mathfrak{G}$ *liegt auch jede Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{M}$.
3. *Ist* $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ *in* $\mathfrak{M}$, *so auch* $\mathfrak{G}$.

Sei nun $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \in \mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{U}$ *mit minimal gewähltem* $\mathfrak{U}$. *Dann gilt* $\mathfrak{U} \in \mathfrak{M}$.

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Liegt $\mathfrak{N}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$, so gehört $\mathfrak{G}$ selbst zu $\mathfrak{M}$, und der Satz ist klar. Ist aber $\mathfrak{N} \not\leqq \Phi(\mathfrak{G})$, so ist $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{U}$ wegen der minimalen Wahl von $\mathfrak{U}$. Es ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}$. Nach unserer Induktionsannahme haben wir $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\}\,\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{T} \in \mathfrak{M}$. Daraus folgt $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\{\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\}\,\mathfrak{T} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{U}$ minimal gewählt war, ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{T} \in \mathfrak{M}$.

Als $\mathfrak{M}$ können wir wählen die Menge der auflösbaren, der nilpotenten[4]) oder der überauflösbaren Gruppen. Daß die nilpotenten Gruppen eine Menge mit obigen Eigenschaften bilden, steht bei GASCHÜTZ ([8], S. 165); daß die überauflösbaren Gruppen eine solche Menge bilden, folgt aus Satz 10.

Satz 11 hat ein gewisses Interesse für die Erweiterungstheorie. Zwar ist es nicht immer möglich, zu Normalteilern $\mathfrak{N}$ mit den angegebenen Eigenschaften „Vertretergruppen" $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ zu finden; aber $\mathfrak{N}$ besitzt ein „partial complement" im Sinne von P. HALL [12], welches mit der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ wesentliche Eigenschaften (Auflösbarkeit, Nilpotenz, Überauflösbarkeit) gemeinsam hat.

Satz 10 legt die Frage nahe, ob allgemein $r\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right) = r(\mathfrak{G})$ gilt. Diese Frage ist zu verneinen, wie wir durch ein Beispiel zeigen:

Beispiel 1. Die Gruppe $\mathfrak{P}$ werde erzeugt von den vier Elementen P_1, P_2, P_3, P_4. In $\mathfrak{P}$ mögen die folgenden Regeln gelten: $X^3 = E$, $(X, (Y, Z)) = E$. $\mathfrak{P}$ hat die Ordnung 3^{10} (s. LEVI u. v. D. WAERDEN [21]).

Wir bilden das Holomorph von $\mathfrak{P}$ mit einer geeigneten Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$. Diejenigen Automorphismen aus $\mathfrak{A}$, welche in $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}'$ den identischen Automorphismus bewirken, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$. Wir geben

[4]) Für den Fall nilpotenter Gruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ wurde dieser Satz von BAER angegeben; BAER [2], S. 37.

nun die $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ durch ihre Wirkung auf die P_i an: Es sei

$$P_1^{\mathfrak{a}} = P_1^{\alpha_{11}} P_2^{\alpha_{12}}, \quad P_2^{\mathfrak{a}} = P_1^{\alpha_{21}} P_2^{\alpha_{22}}, \quad P_3^{\mathfrak{a}} = P_3^{\overline{\alpha_{11}}} P_4^{\overline{\alpha_{12}}}, \quad P_4^{\mathfrak{a}} = P_3^{\overline{\alpha_{21}}} P_4^{\overline{\alpha_{22}}},$$

wobei die α_{ik} und $\overline{\alpha_{ik}}$ nur den Nebenbedingungen $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \not\equiv 0$ (3) und $\overline{\alpha_{11}}\,\overline{\alpha_{22}} - \overline{\alpha_{12}}\,\overline{\alpha_{21}} \not\equiv 0$ (3) unterliegen sollen. (Diese sind nötig, damit es sich überhaupt um Automorphismen handelt.)

Offenbar gilt $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cong GL(2, 3) \times GL(2, 3)$, also $r(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) = 2$. Die $\mathfrak{a}$ setzen sich auf die von den Kommutatoren $C_{ik} = (P_i, P_k)$ erzeugte elementar abelsche Gruppe $\mathfrak{P}' = \Phi(\mathfrak{P})$ fort, und zwar in der folgenden Weise:

$$C_{12}^{\mathfrak{a}} = C_{12}^{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad C_{34}^{\mathfrak{a}} = C_{34}^{\overline{\alpha_{11}}\,\overline{\alpha_{22}} - \overline{\alpha_{12}}\,\overline{\alpha_{21}}};$$

die restlichen C_{ik} werden in Produkte dieser C_{ik} abgebildet, wobei die auftretenden Exponenten die Matrixelemente des KRONECKER-Produktes der beiden Matrizen (α_{ik}) und $(\overline{\alpha_{ik}})$ sind. Dieses KRONECKER-Produkt ist eine absolut irreduzible Darstellung von $GL(2, 3) \times GL(2, 3)$ (s. WEYL [32], S. 127). Daher ist die von C_{13}, C_{14}, C_{23} und C_{24} erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ein minimaler Normalteiler, woraus $r(\mathfrak{G}) \geq 4$ folgt.

Wir behaupten nun, daß $r\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})\right) \leq 2$ gilt. Wegen $\Phi(\mathfrak{P}) \leq \Phi(\mathfrak{G})$ ist dann auch $r\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right) \leq 2$.

Sei $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$. Dann ist $P_1^{\mathfrak{b}} \equiv P_1 \bmod \mathfrak{P}'$ und $P_1^{\mathfrak{b}} \in \{P_1, P_2\}$, da $\{P_1, P_2\}$ bei $\mathfrak{A}$ invariant ist. Also haben wir $P_1^{\mathfrak{b}} = P_1 C_{12}^{\beta_1}$. Ebenso folgt $P_2^{\mathfrak{b}} = P_2 C_{12}^{\beta_2}$, $P_3^{\mathfrak{b}} = P_3 C_{34}^{\beta_3}$ und $P_4^{\mathfrak{b}} = P_4 C_{34}^{\beta_4}$. Also ist $\mathfrak{B}$ eine elementar abelsche Gruppe vom Exponenten 3 mit höchstens vier Erzeugenden. Die $\mathfrak{b}$ mit $P_1^{\mathfrak{b}} = P_1$ und $P_2^{\mathfrak{b}} = P_2$ bilden wegen der Invarianz von $\{P_1, P_2\}$ bei $\mathfrak{A}$ einen Normalteiler $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{A}$. Offenbar ist $(\mathfrak{B}_1) \mid 3^2$ und $(\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_1) \mid 3^2$. Zusammen mit $r(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) = 2$ folgt $r(\mathfrak{A}) = 2$ und dann auch $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}') = 2$. Damit ist der Beweis unserer Behauptung erbracht.

Beispiel 1 zeigt, daß aus $r\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right) = 2$ nicht notwendig $r(\mathfrak{G}) = 2$ folgt. Gleichzeitig hat sich herausgestellt, daß die Nilpotenz von $\mathfrak{G}'$ in Hilfssatz 5 keine überflüssige Voraussetzung war.

Nun zeigen wir, daß in Hilfssatz 5 selbst bei nilpotenter Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ der arithmetische Rang $\bar{r}(\mathfrak{G})$ nicht durch $r(\mathfrak{G})$ ersetzt werden darf. Wir geben nämlich eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $r\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right) \leq 3$, $r(\mathfrak{G}) = 6$ und nilpotentem $\mathfrak{G}'$ an.

Beispiel 2. Im GALOIS-Feld $GF(5^3)$ gibt es ein ξ mit $\xi \neq 1$, $\xi^{31} = 1$. Seien ξ' und ξ'' die Konjugierten von ξ über $GF(5)$. Dann ist die Diagonalmatrix

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi' & 0 \\ 0 & 0 & \xi'' \end{pmatrix}$$

transformierbar in eine Matrix A_3 mit Elementen aus $GF(5)$. Wegen $\xi \notin GF(5)$ ist A_3 über $GF(5)$ irreduzibel. Im GALOIS-Feld $GF(5^2)$ existiert ein η mit

$\eta \neq 1$, $\eta^3 = 1$. Ist η' das konjugierte Element von η über $GF(5)$, so läßt sich

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta' \end{pmatrix}$$

transformieren in ein A_2 mit Elementen aus $GF(5)$. Auch A_2 ist irreduzibel über $GF(5)$.

Die Gruppe $\mathfrak{P}$ werde erzeugt von den fünf Elementen $P_1, \ldots, P_5$. Folgende Regeln seien in $\mathfrak{P}$ gültig: $X^5 = (X, (Y, Z)) = E$. Dann ist $(\mathfrak{P}) = 5^{5+\binom{5}{2}} = 5^{15}$. Wir erweitern $\mathfrak{P}$ mit einer zyklischen Automorphismengruppe $\{\alpha\}$ zu der Gruppe $\mathfrak{G}$. Mod $\mathfrak{P}'$ mögen P_1, P_2, P_3 gemäß A_3 transformiert werden, P_4, P_5 mod $\mathfrak{P}'$ gemäß A_2. Offenbar ist $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}') = 3$, also $r(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) \leq 3$ wegen $\mathfrak{P}' \leq \Phi(\mathfrak{P}) \leq \Phi(\mathfrak{G})$. Setzen wir wieder $C_{ik} = (P_i, P_k)$, so ist $C_{45}^{\alpha} = C_{45}^{\alpha}$ (mit geeignetem α). C_{12}, C_{13}, C_{23} erzeugen einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die restlichen sechs C_{ik} bilden einen bei α invarianten Teilmodul $\mathfrak{m}$, der gemäß dem KRONECKER-Produkt $A_3 \times A_2$ transformiert wird. $\xi \cdot \eta$ ist Eigenwert von $A_3 \times A_2$. Wegen $\xi\eta \notin GF(5^3)$ und $\xi\eta \notin GF(5^2)$ hat $\xi\eta$ über $GF(5)$ sechs Konjugierte. $\mathfrak{m}$ enthält daher einen über $GF(5)$ irreduziblen Bestandteil der Dimension 6, ist also selbst irreduzibel. Damit ist $r(\mathfrak{G}) = 6$ nachgewiesen.

Definition 5. *Sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$. Gibt es eine durch $\mathfrak{N}$ laufende Hauptreihe von $\mathfrak{G}$, deren unterhalb $\mathfrak{N}$ liegende Hauptfaktoren abelsche Gruppen mit höchstens k Erzeugenden sind, so nennen wir $\mathfrak{N}$ eingebettet in $\mathfrak{G}$ vom Relativrang $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \leq k$. Ist speziell der Relativrang 1, so nennen wir $\mathfrak{N}$ nach einem Vorschlag von Herrn* BAER *lokal zyklisch eingebettet.*

Den folgenden Satz verdankt der Verfasser Herrn R. BAER. Der Beweis ist eine auf endliche Gruppen zugeschnittene Variante des von Herrn BAER mündlich mitgeteilten Beweises.

Satz 12. *Sei $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) = 1$. Ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$, so gilt $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})) = 1$*[5]).

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{N})$ durch. Sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_i \lhd \mathfrak{N}_{i+1} = \mathfrak{N}$ das unterhalb $\mathfrak{N}$ liegende Stück einer durch $\mathfrak{N}$ laufenden Hauptreihe von $\mathfrak{G}$. Nach unserer Voraussetzung sind die Faktorgruppen $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$ zyklisch von Primzahlordnung.

Ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1$, so ist unser Satz trivial, da $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_1)$ als Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}_1$ zyklisch ist. Sei also $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}$. Die Induktion nach $(\mathfrak{N})$ erlaubt die Annahme, daß $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i)) = 1$ ist. Sei $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1)$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$. Aus der Richtigkeit des Satzes für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ folgt $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1)) = 1$. Setzen wir $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i) \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1)$, so liefert Hilfssatz 2 die Aussage $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}) = 1$. Sei nun N ein erzeugendes Element für $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_i$ und $D \in \mathfrak{D}$. Der von D bei Transformation in $\mathfrak{N}$ bewirkte Automorphismus ist dann durch $DND^{-1} = NN_1$ mit $N_1 \in \mathfrak{N}_1$ eindeutig festgelegt. Wegen $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_1)$ haben wir $D'DND^{-1}D'^{-1} = NN_1N_1'$. Wir erhalten so eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{N}_1$, bei der $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet wird.

[5]) Ein ähnliches Resultat über Gruppen von Automorphismen hat KALOUJNINE in [18] und [19] angegeben.

Also ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{N}_1$ und daher zyklisch. Zusammen mit $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}) = 1$ folgt daraus die Behauptung.

Satz 13. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. Ist die* FITTING-*Gruppe $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ lokal zyklisch in $\mathfrak{G}$ eingebettet, so ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar.*

Beweis. Nach Satz 12 ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$ überauflösbar. Bei auflösbaren Gruppen gilt aber $\mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{F}$ (s. FITTING [6], S. 107 oder BAER [1], S. 646). Somit ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ überauflösbar, und dann auch $\mathfrak{G}$ wegen der lokal zyklischen Einbettung von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$.

Satz 13 ist ein Gegenstück zu Satz 10; in beiden Fällen folgt aus einer Aussage über einen Teil der Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ eine entsprechende Aussage über alle Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$.

Man könnte vermuten, daß folgende Verallgemeinerung von Satz 12 richtig ist: Aus $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \leq k$ folgt bei auflösbaren Gruppen $\mathfrak{G}$, daß $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})) \leq k$. Dies ist jedoch nicht wahr:

Beispiel 3. Sei $\mathfrak{N} = \{N_1\} \times \{N_2\}$ eine abelsche Gruppe vom Typ $(3^2, 3^2)$. Die Automorphismen $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{N}$ stellen sich dar in der Gestalt

$$N_1^{\mathfrak{a}} = N_1^{\alpha_{11}} N_2^{\alpha_{12}}, \qquad N_2^{\mathfrak{a}} = N_1^{\alpha_{21}} N_2^{\alpha_{22}}.$$

Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ ist also isomorph zur Gruppe aller zweireihigen Matrizen mit Elementen mod 3^2. Diejenigen Matrizen, deren Determinante $\equiv 1 \bmod 3$ ist, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Automorphismengruppe. Wir bilden nun das Holomorph von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{A}$. Die entstehende Gruppe heiße $\mathfrak{G}$. Offenbar ist $\mathfrak{L} = \{N_1^3\} \times \{N_2^3\}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}$, also invariant in $\mathfrak{G}$. Daraus folgt $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \leq 2$. Diejenigen Automorphismen aus $\mathfrak{A}$, welche $\mathfrak{N}/\mathfrak{L}$ elementweise fest lassen, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und werden dargestellt durch die Matrizen $E + 3B$, welche mod 3 zur Einheitsmatrix kongruent sind. Aus $(E + 3B_1)(E + 3B_2) \equiv E + 3(B_1 + B_2) \bmod 3^2$ folgt, daß $\mathfrak{B}$ isomorph ist zur additiven Gruppe der zweireihigen Matrizen mod 3, also elementar abelsch vom Typ $(3, 3, 3, 3)$ ist.

Dem Element

$$\begin{pmatrix} 1 + 3\beta_{11} & 3\beta_{12} \\ 3\beta_{21} & 1 + 3\beta_{22} \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{B}$ ordnen wir den Vektor $\mathfrak{b} = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22})$ zu (Komponenten mod 3). Transformation von $\mathfrak{B}$ mit Elementen aus $\mathfrak{A}$ induziert im Raum der $\mathfrak{b}$ eine lineare Abbildung. Bekanntlich erzeugen die beiden Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die ganze Gruppe $\mathfrak{A}$. Bezüglich der Basis $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ des Raumes der $\mathfrak{b}$ haben S und T die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit läßt sich eine Darstellung vom Grad 1 abspalten. Die restliche Darstellung vom Grad 3 ist (absolut) irreduzibel, wie sich leicht mit Hilfe des SCHURschen Lemmas nachprüfen läßt. Also besitzt $\mathfrak{A}$ einen Hauptfaktor der Ordnung 3^3, woraus $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})) \geq 3$ folgt. Damit ist das angekündigte Gegenbeispiel erbracht.

§ 5. Gruppen von höherem Rang.

Satz 7 hat ein Analogon für $r(\mathfrak{G}) = 2$:

Satz 14. *Ist $r(\mathfrak{G}) = 2$, so ist die Sylowgruppe zum maximalen Primteiler der Gruppenordnung invariant, sofern dieser Primteiler größer als 3 ist. Gilt speziell $2 \nmid (\mathfrak{G})$ oder $3 \nmid (\mathfrak{G})$, so besitzt $\mathfrak{G}$ einen geordneten Sylowturm*[6]).

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ der Ordnung q^α mit $\alpha \leq 2$, $p > 3$ der maximale Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Nehmen wir an, daß der Satz für die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ gilt, so folgt $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p \leqq \mathfrak{G}$. Ist $q = p$, so haben wir $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_p \leqq \mathfrak{G}$ und sind fertig. Sei also $q \neq p$. Die Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ ist $q-1$ (für $\alpha = 1$) oder $(q^2-1)(q^2-q)$ (für $\alpha = 2$), enthält daher nur Primteiler $\leq q$, es sei denn, daß $q+1$ eine Primzahl ist. Letzteres trifft jedoch nur für $q = 2$ zu. Also geht p in keinem Falle in der Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ auf. Somit haben wir $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p = \mathfrak{N} \times \mathfrak{G}_p$, und $\mathfrak{G}_p$ ist charakteristische Untergruppe des Normalteilers $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$, also invariant in $\mathfrak{G}$. Der Rest der Behauptung folgt nun leicht.

Satz 15. *Sind die Indizes in allen Maximalketten von $\mathfrak{G}$ Primzahlen oder Primzahlquadrate, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar und hat einen Rang $r(\mathfrak{G}) \leq 2$.*

Beweis. Da sich die Voraussetzung auf alle Untergruppen und Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ überträgt, können wir eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ ansetzen. Wir können also annehmen, daß jede eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ auflösbar ist und einen Rang ≤ 2 hat. Sei p der maximale Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Ist $p = 3$, so haben wir $(\mathfrak{G}) = 3^\alpha 2^\beta$, und $\mathfrak{G}$ ist nach einem bekannten Satz von BURNSIDE auflösbar (SPEISER [27], S. 193). Sei also $p > 3$. Schließen wir den trivialen Fall $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}$ aus, so liegt $\mathfrak{G}_p$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = q^\gamma$, wobei $\gamma \leq 2$ und $q < p$ ist. Nach Satz 14 gilt $\mathfrak{G}_p \leqq \mathfrak{U}$. Der Index des Normalisators $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)$ von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}$ hat daher die Gestalt q^δ mit $\delta \leq 2$ und erfüllt bekanntlich die Kongruenz $q^\delta \equiv 1 (p)$. Wegen $p > q$ ist $\delta = 1$ ausgeschlossen. Aus $\delta = 2$ würde folgen $p \mid q^2 - 1$, also wegen $p > q$ notwendig $p \mid q+1$. Dann ist aber $p = q+1$ und $p = 3$, was ausgeschlossen worden war. Es bleibt somit nur die Möglichkeit $\delta = 0$, d.h. $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}$ übrig, und $\mathfrak{G}_p$ ist invariant in $\mathfrak{G}$. Durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_p$ folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$. Die Aussage über den Rang ergibt sich nun sofort aus Satz 1.

Es sei ausdrücklich erwähnt, daß Satz 15 sich nicht auf solche Gruppen ausdehnen läßt, deren Indizes in den Maximalketten Primzahlen, Primzahl-

[6]) Im wesentlichen bei ZAPPA [37], S. 7.

quadrate oder Kuben von Primzahlen sind. Denn die einfache Gruppe der Ordnung 168 hat in ihren Maximalketten die Indizes 2, 4, 8, 3 und 7. Offen bleibt die folgende Frage: Ist $\mathfrak{G}$ schon dann auflösbar, wenn die Indizes aller maximalen Untergruppen Primzahlen oder Primzahlquadrate sind? Jedenfalls zeigt Beispiel 1 in § 4, daß eine solche Gruppe nicht notwendig einen Rang ≤ 2 hat.

Bei der weiteren Untersuchung benötigen wir einige Kenntnisse über die auflösbaren Untergruppen der projektiven unimodularen Gruppen $PSL(2, p)$ und $PSL(3, p)$.

Zunächst die auflösbaren Untergruppen von $PSL(2, p)$ (BURNSIDE [3], S. 436—450): (1) Gruppen der Ordnung $p\,d$ mit $d \mid \frac{p-1}{2}$, welche einen Normalteiler der Ordnung p enthalten. (2) Zyklische Gruppen der Ordnung z mit $z \mid \frac{p-1}{2}$ oder $z \mid \frac{p+1}{2}$. (3) Diedergruppen der Ordnung $2z$, z wie unter (2). (4) Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_4$. (5) Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_4$.

Nun die auflösbaren Untergruppen von $PSL(3, p)$ (MITCHELL [22]): (1) Gruppen, welche einen Punkt oder eine Gerade fest lassen. Diese Gruppen sind reduzibel und besitzen einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ einer Ordnung p^α mit $\alpha \leq 2$ derart, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ isomorph ist zu einer vollreduziblen Gruppe. (Unter diesen Gruppen sind also alle oben aufgezählten Untergruppen von $PSL(2, p)$ enthalten.) (2) Monomiale Gruppen. (3) Gruppen, welche eine quadratische Form invariant lassen, daher isomorph sind zu einer Untergruppe von $PSL(2, p)$. (4) Die HESSEsche Gruppe der Ordnung 216 und ihre Normalteiler der Ordnungen 72 und 36.

(Die übrigen, in der MITCHELLschen Liste angegebenen Gruppen sind entweder nicht auflösbar oder treten erst bei den projektiven Gruppen über allgemeinen GALOIS-Feldern auf, nicht aber bei den projektiven Gruppen über Primkörpern.)

Satz 8 hat für Gruppen vom Rang 2 und 3 ein Gegenstück:

Satz 16. *Haben alle maximalen Untergruppen der auflösbaren Gruppe* $\mathfrak{G}$ *Primzahl- oder Primzahlquadratindex, so ist die vierte Kommutatorgruppe* $\mathfrak{G}^{(4)}$ *nilpotent. Hat* $\mathfrak{G}$ *außerdem noch ungerade Ordnung, so ist schon* $\mathfrak{G}''$ *nilpotent.*

Beweis wie bei Satz 8. Zu jeder maximalen Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als primitive und auflösbare Permutationsgruppe von Primzahl- oder Primzahlquadratgrad. Solche Gruppen lassen sich bekanntlich auffassen als lineare inhomogene Abbildungen in 1 oder 2 Dimensionen über einem endlichen Primkörper. Mit Hilfe obiger Aufzählung der auflösbaren Untergruppen von $PSL(2, p)$ erkennen wir leicht, daß alle diese Permutationsgruppen die Regel $\mathfrak{H}^{(5)} = \mathfrak{E}$ erfüllen. Ist $\mathfrak{N}$ der bei der Darstellung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildete Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so haben wir also $\mathfrak{G}^{(5)} \leq \mathfrak{N} \leq \mathfrak{U}$. Da dies für jede maximale Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ richtig ist, liegt $\mathfrak{G}^{(5)}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$. Mit Hilfe eines schon einmal benutzten Satzes von GASCHÜTZ sehen wir nun, daß $\mathfrak{G}^{(4)}$ nilpotent ist.

Die Behauptung über Gruppen von ungerader Ordnung ergibt sich in der gleichen Weise durch Betrachtung der auflösbaren Untergruppen ungerader Ordnung von $PSL(2, p)$.

Satz 17. *Sind die Indizes aller maximalen Untergruppen der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ Primzahlen oder Primzahlquadrate oder Kuben von Primzahlen, so ist $\mathfrak{G}^{(6)}$ nilpotent. Ist $(\mathfrak{G})$ ungerade, so ist bereits $\mathfrak{G}^{(4)}$ nilpotent.*

Beweis wie bei Satz 16. Dabei benutzen wir die angegebene Tabelle der auflösbaren Untergruppen von $PSL(3, p)$ und insbesondere die Tatsache, daß alle diese Gruppen die Regel $\mathfrak{H}^{(7)} = \mathfrak{E}$ erfüllen.

Einfache Eigenschaften haben auch diejenigen auflösbaren Gruppen, deren arithmetischer Rang $\bar{r}(\mathfrak{G})$ eine Primzahl ist. [Es kommt also weniger auf die absolute Größe als auf die Primfaktorzerlegung von $\bar{r}(\mathfrak{G})$ an, was unsere Benennung „arithmetischer Rang" rechtfertigt.] Zunächst ein Hilfssatz:

Hilfssatz 6. *Ist $\mathfrak{K}$ eine auflösbare und über $GF(q)$ irreduzible Untergruppe von $GL(p, q)$ mit $\bar{r}(\mathfrak{K}) \mid p$ und $p > 2$, so gilt*: (1) $\mathfrak{K}^{(3)} = \mathfrak{E}$; (2) *$\mathfrak{K}$ ist überauflösbar*; (3) *entweder $\mathfrak{K}' = \mathfrak{E}$ oder $p \mid (\mathfrak{K})$.*

Beweis. a) Sei zunächst $\mathfrak{K}$ über irgendeinem Erweiterungskörper von $GF(q)$ reduzibel. Dann haben alle absolut irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{K}$ gleichen Grad d und kommen alle gleich oft vor, etwa f mal. Wegen $f > 1$ folgt aus $df = p$ notwendig $f = p$ und $d = 1$. Die irreduziblen Bestandteile sind daher abelsch, und $\mathfrak{K}'$ enthält nur die Einsdarstellung. Andererseits zerfällt $\mathfrak{K}'$ als Normalteiler von $\mathfrak{K}$ nach einem Satz von CLIFFORD [5] völlig in Bestandteile gleichen Grades, die also eindimensional sind. Beides zusammen ergibt $\mathfrak{K}' = \mathfrak{E}$. Offenbar sind dann (1), (2) und (3) erfüllt.

b) Sei nun $\mathfrak{K}$ absolut irreduzibel und primitiv[7]). $\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ sei ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{K}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ der Ordnung r^μ, wobei r eine Primzahl ist (übrigens gilt $\mu = 1$ oder $\mu = p$). Wegen der Primitivität von $\mathfrak{K}$ ist $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{E}$, also auch $\mathfrak{M}_r' \neq \mathfrak{E}$ (SPEISER [27], S. 195). Da $\mathfrak{M}$ nilpotent ist, gilt $\mathfrak{M}_r \lhd \mathfrak{K}$. Nach CLIFFORD [5] zerfällt $\mathfrak{M}_r$ in s Darstellungen vom Grad t mit $st = p$. Wegen $\mathfrak{M}_r' \neq \mathfrak{E}$ ist $t > 1$, also $t = p$, d.h. $\mathfrak{M}_r$ ist irreduzibel. Daraus folgt $r \neq q$ (KOCHENDÖRFFER [20], S. 35). Also handelt es sich nicht um eine modulare Darstellung von $\mathfrak{M}_r$. Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{M}_r$ folgt nach dem Lemma von SCHUR, daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r)$ aus Vielfachen der Einheitsmatrix besteht, mithin in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ liegt. $\mathfrak{M}_r$ ist eine projektive, irreduzible Darstellung der abelschen Gruppe $\mathfrak{M}_r/\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r)$. Nach FRUCHT ([7], S. 20) ist daher $(\text{Grad } \mathfrak{M}_r)^2 = p^2 = (\mathfrak{M}_r/\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r))$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r) \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ ist $\mathfrak{M}_r/\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r)$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{K}$ mit zwei Erzeugenden. Dies geht aber wegen $\bar{r}(\mathfrak{K}) \mid p$ und $p \neq 2$ nicht. Daher kann $\mathfrak{K}$ nicht primitiv sein.

c) Sei schließlich $\mathfrak{K}$ absolut irreduzibel und imprimitiv, also monomial. Dann enthält $\mathfrak{K}$ einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ bestehend aus Diagonalmatrizen, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{A}$ isomorph ist zu einer transitiven und auflösbaren Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ vom Primzahlgrad p. Bekanntlich besitzt $\mathfrak{P}$ einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{Z}_p$ der Ordnung p, und $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_p$ ist isomorph zu einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}_d$ einer Ordnung d mit $d \mid p - 1$ (PERRON [24], S. 151).

[7]) Die Überlegungen dieses Abschnittes schließen sich teilweise an BURNSIDE [4] an.

Zu (1). Wegen $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{E}$ gilt $\mathfrak{R}'' \leq \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}^{(3)} = \mathfrak{E}$.

Zu (2). $\mathfrak{P}$ ist überauflösbar. Angenommen es gäbe unter $\mathfrak{A}$ einen Hauptfaktor von $\mathfrak{R}$ mit p Erzeugenden von der Ordnung r^p (r eine Primzahl). Dann besäße $\mathfrak{P}$ eine über $GF(r)$ irreduzible Darstellung Γ vom Grad p.

Wir benötigen für die kommenden Betrachtungen mehrfach die folgende einfache Bemerkung: Ist Γ eine irreduzible Darstellung einer zyklischen Gruppe der Ordnung z über einem GALOIS-Feld, so ist Grad $\Gamma \leq z - 1$. (Dies läßt sich mit den beim Beweis von Hilfssatz 4 angestellten Überlegungen leicht verifizieren.)

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. Sei $r = p$. $\mathfrak{Z}_p$ kann nach der Bemerkung nicht irreduzibel sein, zerfällt daher nach CLIFFORD [5] in Bestandteile vom Grad 1. Da 1 die einzige p-te Einheitswurzel in $GF(p)$ ist, wird $\mathfrak{Z}_p$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. Also ist Γ Darstellung einer Faktorgruppe von $\mathfrak{Z}_d$, kann daher (wieder nach der Bemerkung) nicht den Grad p haben.

Fall 2. Sei $r \neq p$, und $\mathfrak{P}$ werde treu dargestellt. $\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}_p$ ist unmöglich, da $\mathfrak{Z}_p$ (wieder nach der Bemerkung) keine irreduzible Darstellung vom Grad p besitzt.

Zerfällt Γ über einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(r)$, so sind die absolut irreduziblen Bestandteile von Γ linear. $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Z}_p$ enthält daher nur die Einsdarstellung, ist aber nach CLIFFORD [5] vollständig reduzibel. Daher wird $\mathfrak{Z}_p$ bei Γ durch E dargestellt, im Widerspruch zur Treue von Γ.

Also ist Γ absolut irreduzibel. Da $p \neq r$ ist, läßt sich Γ in einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(r)$ so transformieren, daß $\mathfrak{Z}_p$ aus Diagonalmatrizen besteht. Aber wegen $\mathfrak{Z}_p \nleq \mathfrak{Z}(\mathfrak{P})$ enthält $\mathfrak{Z}_p$ nicht nur Vielfache der Einheitsmatrix. Daher ist Γ imprimitiv, also monomial (SPEISER [27], S. 195). Aus der Irreduzibilität von Γ folgt nun der Widerspruch $p \mid (\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_p) = d \leq p - 1$.

Fall 3. Sei Γ keine treue Darstellung von $\mathfrak{P}$. Dann wird $\mathfrak{Z}_p$ bei Γ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet, und Γ ist Darstellung von $\mathfrak{Z}_d$. Nach unserer Bemerkung kann dann Γ nicht irreduzibel sein.

Also besitzt $\mathfrak{R}$ keinen Hauptfaktor mit p Erzeugenden, ist also überauflösbar. Damit ist (2) bewiesen.

Zu (3). Aus $p \mid (\mathfrak{P})$ folgt $p \mid (\mathfrak{R})$.

Da $\bar{r}(\mathfrak{G}) = 2$ gleichwertig ist mit $r(\mathfrak{G}) = 2$ und dieser Fall schon in den Sätzen 14 bis 16 behandelt wurde, können wir uns weiterhin auf $\bar{r}(\mathfrak{G}) = p$ mit $p \neq 2$ beschränken.

Satz 18. *Ist* $\bar{r}(\mathfrak{G}) = p > 2$, *so gilt*: (1) $\mathfrak{G}^{(3)} \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$; (2) $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ *ist überauflösbar*; (3) $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ *oder* $p \mid (\mathfrak{G})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ der Ordnung $q_i^{\alpha_i}$. Dann ist $\alpha_i = 1$ oder $\alpha_i = p$. Ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ abelsch (für $\alpha_i = 1$) oder isomorph zu einer Gruppe $\mathfrak{K}$ von der in Hilfssatz 6 betrachteten Art. Nun beachten wir noch, daß der Durchschnitt aller $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ in $\mathfrak{F}$ liegt (KALOUJNINE [18]). Mit Hilfssatz 6 erhalten wir:

(1) $\mathfrak{G}^{(3)} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ für alle i, also $\mathfrak{G}^{(3)} \leq \bigcap_i \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}) \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$.

(2) Wegen der Überauflösbarkeit aller $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ ist nach Hilfssatz 2 auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ überauflösbar.

(3) Ist $(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}) = q_i$, so gilt $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$. Für $(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}) = q_i^p$ ist nach Hilfssatz 6 $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ oder $p\,|\,(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}))$. Insgesamt folgt $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ oder $p\,|\,(\mathfrak{G})$, q. e. d.

§ 6. Auflösbare Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen.

In dem besonderen Fall, daß alle Sylowgruppen der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ abelsch sind, lassen sich weitergehende und zum Teil abschließende Resultate angeben.

TAUNT hat bewiesen ([28], S. 40), daß jede auflösbare Gruppe kubusfreier Ordnung höchstens dreistufig metabelsch ist. Dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern:

Satz 19. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. Die Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ seien alle abelsch mit höchstens k Erzeugenden. Dann gilt $\mathfrak{G}^{(3)} = \mathfrak{E}$ für $k \leq 2$ und $\mathfrak{G}^{(4)} = \mathfrak{E}$ für $3 \leq k \leq 5$.*

Beweis. Wir betrachten einen Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ der Ordnung p^α $(\alpha \leq k)$ und die von $\mathfrak{G}$ in diesem induzierte Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ läßt sich in der bekannten Weise als Untergruppe von $GL(\alpha, p)$ auffassen. Da $\mathfrak{G}_p$ abelsch ist, induziert $\mathfrak{G}_p$ in dem Hauptfaktor den identischen Automorphismus, woraus $p \nmid (\mathfrak{A})$ folgt. Nach der SCHURschen Erweiterung des Satzes von MASCHKE ist jede reduzible Untergruppe von $\mathfrak{A}$ vollreduzibel. $\mathfrak{A}$ ist als homomorphes Bild von $\mathfrak{G}$ ebenfalls eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen. ITÔ hat in [15] gezeigt, daß sich jede Darstellung einer solchen Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 auf monomiale Gestalt transformieren läßt. Dieser Satz kann wegen $p \nmid (\mathfrak{A})$ genau so in unserem Fall bewiesen werden. Als monomiale Gruppe besitzt $\mathfrak{A}$ einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{D}$ (die Diagonalmatrizen in der Gruppe), und $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ ist isomorph zu einer transitiven Permutationsgruppe in α Symbolen. Berücksichtigen wir, daß auch diese Permutationsgruppe eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen ist, so sehen wir leicht: Für $k \leq 2$ gilt $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{E}$, für $3 \leq k \leq 5$ ist $\mathfrak{A}^{(3)} = \mathfrak{E}$.

Wir behandeln nun den Fall $k = 2$; in den übrigen Fällen schließen wir nach Ersetzung von $\mathfrak{G}''$ durch $\mathfrak{G}^{(3)}$ in der gleichen Weise.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \rhd \mathfrak{G}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{G}'' \rhd \mathfrak{N}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{N}_i \rhd \mathfrak{E}$ eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{G}''$. Da nach unseren bisherigen Überlegungen $\mathfrak{G}''$ in jedem Hauptfaktor den identischen Automorphismus bewirkt, haben wir $(\mathfrak{G}'', \mathfrak{G}'') \leq \mathfrak{N}_1$, $(\mathfrak{G}'', \mathfrak{N}_1) \leq \mathfrak{N}_2, \ldots, (\mathfrak{G}'', \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{E}$. Somit besitzt $\mathfrak{G}''$ eine absteigende Zentralkette, welche bei $\mathfrak{E}$ endet, und ist daher nilpotent. Da aber alle Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ abelsch sind, ist $\mathfrak{G}''$ sogar abelsch, also $\mathfrak{G}^{(3)} = \mathfrak{E}$.

Die Überlegungen im letzten Abschnitt des Beweises von Satz 19 gehen auf ORE zurück ([23], S. 459). ORE bewies damit, daß eine überauflösbare Gruppe stets nilpotente Kommutatorgruppe hat. Unser Beweisverfahren für

diesen Satz (Satz 8) lieferte bei überauflösbaren Gruppen nicht mehr als das Oresche. Bei den Sätzen 16 und 17 wäre jedoch die Oresche Methode nur unter der stärkeren Voraussetzung $r(\mathfrak{G}) \leq 2$ bzw. $r(\mathfrak{G}) \leq 3$ anwendbar gewesen. (Beispiel 1 zeigt, daß unsere Voraussetzungen wirklich schwächer sind.)

Hilfssatz 7. *Sei* $\mathfrak{U}$ *eine endliche Gruppe von k-reihigen Diagonalmatrizen über einem Körper. Dann läßt sich* $\mathfrak{U}$ *mit höchstens k Elementen erzeugen.*

Beweis. Die Elemente der Matrizen an der i-ten Stelle auf der Diagonalen erzeugen eine zyklische Gruppe $\{z_i\}$. Die Matrizen

$$Z_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & z_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen eine abelsche Gruppe mit k Erzeugenden, welche $\mathfrak{U}$ enthält. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 20. *Sei* $\mathfrak{G}$ *eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen. Haben alle minimalen Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *höchstens k Erzeugende, so ist* $r(\mathfrak{G}) \leq k$.

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$ und $\alpha \leq k$. Wir betrachten $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Haben alle minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ höchstens k Erzeugende, so gilt nach unserer Induktionsannahme $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \leq k$. Da $\mathfrak{N}$ nicht mehr als k Erzeugende hat, folgt $r(\mathfrak{G}) \leq k$.

Nun habe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ mit $(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}) = q^\beta$ und $\beta > k$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

a) Sei zunächst $p \neq q$. $\mathfrak{M}$ bewirkt bei Transformation in $\mathfrak{N}$ eine abelsche Automorphismengruppe, deren Ordnung eine Potenz von q ist. Wegen $p \neq q$ läßt sich diese, wenn wir sie in der bekannten Weise als Matrizengruppe mit Elementen aus $GF(p)$ auffassen, in einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(p)$ auf Diagonalgestalt bringen. Nach Hilfssatz 7 hat diese Gruppe höchstens k Erzeugende, ist also wegen $\beta > k$ kein isomorphes Bild von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. Daher ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M}$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist, folgt $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Somit haben wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$ mit $(\mathfrak{L}) = q^\beta$, woraus sich $\mathfrak{L} \lhd \mathfrak{G}$ ergibt. Wegen $\beta > k$ kann $\mathfrak{L}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein. Dann ist aber auch $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, was der Wahl von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ widerspricht.

b) Ist $p = q$, so ist $\mathfrak{M}$ als Untergruppe einer p-Sylowgruppe abelsch. Die Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{M}$ bilden einen Normalteiler $\Omega_1(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{G}$, der ebensoviele Erzeugende hat wie $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ hat aber mindestens β Erzeugende. Wegen $\beta > k$ und $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$ mit $\alpha \leq k$ ist $\Omega_1(\mathfrak{M})$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{N}$, fällt daher mit $\mathfrak{M}$ zusammen, und $\mathfrak{M}$ ist elementar abelsch. $\mathfrak{M}$ erlaubt eine direkte Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$. Da die Ordnung der von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{M}$ bei Transformation bewirkten Automorphismengruppe nicht durch p teilbar ist, gibt

es nach der SCHURschen Erweiterung des Satzes von MASCHKE einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{K}$. Nach unserer Voraussetzung ist $\mathfrak{K}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann kann $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ auch nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ sein, entgegen der Wahl von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. Damit ist auch in diesem Falle ein Widerspruch gegen die Annahme $(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}) = q^\beta$ mit $\beta > k$ erzielt.

Die Voraussetzung über die Sylowgruppen kann in Satz 20 nicht gestrichen werden. Erweitern wir nämlich die Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit einem Automorphismus α der Ordnung 3, welcher bezüglich eines Erzeugendensystems A, B der Quaternionengruppe gegeben sei durch $A^\alpha = AB$, $B^\alpha = A$, so erhalten wir eine auflösbare Gruppe vom Rang 2, welche nur einen minimalen Normalteiler besitzt, das Zentrum der Quaternionengruppe, und dieses ist zyklisch.

Satz 21. *Sei $\mathfrak{G}$ eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen. Sind die $\mathfrak{U}_i$ die maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so sei $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}_i) = p_i^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \leq k$. Dann ist $r(\mathfrak{G}) \leq k$.*

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Existieren Normalteiler $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{E}$, so folgt aus der Induktionsannahme $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i) \leq k$, also nach Hilfssatz 2 $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2) = r(\mathfrak{G}) \leq k$. Wir dürfen daher annehmen, daß $\mathfrak{G}$ nur einen minimalen Normalteiler besitzt. Dann ist $(\mathfrak{F}(\mathfrak{G})) = p^\alpha$.

b) Sei $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ elementar abelsch. Die von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ bei Transformation induzierte Automorphismengruppe hat eine zu p teilerfremde Ordnung. Nach der SCHURschen Erweiterung des MASCHKEschen Satzes gilt daher $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{L}$ mit einem Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$. Sicher ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \neq \Phi(\mathfrak{G})$ (s. den Beweis von Hilfssatz 1), also $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{G}$ nur einen minimalen Normalteiler hat, folgt $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$. Ist nun $\mathfrak{N}$ der minimale Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so existiert ein $\mathfrak{U}_i < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \not\leq \mathfrak{U}_i$, also $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}_i = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}_i$. Daraus folgt $(\mathfrak{N}) = (\mathfrak{G}:\mathfrak{U}_i) = p_i^{\alpha_i}$, und $\mathfrak{N}$ hat höchstens k Erzeugende. Durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ folgt nun die Behauptung.

c) Sei $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ nicht elementar abelsch, also $\Phi(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{E}$. Unsere Induktionsannahme liefert uns jetzt $r(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{F})) \leq k$. Da $\mathfrak{F}$ abelsch ist, folgt aus $\mathfrak{N} = \{F_1, \ldots, F_j;\ \Phi(\mathfrak{F})\} \lhd \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ und $j \leq k$ durch Potenzierung mit p^i $\{F_1^{p^i}, \ldots, F_j^{p^i};\ \Phi^{i+1}(\mathfrak{F})\} \lhd \mathfrak{G}$, wenn $\Phi^i(\mathfrak{F})$ die durch $\Phi^i(\mathfrak{F}) = \Phi(\Phi^{i-1}(\mathfrak{F}))$ induktiv erklärte Gruppenfolge ist. Somit haben die unterhalb $\Phi(\mathfrak{F})$ liegenden Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ höchstens k Erzeugende, was zu zeigen war.

Durch Satz 21 haben die in § 4 angeschnittenen Fragen für den Spezialfall auflösbarer Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen eine einfache Antwort gefunden. Beispiel 1 zeigt, daß im allgemeinen Falle die Verhältnisse wesentlich undurchsichtiger sind.

§ 7. Gruppen, deren sämtliche zweitmaximalen oder drittmaximalen Untergruppen invariant sind.

SCHMIDT [26] und IWASAWA [17] haben diejenigen endlichen Gruppen untersucht, deren eigentliche Untergruppen alle nilpotent sind. Diese Gruppen

sind auflösbar und, wenn die Gruppenordnung durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar ist, sogar nilpotent. Für uns wird eine ähnlich Aussage von Nutzen sein.

Satz 22. *Ist jede eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ überauflösbar, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. Falls die Ordnung von $\mathfrak{G}$ durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar ist, so ist $\mathfrak{G}$ selbst überauflösbar.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist. Dabei wollen wir Induktion nach $(\mathfrak{G})$ anwenden.

Sei p der kleinste Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G}$ p-normal (s. ZASSENHAUS [*38*], S. 135), so betrachten wir den Normalisator $\mathfrak{N}$ des Zentrums $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$. Falls $\mathfrak{N}=\mathfrak{G}$, haben wir in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ einen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen und erkennen mit Hilfe der Induktionsannahme die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N}$ eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{N}$ überauflösbar. Dann ist ${}_p\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{N}$ (Satz 7), und nach GRÜN (s. ZASSENHAUS [*38*], S. 135) existiert ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Faktorgruppe p-Potenzordnung hat. Da dieser Normalteiler überauflösbar ist, ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. Ist aber $\mathfrak{G}$ nicht p-normal, so gibt es nach BURNSIDE ([*3*], S. 156) eine p-Gruppe $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, deren Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{H}$ Automorphismen von zu p teilerfremder Ordnung induziert. Für $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) \neq \mathfrak{G}$ ist dies unmöglich; denn da in diesem Falle $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ überauflösbar ist, ist das p-Komplement von $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ invariant in $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$, ist also mit $\mathfrak{H}$ elementweise vertauschbar. Somit haben wir notwendig $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})=\mathfrak{G}$, und wieder ist ein auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen[8]).

Nun sei $(\mathfrak{G})$ durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar. Wir zeigen durch einen Induktionsschluß, daß $\mathfrak{G}$ überauflösbar ist. Die Primteiler von $(\mathfrak{G})$ seien nach fallender Größe geordnet: $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Die Gruppen $\mathfrak{G}_{p_i}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ mögen im Sinne von P. HALL [*11*] ein Sylowsystem von $\mathfrak{G}$ bilden. Wegen der Überauflösbarkeit der Untergruppen $\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$ und $\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$ folgt $\mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$ und $\mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$, also auch $\mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}$. Die Zentrumselemente von $\mathfrak{G}_{p_1}$ der Ordnung p_1 erzeugen einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

a) Ist $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{G}_{p_1}$, so ist ${}_{p_1}\mathfrak{G}\,\mathfrak{M}$ eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist daher überauflösbar. Somit enthält $\mathfrak{M}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung p_1 von ${}_{p_1}\mathfrak{G}\,\mathfrak{M}$. Weil $\mathfrak{N}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}_{p_1}$ liegt, ist $\mathfrak{N}$ auch in $\mathfrak{G}$ invariant. Wegen $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{G}_{p_1}$ ist die Ordnung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ noch durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar. Daher ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nach unserer Induktionsannahme überauflösbar und dann $\mathfrak{G}$ ebenso.

b) Nun nehmen wir an, daß $\mathfrak{M}=\mathfrak{G}_{p_1}$, also $\mathfrak{G}_{p_1}$ elementar abelsch ist. Gibt es einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung keine Potenz von p_1 ist, so betrachten wir $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{R}$ keine volle Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, so sind in $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ unsere Voraussetzungen erfüllt. Daher gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$

[8]) Dieser Teil des Beweises ist dem von IWASAWA genau nachgebildet; während p bei IWASAWA ein beliebiger Primteiler von $(\mathfrak{G})$ ist, mußten wir den kleinsten wählen, da in einer überauflösbaren Gruppe im allgemeinen nur das Komplement zum kleinsten Primteiler der Gruppenordnung invariant ist.

von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}/\mathfrak{R}) = p_1$. Dann ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_{p_1}) = p_1$, womit wieder ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ der Ordnung p_1 nachgewiesen ist. Ist aber $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_{p_i}$ eine volle Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, so enthält das überauflösbare p_i-Komplement ${}_{p_i}\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung p_1. Wegen $\mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}_{p_i} \lhd \mathfrak{G}$ gilt $(\mathfrak{G}_{p_1}, \mathfrak{G}_{p_i}) = \mathfrak{E}$. Daher ist $\mathfrak{N}$ invariant bei Transformation mit Elementen aus $\mathfrak{G}_{p_i}$ und aus ${}_{p_i}\mathfrak{G}$, also invariant in $\mathfrak{G}$. Damit ist ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung p_1 nachgewiesen. Ist $p_1 | (\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ noch durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar, daher $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nach unserer Induktionsannahme überauflösbar. Ist aber $p_1 \nmid (\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong {}_{p_1}\mathfrak{G}$ überauflösbar als eigentlich Untergruppe von $\mathfrak{G}$. In jedem Falle erhalten wir so die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

c) Zu behandeln haben wir noch den Fall, daß jeder minimale Normalteiler von $\mathfrak{G}$ eine p_1-Potenz zur Ordnung hat. Dann ist $\mathfrak{G}_{p_1}$ maximaler nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und enthält nach FITTING seinen Zentralisator (FITTING [6], S. 107 oder BAER [1], S. 646). Ist $\mathfrak{U}$ eine eigentliche Untergruppe von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_{p_1}$ als eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ überauflösbar. Nach Satz 4 liegt $\mathfrak{U}'$ im Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{G}_{p_1})$ von $\mathfrak{G}_{p_1}$. Wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{G}_{p_1}) \leq \mathfrak{G}_{p_1}$ folgt nun $\mathfrak{U}' \leq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_{p_1} = \mathfrak{E}$. Also ist jede eigentliche Untergruppe von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ abelsch. Ist ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ nicht abelsch, so gilt nach einem Satz von MILLER (s. etwa RÉDEI [25]) $({}_{p_1}\mathfrak{G}) = p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$; dann ist aber $(\mathfrak{G})$ nur durch drei verschiedene Primzahlen teilbar, was ausgeschlossen worden war. ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ muß daher abelsch sein. Fassen wir $\mathfrak{G}_{p_1}$ als einen Modul mit ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ als Automorphismenbereich auf, so erhalten wir eine wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{G}_{p_1}) \leq \mathfrak{G}_{p_1}$ treue Darstellung von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ durch Matrizen mit Elementen aus dem GALOIS-Feld $GF(p_1)$. Nach der SCHURschen Fassung des Satzes von MASCHKE ist die Gruppe ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel in Bestandteile vom Grad 1. Diese Reduktion läßt sich sogar schon in $GF(p_1)$ durchführen, da jede eigentliche Untergruppe $\mathfrak{U}$ von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ sich wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_{p_1}$ in $GF(p_1)$ auf Diagonalgestalt bringen läßt. Jeder invariante Teilmodul von $\mathfrak{G}_{p_1}$ hat also die Dimension 1, was die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ beweist.

Es gibt Gruppen, deren eigentliche Untergruppen alle überauflösbar sind, deren Gruppenordnung durch drei verschiedene Primzahlen teilbar ist, welche aber selbst nicht überauflösbar sind:

Beispiel 4. Die Elemente A, B, C, D mit den Relationen

$$A^7 = B^7 = C^3 = D^2 = E, \quad AB = BA, \quad CAC^{-1} = A^2, \quad CBC^{-1} = B^4,$$
$$DAD^{-1} = B, \quad DBD^{-1} = A, \quad DCD^{-1} = C^{-1}$$

erzeugen eine Gruppe der Ordnung $7^2 \cdot 3 \cdot 2$, welche die geforderten Eigenschaften hat.

Definition 6. $\mathfrak{V}$ *heißt eine zweitmaximale Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *wenn es ein* $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ *mit* $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ *gibt.*

Satz 23. *Ist jede zweitmaximale Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *invariant, so ist* $\mathfrak{G}$ *überauflösbar. Falls* $(\mathfrak{G})$ *durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar ist, ist* $\mathfrak{G}$ *sogar nilpotent.*

Beweis. Sei $\mathfrak{V} < \mathfrak{U} < \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{V}$ invariant in $\mathfrak{G}$ und erst recht in $\mathfrak{U}$. Somit ist jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{U}$ Normalteiler von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ also nilpotent. Nach Satz 22 (oder schon nach dem Satz von IWASAWA-SCHMIDT) folgt, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist. Ist $(\mathfrak{G})$ durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar, so ist $\mathfrak{G}$ nach IWASAWA nilpotent.

Um die Überauflösbarkeit zu zeigen, weisen wir nach, daß jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ Primzahlindex hat: Sei $\mathfrak{V} < \mathfrak{U} < \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{U}$ nilpotent ist, ist $(\mathfrak{U}:\mathfrak{V})$ eine Primzahl p. $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$ ist eine Primzahlpotenz. $\mathfrak{V}$ ist invariant in $\mathfrak{G}$. Im Falle $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = p^\alpha$ ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{V}) = p^{\alpha+1}$, und $\mathfrak{U}$ hat als maximale Untergruppe einer p-Gruppe den Index p. Ist aber $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = q^\beta$ mit $q \neq p$, so betrachten wir $\mathfrak{G}/\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{G}}$. $\mathfrak{U}$ entspricht eine maximale Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Ist $\overline{\mathfrak{U}}$ invariant in $\overline{\mathfrak{G}}$, so haben wir $(\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{U}}) = q$ und sind fertig. Im anderen Falle existiert ein minimaler Normalteiler $\overline{\mathfrak{N}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ einer Ordnung $(\overline{\mathfrak{N}}) = q^\gamma$. Wegen $\overline{\mathfrak{N}}\,\overline{\mathfrak{U}} = \overline{\mathfrak{G}}$ folgt $\beta = \gamma$. Es gilt $\overline{\mathfrak{N}} < \overline{\mathfrak{G}}$ wegen $(\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{N}}) = (\overline{\mathfrak{U}}) = p$. Ist $\overline{\mathfrak{M}} < \overline{\mathfrak{N}}$, so ist $\overline{\mathfrak{M}}$ als zweitmaximale Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant in $\overline{\mathfrak{G}}$. Da aber $\overline{\mathfrak{N}}$ ein minimaler Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, haben wir $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{E}}$. Es folgt $(\overline{\mathfrak{N}}) = q$, also $\beta = 1$, was zu beweisen war.

Definition 7. *$\mathfrak{V}$ heißt eine drittmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn es eine zweitmaximale Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ gibt.*

Satz 24. *Sei jede drittmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ invariant. Dann gilt*: a) *Ist $(\mathfrak{G})$ durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar, so ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar*; b) *$\mathfrak{G}'$ ist nilpotent*; c) *$r(\mathfrak{G}) \leq 2$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, so ist jede zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{U}$ als drittmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ invariant in $\mathfrak{G}$ und daher auch in $\mathfrak{U}$. Nach Satz 23 ist $\mathfrak{U}$ überauflösbar, nach Satz 22 $\mathfrak{G}$ auflösbar. Wir bemerken noch, daß jede zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ nilpotent ist.

a) Jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist überauflösbar. Enthält $(\mathfrak{G})$ mindestens vier verschiedene Primteiler, so ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 22 überauflösbar. Im folgenden nehmen wir daher $(\mathfrak{G}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ an $(p_1 > p_2 > p_3)$.

Sei zunächst $\mathfrak{G}_{p_1}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N}$ ein in $\mathfrak{G}_{p_1}$ liegender minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so haben wir die Kette $\mathfrak{G} > \mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3} > \mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$. Daher liegt $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$ in einer zweitmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und ist somit nilpotent. $\mathfrak{G}_{p_2}$ und $\mathfrak{G}_{p_3}$ liegen in drittmaximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die invariant und nilpotent sind. Folglich ist $\mathfrak{G}_{p_2} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_{p_3} \lhd \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}$ selbst nilpotent.

Weiterhin sei $\mathfrak{G}_{p_1}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}_{p_1}$ elementar abelsch.

Sei nun $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$ nilpotent. Ist $(\mathfrak{G}_{p_2}) \neq p_2$, so haben wir die Kette $\mathfrak{G} > \mathfrak{G}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3} > \overline{\mathfrak{G}}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3} > \mathfrak{G}_{p_3}$ mit einer eigentlichen Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{p_2} \neq \overline{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{G}_{p_2}$. Demnach liegt $\mathfrak{G}_{p_3}$ in einer drittmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Diese ist invariant und nilpotent, woraus $\mathfrak{G}_{p_3} \lhd \mathfrak{G}$ folgt. Dann sind $\mathfrak{G}_{p_1}$ und $\mathfrak{G}_{p_3}$ elementweise vertauschbar, und $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}\} \times \mathfrak{G}_{p_3}$ ist wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}$ überauflösbar. Ebenso schließen wir, falls $(\mathfrak{G}_{p_3}) \neq p_3$. Ist aber

$(\mathfrak{G}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3}) = p_2 p_3$, so ist $\mathfrak{G}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3}$ abelsch. Nun erhalten wir wie beim Beweis von Satz 22 die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Sei schließlich $\mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$ nicht nilpotent. Ist $\mathfrak{G}_{p_3}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$, so liegt $\mathfrak{G}_{p_3}$ in einer drittmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist daher invariant in $\mathfrak{G}$. Daraus folgt zusammen mit $\mathfrak{G}_{p_3} \lhd \mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$, daß $\mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$ nilpotent ist, was aber gerade ausgeschlossen wurde. Somit ist $\mathfrak{G}_{p_3}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$. Wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$ folgt $(\mathfrak{G}_{p_3}) = p_2$. Ist $(\mathfrak{G}_{p_3}) = p_3^\alpha$ mit $\alpha \geq 2$, so ist $\mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$ enthalten in einer zweitmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist also nilpotent. Daher ist $\mathfrak{G}_{p_3}$ invariant in $\mathfrak{G}$, und die Gruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{p_1} \cong \mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{p_2} \cong \mathfrak{G}_{p_1} \mathfrak{G}_{p_3}$ sind überauflösbar. Nach Hilfssatz 2 ist auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{p_1} \cap \mathfrak{G}_{p_2} \cong \mathfrak{G}$ überauflösbar. Sei schließlich $(\mathfrak{G}_{p_3}) = p_3$. $\mathfrak{G}_{p_1}$ ist dann zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}_{p_1}$ ist invariant in $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}_{p_1}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $(\mathfrak{G}_{p_1}) = p_1$. Dann haben wir $(\mathfrak{G}) = p_1 p_2 p_3$, und $\mathfrak{G}$ ist auch in diesem Falle überauflösbar.

b) Nun zeigen wir durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$, daß $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist. Wegen a) und Satz 8 können wir uns beschränken auf den Fall $(\mathfrak{G}) = p^\alpha q^\beta$.

$\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ seien von $\mathfrak{E}$ verschiedene Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{E}$. Die Induktionsannahme liefert uns die Nilpotenz von $\mathfrak{G}'\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_i \cong \mathfrak{G}'/\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{N}_i$, woraus folgt, daß auch $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cong \mathfrak{G}'$ nilpotent ist. Weiterhin dürfen wir daher annehmen, daß $\mathfrak{G}$ nur einen einzigen minimalen Normalteiler besitzt. Dann hat $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ Primzahlpotenzordnung, etwa $(\mathfrak{F}) = p^\gamma$. Wäre $\beta > 2$, so gäbe es eine drittmaximale Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung durch q teilbar wäre. Wegen $\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{G}$ und der Nilpotenz von $\mathfrak{V}$ würde folgen $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{V}_q \lhd \mathfrak{G}$ im Widerspruch zu $(\mathfrak{F}) = p^\gamma$. Also ist $\beta \leq 2$ und daher $\mathfrak{G}_q' = \mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$, so folgt wegen $\mathfrak{G}_q' = \mathfrak{E}$, daß $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{G}_p$, also $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist. Aus $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}_p$ erhalten wir $\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}_q \neq \mathfrak{G}$. Ist $\overline{\mathfrak{G}}_q < \mathfrak{G}_q$, so liegt $\mathfrak{F}\,\overline{\mathfrak{G}}_q$ in einer zweitmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist daher nilpotent. Daraus ergibt sich $\overline{\mathfrak{G}}_q < \mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{F}$ (FITTING [6], S. 107), also $\overline{\mathfrak{G}}_q = \mathfrak{E}$ und $(\mathfrak{G}_q) = q$. Sei $\mathfrak{U}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ von Primzahlindex. Ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{U}) = q$, so folgt $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{G}_p = \mathfrak{U}$, und wir sind fertig. Sei daher $(\mathfrak{G}/\mathfrak{U}) = p$. Wäre $q > p$, so hätten wir wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{U}$ die Aussage $\mathfrak{U}_q = \mathfrak{G}_q \lhd \mathfrak{U}$ (Satz 7), also auch $\mathfrak{G}_q \lhd \mathfrak{G}$, im Widerspruch zu $(\mathfrak{F}) = p^\gamma$. Daher ist $p > q$ und $\mathfrak{U}_p \lhd \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}_p$ hat die Ordnung $p\,q$, besitzt daher wegen $p > q$ einen Normalteiler der Ordnung p. Daraus folgt $\mathfrak{G}_p \lhd \mathfrak{G}$ und dann $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{G}_p$, womit die Behauptung bewiesen ist.

c) Beim Nachweis, daß $\mathfrak{G}$ höchstens den Rang 2 hat, können wir uns wegen a) wieder auf den Fall $(\mathfrak{G}) = p^\alpha q^\beta$ beschränken. Wieder führen wir den Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler der Ordnung p^γ von $\mathfrak{G}$. Hat $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ einer Ordnung $q^\mu \neq 1$, so folgt aus der Induktionsannahme die Existenz eines $\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{N}}/\mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, $(\overline{\mathfrak{N}}) \mid p^2$ und $\overline{\mathfrak{N}} \leq \mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{N}} \lhd \mathfrak{G}$. Wegen $(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{N}}) \leq \mathfrak{K} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ folgt $\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{K} \times \overline{\mathfrak{N}}$. Daher ist $\overline{\mathfrak{N}} \lhd \mathfrak{G}$. Der Rest der Behauptung ergibt sich nun leicht durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{N}}$.

Gibt es in $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler einer Ordnung $q^\mu \neq 1$ mit $q \neq p$, so haben wir $(\mathfrak{F}) = p^\gamma$. Da $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist, ist auch $(\mathfrak{G}') = p^\delta$, woraus $\mathfrak{G}_p \lhd \mathfrak{G}$ folgt. Nun sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ liegt. Ist $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}_p$, so ist $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler in der eigentlichen Untergruppe $\mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_q$ von $\mathfrak{G}$, die überauflösbar ist. Also haben wir $(\mathfrak{N}) = p$. Ist aber $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}_p$, so ist $\mathfrak{G}_q$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Eine zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}_q$ ist invariant in $\mathfrak{G}$, muß also wegen $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$ gleich der Einheitsgruppe $\mathfrak{E}$ sein. Daher ist $(\mathfrak{G}_q) \mid q^2$. Falls $(\mathfrak{G}_q) = q^2$, so ist eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{N}$, welche in $\mathfrak{N}$ den Index p hat, drittmaximal in $\mathfrak{G}$, also invariant. Daraus folgt, da $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler ist, daß $(\mathfrak{N}) = p$ gilt. Ist aber $(\mathfrak{G}_q) = q$, so ist eine zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{N}$ invariant in $\mathfrak{N}$, also gleich $\mathfrak{E}$. Daher haben wir in diesem Falle $(\mathfrak{N}) \mid p^2$. Damit ist nachgewiesen, daß ein geeigneter minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ höchstens zwei Erzeugende hat. Die volle Behauptung folgt nun leicht durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

Satz 24 ist damit in allen Teilen bewiesen.

Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_4$ in vier Symbolen liefert das einfachste Beispiel einer Gruppe, deren drittmaximale Untergruppen alle invariant sind, welche aber nicht überauflösbar ist. Somit läßt sich Aussage a) von Satz 24 nicht auf Gruppen der Ordnung $p^\alpha q^\beta$ ausdehnen.

Es gibt überraschend viele einfache Gruppen, deren sämtliche Maximalketten nicht mehr als vier Glieder umfassen, deren sämtliche viertmaximalen Untergruppen also der Einheitsgruppe $\mathfrak{E}$ gleich sind. Die Gruppe niedrigster Ordnung dieser Art ist die Ikosaedergruppe $\mathfrak{A}_5$. Ferner gehören dazu die linearen Gruppen $PSL(2,13)$, $PSL(2,43)$, $PSL(2,67)$ und $PSL(2,173)$. Da alle Untergruppen von $PSL(2, p)$ bekannt sind, kann man leicht angeben, wann $\mathfrak{E}$ die einzige viertmaximale Untergruppe von $PSL(2, p)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $p-1$ und $p+1$ Produkt von höchstens drei Primzahlen sind und wenn noch gilt $p \not\equiv \pm 1$ (5) und $p \not\equiv \pm 1$ (8). Die oben angegebenen Primzahlen sind unterhalb 200 die einzigen mit dieserEigenschaft.

Literatur.

[1] Baer, R.: Nilpotent characteristic subgroups of finite groups. Amer. J. Math. **75**, 633—664 (1953). — [2] Baer, R.: Group elements of prime power index. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 20—47 (1953). — [3] Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 2. Aufl. 1911. — [4] Burnside, W.: On soluble irreducible groups of linear substitutions in a prime number of variables. Acta math. **27**, 217—224 (1903). — [5] Clifford, A. H.: Representations induced in an invariant subgroup. Ann. of Math. II **38**, 533—550 (1937). — [6] Fitting, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jber. dtsch. Math. Ver. **48**, 77—141 (1938). — [7] Frucht, R.: Über die Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen. J. für Math. **166**, 16—29 (1932). — [8] Gaschütz, W.: Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. **58**, 160—170 (1953). — [9] Hall, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [10] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime power orders. Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 29—95 (1933). — [11] Hall, P.: On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc. (2) **43**, 316—323 (1937). — [12] Hall, P.: The construction of soluble groups. J. für Math. **182**, 206—214 (1940). — [13] Huppert,

B.: Monomiale Darstellung endlicher Gruppen. Nagoya Math. J. **6**, 93—94 (1953). — [*14*] ITÔ, N.: Note on (LM)-groups of finite orders. Kōdai Math. Sem. Rep. **1951**, 1—6. — [*15*] ITÔ, N.: Note on A-groups. Nagoya Math. J. **4**, 79—81 (1952). — [*16*] ITÔ, N.: On the factorizations of the linear fractional group LF(2, p^n). Acta Sci. Math. Szeged **15**, 79—84 (1953). — [*17*] IWASAWA, K.: Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) **23**, 1—4 (1941). — [*18*] KALOUJNINE, L.: Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 2067—2069 (1950). — [*19*] KALOUJNINE, L.: Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un group abstrait. (Généralisation d'un théorème de M. PH. HALL.) C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 400—402 (1950). — [*20*] KOCHENDÖRFFER, R.: Über treue irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen. Math. Nachr. **1**, 25—39 (1948). — [*21*] LEVI, F., u. v. d. WAERDEN, B. L.: Über eine besondere Klasse von Gruppen. Hamburger Abh. **9**, 154—158 (1933). — [*22*] MITCHELL, H. H.: Ternary linear groups. Trans. Amer. Math. Soc. **12**, 207—242 (1911). — [*23*] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite orders. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [*24*] PERRON, O.: Algebra II, 2. Aufl. 1933. — [*25*] RÉDEI, L.: Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie. Comm. Math. Helv. **20**, 225—264 (1947). — [*26*] SCHMIDT, O.: Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind. Rec. math. Moscou **31**, 366—372 (1924). — [*27*] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [*28*] TAUNT, D. R.: On A-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 24—42 (1949). — [*29*] WAERDEN, B. L. v. D.: Moderne Algebra II, 2. Aufl. 1940. — [*30*] WAERDEN, B. L. v. D.: Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. Math. **4** (1935). — [*31*] WENDT, E.: Über eine specielle Classe von Gruppen. Math. Ann. **55**, 479—492 (1902). — [*32*] WEYL, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. 1928. — [*33*] WIELANDT, H.: Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen. Math. Z. **41**, 281—282 (1936). — [*34*] WIELANDT, H.: p-Sylowgruppen und p-Faktorgruppen. J. für Math. **182**, 180—193 (1940). — [*35*] WIELANDT, H.: Zum Satz von SYLOW. Math. Z. **60**, 407—408 (1954). — [*36*] ZAPPA, G.: Sui gruppi supersolubili. Rend. Sem. Mat. Roma IV **2**, 323—330 (1938). — [*37*] ZAPPA, G.: Sui sottogruppi finiti dei gruppi di Hirsch. Giorn. Mat. Battaglini **78**, 55—70 (1948). — [*38*] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. I. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 30. April 1954.)

THIMM, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 435—457 (1954)

Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen.

Von
WALTER THIMM.

Inhalt.

Seite
Einleitung 435
§ 1. Riemannsche Elementarbereiche 436
§ 2. Riemannsche Bereiche 439
§ 3. Parameterabhängige analytische Mengen in Riemannschen Elementarbereichen 441
§ 4. Kanonische Mengen in Riemannschen Bereichen 445
§ 5. Fasermengen meromorpher Abbildungen 450
§ 6. Funktionen auf der Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung 453
Literaturverzeichnis 457

Einleitung. Angeregt durch das Beispiel der mehrfach periodischen, meromorphen Funktionen hat man in der Funktionentheorie von mehreren komplexen Variablen zunächst den Begriff der *komplexen Mannigfaltigkeit* in den Vordergrund geschoben, obgleich klar ist, daß die Forderung nach der Mannigfaltigkeitseigenschaft der Existenzbereiche eine unzulässige Einschränkung der Funktionentheorie bedeutet; haben doch nicht einmal die Eindeutigkeitsbereiche algebraischer Funktionen von mehreren Variablen diesen Charakter[1]). Man muß also verzweigte Definitionsgebiete zulassen. Unter den verschiedenen Definitionen verzweigter funktionentheoretischer Bereiche, sog. *Riemannscher Bereiche*, scheint die von BEHNKE und STEIN[1]) angegebene die zweckmäßigste zu sein, weil sie topologisch vorgeht. Unter Zugrundelegung dieser Definition wird eine Theorie der analytischen Mengen auf Riemannschen Bereichen entwickelt. Die Ergebnisse werden auf die Beschreibung der Urbildmengen von meromorphen Abbildungen derartiger Bereiche angewandt. Daraus ergeben sich Beweise für die Hauptsätze über algebraische Abhängigkeit von meromorphen Funktionen auf kompakten Riemannschen Bereichen. Es zeigt sich, daß die vom Verfasser in früheren Arbeiten dargestellte Untersuchungsmethode meromorpher Abbildungen auch im vorliegenden Fall verwendbar ist, ja in ihm ihre Krönung und ihren Abschluß findet. Diese Methode erscheint wegen der vielen unvermeidlichen Einzelbeweisschritte recht kompliziert, und es ist die Gefahr nicht von der Hand zu weisen, daß die großen Linien der Gedankengänge im Gestrüpp der Einzeltatsachen untertauchen. Daher hat sich der Verfasser — angeregt durch Herrn E. PESCHL — entschlossen, in dieser Arbeit die Hauptideen zusammenfassend darzustellen, selbst wenn Ergebnisse früherer Arbeiten dazu wiederholt werden müssen.

[1]) [2], S. 4.

Um den Umfang dieser Arbeit nicht zu groß anschwellen zu lassen, sind einige Beweise hier nicht in allen Einzelheiten angegeben; es werden jedoch immer die wesentlichen Gesichtspunkte hervorgehoben, um das Verständnis der tragenden Ideen zu ermöglichen.

§ 1. Riemannsche Elementarbereiche.

1.1. *Ein $2n$-dimensionaler Riemannscher Elementarbereich $\mathfrak{X}$ wird als verzweigter Überlagerungskomplex folgendermaßen erklärt:*

Der simpliziale Komplex X sei ein (schlichtes) Gebiet des $\{x_1, \ldots, x_n\} = (x)_n = x$-Raumes. In X sei die Funktion $v(x)$ analytisch; ihre Nullstellenmenge V in X sei ein $2n-2$-dimensionaler Teilkomplex von X. $\mathfrak{X}$ sei eine $2n$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit. Es gebe eine simpliziale Abbildung A von $\mathfrak{X}$ auf X, die sog. Projektion, die jedes Simplex von $\mathfrak{X}$ auf ein gleichdimensionales Simplex von X abbildet. Jedes Simplex von X ist Bild wenigstens eines Simplex von $\mathfrak{X}$; jedes Simplex von $X - V$ ist Bild von r verschiedenen Simplexen von $\mathfrak{X}$; jedes Simplex von V ist Bild von höchstens r Simplexen von $\mathfrak{X}$. Ist $\mathfrak{V} = A^{-1}(V)$, so sei A in $\dot{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} - \mathfrak{V}$ im kleinen topologisch; d.h. jeder Punkt in $\dot{\mathfrak{X}}$ besitze eine Umgebung, die durch A topologisch auf eine Umgebung des Bildpunktes abgebildet werde. $\dot{\mathfrak{X}}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, die *„zu $\mathfrak{X}$ gehörige Mannigfaltigkeit"*. Der Stern jedes Simplexes von $\mathfrak{V}$ sei eine regulär zusammenhängende $2n$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit. Der Komplex $\mathfrak{V}$ heiße *Verzweigungsmenge* von $\mathfrak{X}$, und V werde *Verzweigungsprojektion* von $\mathfrak{X}$ genannt.

1.2. Der Riemannsche Elementarbereich $\mathfrak{X}$ sei in den $\{x_1, \ldots, x_N\}$-Raum $(N > n)$ *eingebettet*, wenn die zu $\mathfrak{X}$ gehörige Mannigfaltigkeit unter Wahrung der Überlagerungseigenschaft topologisch äquivalent zu einer Teilmenge dieses Raumes ist, d.h. entspricht dem Punkte $\mathfrak{P}_0$ bei dieser Homöomorphie der Punkt $(x^0)_N$, so sei $A(\mathfrak{P}_0) = (x^0)_n$.

1.3. Es sei $\mathfrak{X}$ ein Riemannscher Elementarbereich mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

a) X sei eine simpliziale Umgebung des Nullpunktes 0 des $(x)_n$-Raumes (ohne Rand).

b) $\mathfrak{X}$ sei regulär zusammenhängend.

c) Die Menge $A^{-1}(0)$ erhalte nur einen Punkt $\mathfrak{O}$, der Eckpunkt jedes $2n$-dimensionalen Simplexes von $\mathfrak{X}$ sei.

Dann heiße $\mathfrak{X}$ Riemannsche Elementarumgebung des Punktes $\mathfrak{O}$.

1.4. Der reguläre Zusammenhang einer Riemannschen Elementarumgebung bleibt erhalten, wenn $\mathfrak{X}$ durch Verkleinerung der Projektion X eingeengt wird; genauer: Die Umgebung U von 0 werde beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine simpliziale Umgebung $X_1 \subset U$ von 0, so daß $A^{-1}(X_1)$ eine Riemannsche Elementarumgebung von $\mathfrak{O}$ ist.

1.5. In Riemannschen Elementarbereichen werden (eindeutige) Funktionen gebildet. *Eine in $\mathfrak{X}$ definierte Funktion $f(\mathfrak{P})$ heiße analytisch in $\mathfrak{X}$, wenn sie*

(1) *in* $\mathfrak{X}$ *stetig und* (2) *in der zu* $\mathfrak{X}$ *gehörigen Mannigfaltigkeit* $\dot{\mathfrak{X}}$ *analytisch ist.* Die zweite Bedingung verlangt: Jeder Punkt $\mathfrak{Q}$ von $\dot{\mathfrak{X}}$ hat in $\dot{\mathfrak{X}}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$, die durch die Projektion A topologisch auf eine Umgebung $U(\bar{x})$ des Punktes $\bar{x} = A(\mathfrak{Q})$ abgebildet wird. Dann sei fA^{-1} in $U(\bar{x})$ analytisch.

Eine in $\mathfrak{X}$ *definierte Funktion heiße meromorph, wenn sie Quotient zweier in* $\mathfrak{X}$ *analytischer Funktionen ist.* Dabei darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Nennerfunktion $g(\mathfrak{P}) = g(A\,\mathfrak{P}) = g(x)$ sogar in X analytisch ist.

Natürlich gibt es analytische und meromorphe Funktionen in $\mathfrak{X}$; denn jede in X analytische bzw. meromorphe Funktion $f(x)$ ist eine solche, wenn wir definieren $f(\mathfrak{P}) = f(A\,\mathfrak{P})$. Ein noch ungelöstes Problem ist die Frage, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{X}$ Teilgebiet des Regularitätsbereiches einer analytischen Funktion ist, oder mit anderen Worten, wann es eine analytische Funktion gibt, die in übereinanderliegenden Punkten von $\mathfrak{X}$ verschiedene Funktionselemente hat. Diese Frage soll nicht untersucht werden. Wir wenden uns vielmehr der Betrachtung der analytischen Mengen in $\mathfrak{X}$ zu.

1.6. *Eine analytische Menge in* $\mathfrak{X}$ *sei die Menge der gemeinsamen Nullstellen von in* $\mathfrak{X}$ *analytischen Funktionen.* Die Aufgabe der Bestimmung von analytischen Mengen in $\mathfrak{X}$ hat eine topologische und eine funktionentheoretische Seite. Der topologische Teil betrifft das „Durchdrücken" von analytischen Mengen aus der Projektion in $\mathfrak{X}$. Den uns allein interessierenden Fall beschreibt folgender Satz:

Der Teilkomplex K von X sei eine regulär zusammenhängende, s-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit, deren Rand auf dem Rande von X liege. Der Komplex $K \cap V$ enthalte nur Simplexe, deren Dimension $\leq s-2$ ist. Es sei P ein Punkt von $\dot{K} = K - \dot{K} \cap V$ und $\mathfrak{P}$ ein Punkt von $A^{-1}(P)$. Dann existiert in $\mathfrak{X}$ eine regulär zusammenhängende Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ mit $K = A(\mathfrak{K})$, deren Rand auf dem Rande von $\mathfrak{X}$ liegt und die den Punkt $\mathfrak{P}$ enthält. $\mathfrak{K}$ ist eindeutig bestimmt. Ist $\mathfrak{K}^*$ eine von $\mathfrak{K}$ verschiedene regulär zusammenhängende Teil-Pseudomannigfaltigkeit in $\mathfrak{X}$ mit der gleichen Projektion, so liegt $\mathfrak{K}^* \cap \mathfrak{K}$ in der Verzweigungsmenge $\mathfrak{V}$.

1.7. Dieser topologische Satz ermöglicht folgende Konstruktion von regulär zusammenhängenden Stücken analytischer Mengen: $\mathfrak{X}$ sei eine Riemannsche Elementarumgebung des Punktes $\mathfrak{O}$. Gegeben sei in X eine in 0 irreduzible analytische Mannigfaltigkeit E, die ein Teilkomplex von X sei. Der Rand von E liege auf dem Rande von X. Es gehöre E nicht zu der Verzweigungsprojektion V. P sei ein Punkt von $\dot{E} = E - E \cap V$ und $\mathfrak{P}$ ein Überlagerungspunkt von P. Da E eine Pseudomannigfaltigkeit in X ist, existiert in $\mathfrak{X}$ eine E überlagernde regulär zusammenhängende Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{P} \in \mathfrak{E}$. Wir nennen $\mathfrak{E}$ *Primkeim* des Punktes $\mathfrak{O}$ (in $\mathfrak{X}$)[2]. Es seien $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ Riemannsche Elementarumgebungen von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}$, vgl. 1.4. $\mathfrak{E}_1$ sei Primkeim von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}_1$, und $\mathfrak{E}_2$ sei Primkeim von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}_2$. Dann sei $\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{E}_2$ enthalten

[2]) Den eingeklammerten Zusatz lassen wir meistens weg.

— $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$ —, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ gibt, so daß $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{U} < \mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{U}$ gilt. Es sei $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$, wenn $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_2 < \mathfrak{E}_1$ ist.

1.8. Die Menge $A^{-1}(E)$ ist analytisch in $\mathfrak{X}$; sie ist eine Pseudomannigfaltigkeit, deren reguläre Komponenten Primkeime des Punktes $\mathfrak{O}$ mit der Projektion E sind. Der Durchschnitt von je zwei dieser Primkeime liegt nach 1.6 in der Verzweigungsmenge $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{X}$. Es bleibe die Frage offen, ob jeder Primkeim eine analytische Menge im Sinne der Definition 1.6, d.h. volle Nullstellenmenge von in $\mathfrak{X}$ analytischen Funktionen ist; übrigens hängt dieses Problem mit der in 1.5 erwähnten Frage zusammen.

1.9. Unter Benutzung des Ergebnisses 1.8 folgt: Sind $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ Primkeime von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}$, so liegt $\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{E}_2$ oder der Durchschnitt von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ hat eine topologische Dimension, die um 2 kleiner als die topologische Dimension von $\mathfrak{E}_1$ ist.

1.10. Primkeime sind Bausteine zum Aufbau von analytischen Mengen. Die Definition des Primkeimes zeigt jedoch, daß nur solche analytischen Mengen $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{X}$ Vereinigungen von Primkeimen sein können, die in der folgenden Weise „gewöhnlich" zur Verzweigungsmenge $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{X}$ liegen:

Bedingung der gewöhnlichen Lage.

Die Menge $\mathfrak{M}$ sei gewöhnlich in $\mathfrak{X}$, wenn $\mathfrak{M} - \mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}$ dicht in $\mathfrak{M}$ ist.

1.11. Ähnlich wie der sog. zweite Weierstraßsche Satz ([*1*], S. 132) wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei $\mathfrak{M}$ eine gewöhnliche analytische Menge in der Riemannschen Elementarumgebung $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{O}$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}$, so daß $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{U}$ Vereinigungsmenge von endlich vielen Primkeimen des Punktes $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{U}$ ist.

1.12. Die Architektur eines Primkeimes wird besonders durchsichtig, wenn wir uns der sog. kanonischen Darstellung der irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit E bedienen. Ist ϱ die Dimension von E, so ist E bei geeigneter Wahl der Koordinaten $(y)_n$, die durch Ausführung einer passenden nicht ausgearteten linearen Transformation der $(x)_n$ erfolgen kann, eine in den $(y)_n$-Raum eingebettete Riemannsche Elementarumgebung über einer Umgebung $Y^{(\varrho)}$ des Nullpunktes des $(y)_\varrho$-Raumes. Für die Irreduzibilität von E ist charakteristisch, daß der reguläre Zusammenhang von E nicht aufhört, wenn E durch Verkleinerung der Projektion $Y^{(\varrho)}$ eingeengt wird (vgl. 1.4). Der Übergang von E zum Primkeim $\mathfrak{E}$ überhöht die Überlagerung E von $Y^{(\varrho)}$ um einen zweiten Schritt, d.h. ist B die Projektion von E auf $Y^{(\varrho)}$, so kann $\mathfrak{E}$ gedeutet werden als eine Riemannsche Elementarumgebung mit der Projektionsabbildung BA von $\mathfrak{E}$ auf $Y^{(\varrho)}$, wobei der reguläre Zusammenhang von $\mathfrak{E}$ bei Verkleinerung der Projektion $Y^{(\varrho)}$ erhalten bleibt.

1.13. Diese Erklärung legt eine Verallgemeinerung des Primkeimbegriffes dadurch nahe, daß in seiner Definition der Begriff „Riemannsche Elementarumgebung" durch den Begriff „Riemannscher Elementarbereich" ersetzt wird: Im Riemannschen Elementarbereich $\mathfrak{X}$ sei $\mathfrak{M}$ eine Pseudomannigfaltigkeit, welche die Bedingung der gewöhnlichen Lage erfüllt. $\mathfrak{M}$ heiße *kanonischer*

Keim, wenn der Rand von $\mathfrak{M}$ auf dem Rande von $\mathfrak{X}$ liegt, wenn $M = A(\mathfrak{M})$ eine analytische Menge in X und ein in den $(y)_n$-Raum eingebetteter Riemannscher Elementarbereich über einem Gebiet $Y^{(\varrho)}$ des $(y)_\varrho$-Raumes ist. Auch $\mathfrak{M}$ sei ein Riemannscher Elementarbereich über $Y^{(\varrho)}$.

Man hat bei einem kanonischen Keim also zwei Projektionen: 1. Die Projektion $M = A(\mathfrak{M})$, 2. die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $Y^{(\varrho)}$, die wir zur Unterscheidung von A *„Keimprojektion"* nennen.

Als Riemannscher Elementarbereich besitzt $\mathfrak{M}$ eine Verzweigungsmenge $\mathfrak{V}(\mathfrak{M})$ und eine Verzweigungsprojektion $v(\mathfrak{M})$, die durch eine analytische Gleichung $v(y)_\varrho = 0$ in $Y^{(\varrho)}$ bestimmt wird. $\dot{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} - \mathfrak{V}(\mathfrak{M})$ ist eine unverzweigte Überlagerungsmannigfaltigkeit von $Y^{(\varrho)} - v(\mathfrak{M})$.

Die regulär zusammenhängenden Komponenten eines kanonischen Keimes sind kanonische Keime mit derselben Keimprojektion. $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann regulär zusammenhängend, wenn $\dot{\mathfrak{M}}$ zusammenhängend (durch Kurven) ist.

1.14. Nachdem das Werkzeug zum Betreiben einer „lokalen" Funktionentheorie in Riemannschen Elementarumgebungen bereitliegt, kann der Schritt zur „globalen" Funktionentheorie vollzogen werden.

§ 2. Riemannsche Bereiche.

2.1. Ein *Riemannscher Bereich* sei ein zusammenhängender topologischer Raum $\mathfrak{R}$ mit einer Basis von *„ausgezeichneten Umgebungen"*, die topologisch äquivalent zu Riemannschen Elementarumgebungen sind und der folgenden „Verträglichkeitsbedingung" genügen: Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Punkte von $\mathfrak{R}$ mit ausgezeichneten Umgebungen $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_1)$ bzw. $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_2)$, die einen nichtleeren Durchschnitt $\mathfrak{S}$ haben. Ist darin für $\lambda = 1, 2$ T_λ die topologische Abbildung von $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_\lambda)$ auf die Riemannsche Elementarumgebung $\mathfrak{X}_\lambda$, so sei die topologische Abbildung $\mathfrak{T} = T_2 T_1^{-1}$ von $\mathfrak{S}_1 = T_1(\mathfrak{S})$ auf $\mathfrak{S}_2 = T_2(\mathfrak{S})$ analytisch; d. h. zu jedem Punkt $\mathfrak{Q}_1 \in \mathfrak{S}_1$ und zu dem Bildpunkte $\mathfrak{Q}_2 \in \mathfrak{S}_2$ gebe es Riemannsche Elementarumgebungen $\mathfrak{K}_1 < \mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2 < \mathfrak{S}_2$, so daß die Abbildungen $\mathfrak{T}' = A_2 \mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{T}'' = A_1 \mathfrak{T}^{-1}$ (A_λ Projektion von $\mathfrak{X}_\lambda$, $\lambda = 1, 2$) durch Funktionen, die in $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ analytisch sind, gegeben werden ([2], S. 6).

2.2. Um eine kurze Ausdrucksweise zu haben, sei im folgenden der Buchstabe $\mathbf{\Sigma}$ Symbol für (höchstens) abzählbar unendliche, $\mathfrak{R}$ überdeckende Systeme von ausgezeichneten Umgebungen, wobei mit jedem Element $\mathfrak{U}$ eines Systems $\mathbf{\Sigma}$ eine topologische Abbildung T von $\mathfrak{U}$ auf eine Riemannsche Elementarumgebung $\mathfrak{X}$ fest verknüpft zu denken ist[3]).

a) Ist ein System $\mathbf{\Sigma}$ gegeben, so sei die Menge $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{R}$ *Primkeim* des Punktes $\mathfrak{P} \in \mathfrak{R}$, wenn aus $\mathfrak{U} \in \mathbf{\Sigma}$ und $\mathfrak{P} \in \mathfrak{U}$ folgt, daß eine Umgebung $\mathfrak{U}^* < \mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$ existiert, so daß $T(\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}^*)$ Primkeim des Punktes $T(\mathfrak{P})$ in $T(\mathfrak{U}^*) < \mathfrak{X}$ ist.

b) Wir nennen eine Funktion $f(\mathfrak{P})$ des Punktes $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ *analytisch* (*meromorph*) in $\mathfrak{R}$, wenn ein System $\mathbf{\Sigma}$ existiert, so daß für alle $\mathfrak{U} \in \mathbf{\Sigma}$ die Funktion $f T^{-1}$ analytisch (meromorph) in $\mathfrak{X}$ ist.

[3]) Diese Bezeichnungen verwenden wir auch in den folgenden Definitionen.

c) Eine Menge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ heiße *analytisch*, wenn es ein System $\mathfrak{\Sigma}$ gibt, so daß für jedes $\mathfrak{U} \in \mathfrak{\Sigma}$ die Menge $T(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{U})$ eine analytische Menge in $\mathfrak{X}$ ist.

d) Die Menge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ sei *gewöhnlich*, wenn ein System $\mathfrak{\Sigma}$ existiert, so daß aus $\mathfrak{U} \in \mathfrak{\Sigma}$ folgt, daß $T(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{M})$ gewöhnlich in $\mathfrak{X}$ ist.

e) Eine Teilmenge $\mathfrak{E}$ der Menge $\mathfrak{M} < \mathfrak{R}$ heiße Primkeim von $\mathfrak{M}$ im Punkte $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{E}$ Primkeim des Punktes $\mathfrak{P}$ ist und kein Primkeim $\neq \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{P}$ existiert, der $\mathfrak{E}$ enthält und in $\mathfrak{M}$ liegt. Eine Menge $\mathfrak{M} < \mathfrak{R}$ heiße *analytisch zusammenhängend*, wenn es zu beliebigen Primkeimen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{M}$ eine endliche Kette von Primkeimen $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_h$ von $\mathfrak{M}$ gibt, so daß $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_h = \mathfrak{E}^*$ ist, und für $i = 1, \ldots, h-1$ $\mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{E}_{i+1}$ einen gemeinsamen Primkeim besitzen.

2.3. Nach diesen Definitionen erscheinen einige Begriffe des § 1 in neuem Licht; es gilt:

1. Ein regulär zusammenhängender Riemannscher Elementarbereich ist ein Riemannscher Bereich.

2. Ein regulär zusammenhängender kanonischer Keim ist analytisch zusammenhängend und umgekehrt.

2.4. Im Mittelpunkt der späteren Untersuchungen wird das Studium von Systemen meromorpher Funktionen stehen. Dabei bedienen wir uns der folgenden Terminologie:

Die Funktionen $f_1(\mathfrak{P}), \ldots, f_k(\mathfrak{P})$ seien meromorph (analytisch) im Riemannschen Gebiet $\mathfrak{R}$ bei der Zugrundelegung des gleichen Systems $\mathfrak{\Sigma}$. Wir nennen die Abbildung $\mathfrak{\Omega}_k$:

$$z_j = f_j(\mathfrak{P}), \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

von $\mathfrak{R}$ in den Raum der Funktionentheorie eine *meromorphe (analytische) Abbildung* von $\mathfrak{R}$. Da meromorphe Funktionen Unbestimmtheitspunkte haben, bedarf der Begriff des Bildpunktes bei einer meromorphen Abbildung der Erklärung. Es sei[3]: $\mathfrak{U} \in \mathfrak{\Sigma}$, $\mathfrak{X} = T(\mathfrak{U})$ und in $\mathfrak{X}$:

$$z_j = f_j(\mathfrak{P}) = h_j(\mathfrak{P})/g_j(\mathfrak{P}), \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

mit $g_j(\mathfrak{P}) = g_j(A\,\mathfrak{P}) = g_j(x)$, vgl. 1.5. Setzen wir:

$$g(x) = \prod_{j=1}^{k} g_j(x), \tag{3}$$

so ist die Abbildung $\mathfrak{\Omega}_k T^{-1}$ in allen Punkten $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{X}$ mit $g(A\,\mathfrak{P}) \neq 0$ analytisch und daher der Bildpunkt $\mathfrak{\Omega}_k T^{-1}(\mathfrak{P})$ ein wohlbestimmter endlicher Punkt des z-Raumes. Bildpunkt eines beliebigen Punktes $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{U}$ sei jeder Punkt ζ des Raumes der Funktionentheorie, für den eine Folge $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}, z^{(\nu)} = \mathfrak{\Omega}_k T^{-1}(\mathfrak{P}^{(\nu)})\}$ mit $g(\mathfrak{P}^{(\nu)}) \neq 0$, $\mathfrak{P}^{(\nu)} \in \mathfrak{X}$ existiert, deren Grenzpunkt $\{T(\mathfrak{Q}), \zeta\}$ ist. Wir nennen $\{\mathfrak{Q}, \zeta = \mathfrak{\Omega}_k(\mathfrak{Q})\}$ Punktepaar von $\mathfrak{\Omega}_k$. Die Punktepaare $\mathfrak{\Omega}_k$ in $\{\mathfrak{U}, z\text{-Raum}\}$ genügen dem Gleichungssystem:

$$g_j\big(T(\mathfrak{Q})\big)\, z_j - h_j\big(T(\mathfrak{Q})\big) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

das wir Gleichungssystem von $\mathfrak{\Omega}_k$ für $\mathfrak{U} \in \mathfrak{\Sigma}$ nennen.

2.5. Eine meromorphe Abbildung bildet im allgemeinen analytische Mengen des Riemannschen Bereiches $\mathfrak{R}$ auf Punkte ab. Diese Mengen hängen von Parametern, nämlich den Koordinaten des Bildpunktes ab. Die Untersuchung einer meromorphen Abbildung führt daher auf das Problem, die Abhängigkeit analytischer Mengen von Parametern zu studieren.

§ 3. Parameterabhängige analytische Mengen in Riemannschen Elementarbereichen.

3.1. Es sei $\mathfrak{X}$ ein Riemannscher Elementarbereich mit der Projektionsabbildung A und der Projektion X. Z sei ein einfach zusammenhängendes[4]) Gebiet des $\{z_1, \ldots, z_k\} = (z)_k = z$-Raumes. Das topologische Produkt $\tilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, Z\}$ von $\mathfrak{X}$ und Z ist ein Riemannscher Elementarbereich, wenn als Projektionsabbildung $\tilde{A}$ diejenige Abbildung genommen wird, die auf $\mathfrak{X}$ mit A und auf Z mit der Identität übereintimmt; die Projektion von $\tilde{\mathfrak{X}}$ ist $\tilde{X} = \{X, Z\}$.

3.2. Wir betrachten analytische Mengen in $\tilde{\mathfrak{X}}$ und definieren: Der kanonische Keim $\tilde{\mathfrak{M}}$ in $\tilde{\mathfrak{X}}$ hänge *„parametrisch von z"* ab, wenn es eine nicht ausgeartete lineare Transformation:

$$(y)_n = L(x)_n, \tag{5}$$

ein Gebiet $Y^{(\varrho)}$ im $(y)_\varrho$-Raum ($\varrho \geq 0$) und ein Gebiet Z des $(z)_k$-Raumes gibt, so daß $\tilde{\mathfrak{M}}$ ein Riemannscher Elementarbereich über $\tilde{Y}^{(\varrho)} = \{Y^{(\varrho)}, Z\}$ ist, wobei die zugehörige Keimprojektionsabbildung $\tilde{K}$:

$$\tilde{Y}^{(\varrho)} = \tilde{K}(\tilde{\mathfrak{M}}), \tag{6}$$

die z-Koordinaten der Punkte von $\tilde{\mathfrak{M}}$ ungeändert lasse. Diesen Sachverhalt fassen wir in die Formel

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z), \qquad z \in Z, \tag{7}$$

zusammen.

3.3. Der Grund zur Einführung der parameterabhängigen kanonischen Keime liegt in ihren Eigenschaften bei Parameterspezialisierungen oder allgemeiner Substitutionen folgender Art: Die Funktionen:

$$z_i = \varphi_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_l), \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{8}$$

seien analytisch im Gebiet $\mathbf{Z}$[4]). Die Abbildung (8) — im folgenden kurz mit $z = \varphi(\zeta)$ bezeichnet — bilde $\mathbf{Z}$ in Z ab.

Der kanonische Keim $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, besitze die Verzweigungsprojektion

$$v\big((y)_\varrho, z\big) = 0. \tag{9}$$

[4]) Alle Gebiete des Parameterraumes, die bei den folgenden Untersuchungen vorkommen, werden einfach zusammenhänge nd vorausgesetzt, ohne daß dieses künftig noch hervorgehoben werde.

Nach dem Einsetzen von (8) in die Funktion v, verschwinde v nicht identisch. Dann ist die Menge $\mathfrak{N}'$ der Punkte $\{\mathfrak{P}, \zeta\}$, für die $\{\mathfrak{P}, z=\varphi(\zeta)\}$ in $\tilde{\mathfrak{M}}$ liegt, ein kanonischer Keim, und es gilt:

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}'(\zeta), \quad \zeta \in \mathbf{Z}. \tag{10}$$

3.4. Kanonische Keime $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ dienen als Bausteine für analytische Mengen, die von Parametern abhängen. Wichtig ist daher die Frage: Unter welchen Bedingungen bleibt der analytische Zusammenhang eines kanonischen Keimes bei einer Substitution (8) erhalten? Sucht man nur hinreichende Bedingungen, so genügt es, dieses Problem für die Parameterspezialisierung:

$$z=\bar{z} \in Z \tag{11}$$

zu studieren. Es sei[5]:

$$\mathfrak{M}(\bar{z})=\tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\}, \qquad \dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})=\dot{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\},$$

und mit $Q=v(\tilde{\mathfrak{M}})$ sei $\overline{Q}=Q \cap \{Y^{(\varrho)}, \bar{z}\}$. Unsere Aufgabe kann nach 2.3 und 1.13 so formuliert werden: Suche hinreichende Bedingungen dafür, daß aus dem Zusammenhang (durch Kurven) von $\dot{\mathfrak{M}}$ der Zusammenhang von $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ folgt. Wie gleich gezeigt werden soll, reicht die folgende *Deformationsbedingung* aus:

Jede Kurve in $\dot{Y}^{(\varrho)}=\tilde{Y}^{(\varrho)}-Q$, *deren Endpunkte zu* $\{Y^{(\varrho)}, \bar{z}\}$ *gehören, kann unter Festhaltung der Endpunkte in* $\dot{Y}^{(\varrho)}$ *auf eine Kurve deformiert werden, die in* $\{Y^{(\varrho)}-\overline{Q}, \bar{z}\}$ *liegt.*

Sind nämlich $\tilde{\mathfrak{P}}_1=\{\mathfrak{P}_1, \bar{z}\}$ und $\tilde{\mathfrak{P}}_2=\{\mathfrak{P}_2, \bar{z}\}$ Punkte von $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$, so können wir diese Punkte wegen des vorausgesetzten Zusammenhanges von $\dot{\mathfrak{M}}$ in $\dot{\mathfrak{M}}$ durch eine Kurve $\boldsymbol{T}_0$ verbinden. Diese Kurve projiziert sich in $\dot{Y}^{(\varrho)}$ auf eine Kurve $\gamma_0=\tilde{K}(\boldsymbol{T}_0)$, deren Endpunkte zu $\{Y^{(\varrho)}, \bar{z}\}$ gehören.

Nach der Deformationsbedingung ist γ_0 in $\dot{Y}^{(\varrho)}$ unter Festhaltung der Endpunkte homotop zu einer Kurve γ_1, in $\{Y^{(\varrho)}-\overline{Q}, \bar{z}\}$. Diese Deformation drückt sich in $\dot{\mathfrak{M}}$ als Deformation von $\boldsymbol{T}_0$ auf eine Kurve $\boldsymbol{T}_1$ durch, die in $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ liegt und $\tilde{\mathfrak{P}}_1$ mit $\tilde{\mathfrak{P}}_2$ verbindet, so daß in der Tat $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ zusammenhängend ist.

3.5. Ausgedehnte Untersuchungen zur Diskussion der Deformationsbedingung werden in den Arbeiten [3] und [5] auf den Begriff der „*Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten*" gegründet. Dieser für die Theorie der parametrischen Abhängigkeit grundlegende Begriff werde nun erklärt:

Die Funktion $v((y)_\varrho, z)$ mit der Nullstellenmenge Q sei im Gebiet $\tilde{\mathfrak{Y}}=\{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}\}$ analytisch. Wir unterscheiden die Fälle $\varrho=0$, $\varrho=1$ und $\varrho>1$.

A. $\varrho=0$. Es sei $Q \cap \mathfrak{Z}$ leer.

B. $\varrho=1$. Es gebe einen Kreis $Y_1 < \mathfrak{Y}$ in der y_1-Ebene und ein Gebiet $Z < \mathfrak{Z}$ derart, daß die Punkte von $Q \cap \{Y_1, Z\}$ eine ganz algebroide Gleichung

[5]) Vgl. 1.13; $\dot{\mathfrak{M}}$ ist die zu $\tilde{\mathfrak{M}}$ gehörige Mannigfaltigkeit.

$\mathfrak{p}(y_1/z)=0$ erfüllen; $\mathfrak{p}$ Polynom von y_1 mit in Z analytischen Koeffizienten, höchster Koeffizient 1. Für $z\in Z$ besitze $\mathfrak{p}$ im Innern von Y_1 lauter verschiedene Wurzeln und keine Wurzeln auf dem Rande von Y_1. Dann heiße Q Schar für $\{Y_1, Z\}$.

C. Scharen seien für Dimensionen des y-Raumes $\leq \varrho-1$ definiert. Es gebe Gebiete $Y<\mathfrak{Y}$ und $Z<\mathfrak{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Eine nicht ausgeartete lineare Transformation:

$$(\eta)_\varrho = L(y)_\varrho \tag{12}$$

überführe Y in das Kreiszylindergebiet $\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{H}', \varkappa\}$, $\boldsymbol{H}'$ Kreiszylindergebiet im $(\eta)_{\varrho-1}$-Raum, $\varkappa$ Kreis in der η_ϱ-Ebene.

2. Es gebe im $(\eta)_{\varrho-1}$-Raum eine Schar q für $\{\boldsymbol{H}', Z\}$ derart, daß gilt:

a) Jeder Punkt von $Q\cap\{Y, Z\}$ dessen Projektion in den $\{(\eta)_{\varrho-1}, z\}$-Raum nicht zu q gehört, genüge der Gleichung:

$$\mathfrak{p}(\eta_\varrho/(\eta)_{\varrho-1}, z)=0; \tag{13}$$

$\mathfrak{p}$ Polynom von η_ϱ mit in $\{\boldsymbol{H}', Z\}$ analytischen Koeffizienten, höchster Koeffizient 1.

b) Wenn $\{(\eta)_{\varrho-1}, z\}\in\{\boldsymbol{H}', Z\}-q$ ist, besitze $\mathfrak{p}$ im Inneren von $\varkappa$ lauter verschiedene Wurzeln und keine Wurzeln auf dem Rande von $\varkappa$.

Unter den angegebenen Voraussetzungen sei Q eine (lokale) *Schar* für $\{Y, Z\}$.

D. Diese Definition läßt sich auf allgemeinere Teilgebiete G von $\mathfrak{Y}$ ausdehnen: Q heiße Schar für $\{G, Z\}$, wenn jeder Punkt $(\bar{y})_\varrho$ von G eine Umgebung $U(\bar{y})_\varrho$ besitzt, so daß Q (lokale) Schar für $\{U(\bar{y})_\varrho, Z\}$ ist.

3.6. Die Bedeutung des Begriffes der Schar beruht a) auf der Invarianz bei Substitutionen (8), b) auf der Beziehung zur Deformationsbedingung, c) auf der Verbindung mit speziellen Eliminationsproblemen, auf welche die Frage nach dem Vorhandensein der Schareigenschaft führt.

Zu a). Es sei Q Schar für $\{G, Z\}$. Die analytische Abbildung (8) bilde $\boldsymbol{Z}$ in Z ab. Q' sei die Nullstellenmenge der Funktion $v'((y)_\varrho, \zeta)=v((y)_\varrho, \varphi(\zeta))$. Dann ist Q' Schar für $\{G, \boldsymbol{Z}\}$.

Zu b). Wenn Q eine Schar für $\{Y^{(\varrho)}, Z\}$ ist, gilt die Deformationsbedingung für alle $\bar{z}\in Z$.

Der Beweis von a) folgt aus der Definition der Schar; b) ist ein Hauptergebnis der Arbeiten [3] (vgl. S. 152) und [5] (vgl. S. 13).

Für eine Zusammenfassung der Ergebnisse a), b) und 3.4 benutzen wir folgende Bezeichnung: Der kanonische Keim $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ heiße *ausgezeichnet*, wenn seine Verzweigungsprojektion $v(\tilde{\mathfrak{M}})$ eine Schar für $\{Y^{(\varrho)}, Z\}$ ist. Wir haben somit den Satz:

Ein ausgezeichneter, analytisch zusammenhängender, kanonischer Keim geht durch die Substitution (8) *in einen ausgezeichneten, analytisch zusammenhängenden, kanonischen Keim über.*

Zu c). Es handelt sich um solche Eliminationsprobleme, bei denen ein Teil der Variablen als „Parameter" ausgezeichnet ist. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, soll das Grundprinzip derartiger Untersuchungen angegeben werden.

3.7. Es sei $f(x, z)$ eine im Punkte $\{\mathfrak{O}, z_0\}$ analytische Funktion der n Variablen $(x)_n$ und der k Parameter $(z)_k$. Dann lautet das *„Prinzip der Parameterspezialisierung"*:

a) In jeder beliebigen Umgebung von z^0 gibt es einen Punkt $\bar{z}$, so daß $f(x, \bar{z}) \not\equiv 0$ ist.

b) Die Anzahl der Parameter sei $k = 1$. Es gibt eine Potenz $(z - z^0)^\alpha$, $\alpha \geq 0$ ganz, so daß $f(x, z) = (z - z^0)^\alpha \cdot f_1(x, z)$ mit analytischem $f_1(x, z)$ und $f_1(x, z_0) \not\equiv 0$ ist.

3.8. Bekanntlich beruhen alle Eliminationen in der Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen auf dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz. Interessieren wir uns für die Abhängigkeit der Nullstellenmenge $\tilde{\mathfrak{M}}$ von $f(x, z)$ von den Parametern z, so müssen wir diesen Satz möglichst so anwenden, daß die lineare Variablentransformation die Sonderrolle, die wir den z zugedacht haben, nicht zerstört, d.h. sie darf nur die Variablen x und nicht die Parameter z betreffen. Im Punkte $\{\mathfrak{O}, z^0\}$ ist die Bedingung hierfür: $f(x, z^0) \not\equiv 0$. Unter dieser Voraussetzung existiert nämlich eine lineare Transformation (5), so daß bei Auszeichnung von y_n:

$$f(x, z) = f(y, z) = p\left(y_n/(y)_{n-1}, z\right) \cdot e(y, z), \tag{14}$$

p ausgezeichnetes Pseudopolynom von y_n mit der Spitze im Punkte $\{\mathfrak{O}, z^0\}$, $e(\mathfrak{O}, z^0) \neq 0$. Da $\tilde{\mathfrak{M}}$ in der Umgebung von $\{\mathfrak{O}, z^0\}$ durch die ganz algebroide Gleichung $p = 0$ bestimmt wird, ist $\tilde{\mathfrak{M}}$ ein Riemannscher Elementarbereich über dem topologischen Produkt einer Umgebung des Nullpunktes im $(y)_{n-1}$-Raum und einer Umgebung von z^0; d.h. $\tilde{\mathfrak{M}}$ hängt in der Umgebung von $\{\mathfrak{O}, z^0\}$ parametrisch von z ab.

3.9. Wenn $f(x, z^0) \equiv 0$ ist, führt das Prinzip der Parameterspezialisierung (3.7) zu den beiden folgenden Aussagen:

a) *Es gibt in beliebiger Umgebung von z^0 einen Punkt $\bar{z}$ und dazu Umgebungen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{O}$ und $Z(\bar{z})$ von $\bar{z}$, so daß:*

$$(\tilde{\mathfrak{M}}) = \tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{G}, Z(\bar{z})\}$$

aus parametrisch von z abhängigen, kanonischen Keimen besteht.

b) *Im Falle $k = 1$ gibt es Umgebungen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{O}$ und $Z(z^0)$ von z^0, so daß*

$$(\tilde{\mathfrak{M}}) = \tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{G}, Z(z^0)\} = \tilde{\mathfrak{M}}_1 \cup \tilde{\mathfrak{M}}_2$$

ist, wobei $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ aus parametrisch von z abhängigen kanonischen Keimen besteht, während $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ nur Punkte enthält, in denen $z \equiv z_0$ ist.

Dieses Ergebnis gilt wörtlich für die Nullstellenmenge $\widetilde{\mathfrak{M}}$ eines Systems von Gleichungen:

$$f_\lambda(\mathfrak{P}, z) = 0, \qquad \lambda = 1, \ldots, l, \qquad \{\mathfrak{P}, z\} \in \widetilde{\mathfrak{X}}; \tag{15}$$

f_λ analytisch in $\widetilde{\mathfrak{X}}$, vorausgesetzt, daß $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gewöhnlich ist.

Der Beweis geschieht durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Gln. (15) (vgl. [1], S. 132 und 1.11), wobei bei jedem Eliminationsschritt das Prinzip der Parameterspezialisierung benutzt wird.

Unsere „lokalen" Eliminationsaussagen können in folgender Weise erweitert werden:

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Kompaktum in $\mathfrak{X}$. Dann gibt es ein Gebiet $\mathfrak{G}$ mit:

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{G} < \mathfrak{X},$$

so daß a) und b) bei dieser Bedeutung von $\mathfrak{G}$ richtig bleiben.

3.10. Wie in den Arbeiten [3], S. 154 und [5], S. 9 gezeigt wird, führt die Diskussion der Scharbedingung für $v(\widetilde{\mathfrak{M}})$ in $\{Y^{(\varrho)}, Z\}$ auf ein analytisches Gleichungssystem in den Variablen $\{(y)_\varrho, z\}$. Wie in 3.9 folgt:

Gegeben sei ein kanonischer Keim, $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, mit der Keimprojektionsabbildung $\widetilde{K}$ und der Keimprojektion $\{Y^{(\varrho)}, Z\} = \widetilde{K}(\widetilde{\mathfrak{M}})$. Es sei B ein Kompaktum in $Y^{(\varrho)}$.

a) *Es sei z^0 ein Punkt in Z und $Z(z^0)$ eine Umgebung von z^0 in Z. Dann gibt es einen Punkt $\bar{z}$ in $Z(z^0)$ mit einer Umgebung $Z(\bar{z})$ und dazu ein Gebiet G mit:*

$$B < G < Y^{(\varrho)}, \tag{16}$$

so daß die Menge $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 = \widetilde{K}^{-1}(\{G, Z(\bar{z})\})$ ein ausgezeichneter kanonischer Keim ist.

b) *Die Anzahl der Parameter sei $k = 1$. Zu jedem Punkte z^0 von Z gibt es eine Umgebung $Z(z^0)$ und dazu ein Gebiet G mit der Eigenschaft (16), derart, daß jeder Punkt $\bar{z}$ von $Z(z^0)$ — mit eventueller Ausnahme von z^0 — eine Umgebung $Z(\bar{z})$ besitzt, so daß $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ ein ausgezeichneter kanonischer Keim ist.*

3.11. Die soeben erklärten kanonischen Keime sind die Bausteine zum Aufbau parameterabhängiger analytischer Mengen in Riemannschen Bereichen, den wir im nächsten Paragraphen ausführen werden.

§ 4. Kanonische Mengen in Riemannschen Bereichen.

4.1. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Riemannscher Bereich und Z ein (endliches) Gebiet des $(z)_k$-Raumes[4]). $\widetilde{\mathfrak{R}} = \{\mathfrak{R}, Z\}$ wird ein Riemannscher Bereich durch die folgende Einführung von ausgezeichneten Umgebungen: Es sei z^0 ein Punkt von Z und $Z(z^0)$ eine Kreiszylinderumgebung von z^0 in Z. Ist[3]) $\mathfrak{U}$ eine ausgezeichnete Umgebung von $\mathfrak{R}$ und T die topologische Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf die Riemannsche Elementarumgebung $\mathfrak{X}$, so sei $\widetilde{\mathfrak{U}} = \{\mathfrak{U}, Z(z^0)\}$ eine ausgezeichnete Umgebung von $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Bezeichnet $\widetilde{T}$ diejenige topologische Abbildung, die auf $\mathfrak{U}$ mit T und auf Z mit der Identität übereinstimmt, so ist $\widetilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, Z(z^0)\} = \widetilde{T}(\widetilde{\mathfrak{U}})$ wie in 3.1 eine Riemannsche Elementarumgebung.

4.2. Die folgende Definition erklärt, wie kanonische Keime zu parametrisch von z abhängigen Mengen vereinigt werden (vgl. [5], S. 20).

Im Riemannschen Bereich $\tilde{\mathfrak{R}}$ sei eine Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ gegeben, die bezüglich des Systems $\mathbf{\Sigma}$ von ausgezeichneten Umgebungen[6]) gewöhnlich sei. Es sei $\mathfrak{Z}$ Teilgebiet von Z[4]). Es gebe (höchstens) abzählbar unendlich viele Gebiete $\mathfrak{R}_\mu$ in $\mathfrak{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

A. $$\mathfrak{R} = \bigcup_\mu \mathfrak{R}_\mu .$$

B. Für alle μ liege die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{R}_\mu$ in einer ausgezeichneten Umgebung $\mathfrak{U}_\mu \in \mathbf{\Sigma}$. Ist T_μ die $\mathfrak{U}_\mu$ zugeordnete topologische Abbildung[6]), so sei:

$$R_\mu = T_\mu(\mathfrak{R}_\mu),$$
$$\tilde{M}_\mu = \tilde{T}_\mu(\tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{U}_\mu, \mathfrak{Z}\}).$$

C. Es gebe endlich viele, regulär zusammenhängende, kanonische Keime:

$$\tilde{M}_{\mu i} = \tilde{M}_{\mu i}(z), \qquad z \in \mathfrak{Z}, \qquad i = 1, \ldots, N_\mu \geq 0,$$

so daß gilt:

a) (17) $$\{R_\mu, \mathfrak{Z}\} \cap \tilde{M}_\mu < \bigcup_{i=1}^{N_\mu} \tilde{M}_{\mu i} < \tilde{M}_\mu ;$$

b) wenn die Keimprojektionsabbildung von $\tilde{M}_{\mu i}$ den Keim $\tilde{M}_{\mu i}$ in $\{Y_1, \mathfrak{Z}\}$[7]) und $\tilde{M}_{\mu i} \cap \{R_\mu, \mathfrak{Z}\}$ in $\{Y_2, \mathfrak{Z}\}$[7]) überführt, so sei die abgeschlossene Hülle $\overline{Y}_2$ von Y_2 in Y_1 enthalten[8]). Wir nennen:

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i} = \tilde{T}_\mu^{-1}(\tilde{M}_{\mu i})$$

kanonischen Keim von $\tilde{\mathfrak{M}}$. Wegen (17) ist:

(18) $$\{\mathfrak{R}_\mu, \mathfrak{Z}\} \cap \tilde{\mathfrak{M}} < \bigcup_{i=1}^{N_\mu} \tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i} < \tilde{\mathfrak{M}}.$$

D. Die kanonischen Keime $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ seien im folgenden Sinne isoliert: Für keinen Wert von i gebe es einen Wert $j \neq i$ und dazu einen Punkt $\mathfrak{Q} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i} \cap \tilde{\mathfrak{M}}_{\mu j}$, so daß $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ in $\mathfrak{Q}$ einen Primkeim hat, der auf $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu j}$ liegt.

Unter den Voraussetzungen A, B, C, D nennen wir $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine *kanonische Menge* in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$.

E. Die kanonische Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ heiße ausgezeichnet, wenn jeder kanonische Keim $\tilde{M}_{\mu i}$ ausgezeichnet ist.

4.3. Da die Keime $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ nach 2.3 analytisch zusammenhängend sind, ist jede analytische Komponente von $\tilde{\mathfrak{M}}$ Vereinigungsmenge von solchen Keimen,

[6]) Vgl. 2.2.

[7]) Die an sich notwendigen Indizes μ und i sind hier weggelassen.

[8]) Diese Bedingung wird später bei der Anwendung des Satzes 3.10 (mit $B = \overline{Y}_2$) gebraucht.

und zwar gehören $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}$ zu der gleichen Komponente, wenn sie einen gemeinsamen Primkeim in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$ haben (vgl. [5], S. 24). Daraus folgt:

Mit $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ist auch jede analytische Komponente von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$.

4.4. Wir wenden uns zu Sätzen über Substitution in kanonische Mengen; zunächst ein wichtiger Spezialfall, der unmittelbar aus Definition 4.2 folgt: *$\widetilde{\mathfrak{M}}$ sei eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ und $\mathfrak{Z}_1$ Teilgebiet von $\mathfrak{Z}$. Dann ist $\widetilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}_1\}$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}_1\}$.*

4.5. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall der analytischen Substitution (8). Ist $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ eine *ausgezeichnete* kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$, so transformiert (8) nach 3.6 jeden Keim $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ in einen analytisch zusammenhängenden kanonischen Keim $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta), \zeta \in \mathbf{Z}$. Es entsteht die Frage, ob sich diese Keime zu kanonischen Mengen in $\{\mathfrak{R}, \mathbf{Z}\}$ zusammenschließen, und, wenn ja, wie diese kanonischen Mengen mit den analytischen Komponenten von $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ zusammenhängen. Diese Frage können wir unter zwei zusätzlichen Voraussetzungen über $\widetilde{\mathfrak{M}}$ beantworten. Der ersten Voraussetzung liegt folgender Gedanke zugrunde. Aus der Sachlage, daß $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ zur gleichen Komponente von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gehören, möchten wir auf dieselbe Eigenschaft für ihre Transformierten $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta)$ und $\mathfrak{N}'_{\nu j}(\zeta)$ schließen. Nach 4.3 würde das bedeuten: Wenn $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$ einen Primkeim gemeinsam haben, so auch $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta)$ und $\mathfrak{N}'_{\nu j}(\zeta)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathbf{Z}\}$. Wie man sofort sieht, folgt dies für beliebige Substitutionen (8) aus der folgenden Eigenschaft von $\widetilde{\mathfrak{M}}$:

I. *Wenn $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$ einen gemeinsamen Primkeim haben, so gibt es für jedes $z' \in \mathfrak{Z}$ einen Punkt $\{\mathfrak{Q}', z'\}$ mit $\mathfrak{Q}' \in \mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu$, in dem sie einen Primkeim gemeinsam haben.* Wenn diese Eigenschaft für alle Werte von μ, ν, i und j vorhanden ist, werde die Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$ von $\mathfrak{R}$[9]) *„normiert" (bezüglich $\mathfrak{Z}$)*[10]) genannt (vgl. [5], S. 21).

Die zweite Voraussetzung findet ihre Erklärung gerade in dem umgekehrten Schluß: Wenn $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta)$ und $\mathfrak{N}'_{\nu j}(\zeta)$ einen gemeinsamen Primkeim in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathbf{Z}\}$ haben, so auch $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$. Es reicht für beliebige Substitutionen (8) hin, wenn diese Bedingung für die Spezialisierungen (11) gefordert wird. Mit Rücksicht auf (18) ergibt sich folgende Voraussetzung, die für alle μ, i und j und alle $\bar{z}$ aus $\mathfrak{Z}$ gestellt werde, vgl. [5], S. 21.

II. *$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(\bar{z})$ sei eine gewöhnliche Menge in $\{\mathfrak{U}_\mu, \bar{z}\}$ und besitze in keinem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu, \bar{z}\}$ einen Primkeim auf $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu j}(\bar{z})$, $j \neq i$.*

Unter dieser Voraussetzung heiße $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *„allgemein gelegen (für $z \in \mathfrak{Z}$)"*[10]).

[9]) Vgl. 4.2. (A).

[10]) Den eingeklammerten Zusatz lassen wir gelegentlich weg.

4.6. Wie unsere Überlegungen gezeigt haben, sind drei Eigenschaften bei Spezialisierungsaussagen über $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ wichtig, nämlich:

α) $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ ist ausgezeichnet.

β) Die in die Definition von $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ eingehende Überdeckung von $\mathfrak{R}$ ist normiert.

γ) $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ ist allgemein gelegen.

Mit diesen Bezeichnungen lautet der angekündigte Spezialisierungssatz (vgl. [5], S. 25):

Es sei $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ mit den Eigenschaften $\alpha), \beta), \gamma)$. Die analytischen Komponenten von $\tilde{\mathfrak{M}}$ seien $\tilde{\mathfrak{M}}^{\alpha}$; sie sind kanonische Mengen in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ mit den Eigenschaften $\alpha), \beta), \gamma)$. Durch die Substitution (8) entsteht aus $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine kanonische Menge $\mathfrak{N}'(\zeta)$ in $\{\mathfrak{R}, \mathbf{Z}\}$ mit den Eigenschaften $\alpha), \beta), \gamma)$. Die analytischen Komponenten von $\mathfrak{N}'(\zeta)$ seien $\mathfrak{N}'^{\alpha}(\zeta)$. Die Substitution (8) stellt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Komponenten von $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ und $\mathfrak{N}'(\zeta)$ her, indem sie bei richtiger Verteilung der Indizes $\tilde{\mathfrak{M}}^{\alpha}(z)$ in $\mathfrak{N}'^{\alpha}(\zeta)$ überführt.

4.7. Die Wichtigkeit des Spezialisierungssatzes erfordert eine Diskussion der Bedingungen $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, die für den Fall einer endlichen Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$ [9]) nun durchgeführt werde.

Über $\alpha)$ ist das Wichtigste schon in 3.10 gesagt worden. Die Voraussetzungen $\beta)$ und $\gamma)$ bedeuten verschiedenartige Einschränkungen für kanonische Mengen. Die Normiertheitsforderung $\beta)$ kann bei hinreichend kleinem Parametergebiet durch geeignete Abänderung der Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$ immer erreicht werden.

Der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ sei kompakt.

Es sei $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ bei endlicher Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$ [9]). Es sei $\bar{z}$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{Z}$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{Z}(\bar{z})$ von $\bar{z}$ und eine Überdeckung von $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{\mu} \underline{\mathfrak{R}}_\mu \tag{19}$$

mit

$$\underline{\mathfrak{R}}_\mu \subset \mathfrak{R}_\mu, \tag{20}$$

derart, daß die Überdeckung (19) normiert bezüglich $\mathfrak{Z}(\bar{z})$ ist.

Beweisskizze (vgl. [5], S. 27). Eine Abänderung von $\mathfrak{R}_\mu$ wird nötig, wenn ein Index $\nu \neq \mu$ existiert, so daß es kanonische Keime $\tilde{\mathfrak{M}}_{\iota,i}$ und $\tilde{\mathfrak{M}}_{\iota,j}$ gibt, die nur in Randpunkten von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \bar{z}\}$ gemeinsame Primkeime haben. Man ersetze dann $\mathfrak{R}_\mu$ und $\mathfrak{R}_\nu$ unter Wahrung von (19) durch Teilgebiete $\underline{\mathfrak{R}}_\mu$ bzw. $\underline{\mathfrak{R}}_\nu$, so daß $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu,i}$ und $\tilde{\mathfrak{M}}_{\nu,j}$ in keinem Punkte der abgeschlossenen Hülle von $\{\underline{\mathfrak{R}}_\mu \cap \underline{\mathfrak{R}}_\nu, \bar{z}\}$ einen gemeinsamen Primkeim besitzen. Da nach Voraussetzung die Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$ endlich ist, genügen endlich viele Abänderungen, um die Eigenschaft der Normiertheit bezüglich einer hinreichend kleinen Umgebung von $\bar{z}$ herzustellen.

4.8. Die Forderung γ) ist die Bedingung der allgemeinen Lage. Sehen wir von den speziellen Gegebenheiten ab, so bleibt folgendes Problem übrig: Im Riemannschen Elementarbereich $\tilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}\}$ seien $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ und $\tilde{\mathfrak{N}}(z)$ kanonische Keime. Für alle $\bar{z} \in \mathfrak{Z}$ seien $\tilde{\mathfrak{M}}(\bar{z}) = \tilde{\mathfrak{M}}(z) \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\}$ und $\tilde{\mathfrak{N}}(\bar{z}) = \tilde{\mathfrak{N}}(z) \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\}$ gewöhnlich in $\{\mathfrak{X}, \bar{z}\}$. In keinem Punkte von $\tilde{\mathfrak{X}}$ habe $\tilde{\mathfrak{M}}$ einen Primkeim auf $\tilde{\mathfrak{N}}$. Unter welchen Bedingungen bleibt die letzte Eigenschaft bei Parameterspezialisierung (11) erhalten, d.h. gilt sie auch für $\tilde{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ und $\tilde{\mathfrak{N}}(\bar{z})$? Diese Aufgabe läßt sich in der Umgebung jedes Punktes $\tilde{\mathfrak{P}}_0 = \{\mathfrak{P}_0, z^0\}$ von $\tilde{\mathfrak{X}}$ darauf zurückführen, daß eine in $\tilde{P}_0 = \tilde{A}(\tilde{\mathfrak{P}}_0)$ analytische Funktion der Variablen $\{x, z\}$ nicht identisch in x verschwindet, wenn z spezialisiert wird. Diese Tatsache ist gleichbedeutend mit dem Nichtverschwinden einer in z^0 analytischen Funktion von z. Man kommt daher zu folgender Aussage und beachte ihren Unterschied zu 3.10 (vgl. [5], S. 15):

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Kompaktum in $\mathfrak{X}$ und z^0 ein Punkt von $\mathfrak{Z}$. Dann gibt es eine Umgebung $Z(z^0)$ von z_0 und ein Gebiet $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{G} < \mathfrak{X},$$

ferner eine in $Z(z^0)$ analytische Funktion $g(z)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $z \in Z(z^0)$ und $g(\bar{z}) \neq 0$, so besitzt $\tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{G}, \bar{z}\}$ keinen Primkeim auf $\tilde{\mathfrak{N}} \cap \{\mathfrak{G}, \bar{z}\}$.

4.9. Wir haben jetzt alle Einzelresultate beisammen, um den grundlegenden Satz über das Bestehen von α), β), γ) beweisen zu können.

Der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ sei kompakt.

Es sei $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, Z\}$ bei endlicher Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$[9]*).*

a) *Der Punkt ζ in Z und die Umgebung $Z(\zeta) < Z$ von ζ seien beliebig vorgegeben. Dann gibt es einen Punkt $\bar{z}$ in $Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{Z}(\bar{z}) < Z(\zeta)$, so daß die kanonische Menge:*

$$(\tilde{\mathfrak{M}}) = \tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}(\bar{z})\}$$

die Eigenschaften α), β), γ) hat.

b) *Die Anzahl der Parameter sei $k = 1$. Zu jedem Punkt $z^0 \in Z$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{Z}(z^0)$, derart, daß jeder Punkt $\bar{z}$ von $\mathfrak{Z}(z^0)$ — mit eventueller Ausnahme von z^0 — eine Umgebung $\mathfrak{Z}(\bar{z})$ hat, so daß $(\tilde{\mathfrak{M}})$ die Eigenschaften α), β), γ) besitzt.*

Beweisskizze (vgl. [5], S. 30). Wegen 4.4 ist $(\tilde{\mathfrak{M}})$ eine kanonische Menge. Um die Eigenschaft α) zu gewinnen, wende man 3.10 auf die kanonischen Keime $\tilde{M}_{\mu i}$ mit $B = \overline{Y}_2$ an, vgl. Definition 4.2 (C), Eigenschaft b). Die Eigenschaft β) folgt aus 4.7. Die Eigenschaft γ) ergibt sich aus 4.8, wenn für $\tilde{\mathfrak{M}}$ und $\tilde{\mathfrak{N}}$ Paare von kanonischen Keimen $\tilde{M}_{\mu i}$, $\tilde{M}_{\mu j}$ und für $\mathfrak{B}$ die abgeschlossene Hülle von R_μ gewählt werden, vgl. Definition 4.2 (D).

§ 5. Fasermengen meromorpher Abbildungen.

5.1. Nach den allgemeinen Untersuchungen über analytische Mengen mit Parametern in Riemannschen Bereichen beschäftigen wir uns nun speziell mit den Urbildmengen meromorpher Abbildungen; diese vereinigen sich unter bestimmten Bedingungen zu Fasermengen mit folgender Definition (vgl. [5], S. 37, und beachte die Unterschiede):

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Riemannscher Bereich. $\mathfrak{Q}_k$ sei eine meromorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ (vgl. 2.4). Es sei Z ein Gebiet des $(z)_k$-Raumes[4]).

A. Es gebe auf $\tilde{\mathfrak{R}} = \{\mathfrak{R}, Z\}$ eine kanonische Menge $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, mit folgenden Eigenschaften:

a) Ist $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}, \bar{z}\} \in \tilde{\mathfrak{R}}$ und $\bar{z} = \mathfrak{Q}_k(\mathfrak{P})$, so sei $\tilde{\mathfrak{P}} \in \tilde{\mathfrak{M}}$.

b) Ist $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}, \bar{z}\} \in \tilde{\mathfrak{M}}$, so sei $\bar{z} = \mathfrak{Q}_k(\mathfrak{P})$.

Dann heiße $\tilde{\mathfrak{M}}$ *kanonische Menge von* $\mathfrak{Q}_k$ für das Gebiet Z.

Jede analytische Komponente von $\tilde{\mathfrak{M}}$ werde *Fasermenge des Gebietes* Z genannt.

B. Ein Punkt z^* sei unter den folgenden Voraussetzungen *regulär* für $\mathfrak{Q}_k$:

a) Es gebe eine Umgebung $\mathfrak{Z}(z^*)$ mit kanonischer Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ für $\mathfrak{Q}_k$.

b) $\tilde{\mathfrak{M}}$ habe die Eigenschaften $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ (vgl. 4.6).

Jede Fasermenge von $\mathfrak{Z}(z^*)$ heiße *Fasermenge des regulären Punktes* z^*.

5.2. Die kanonische Menge der meromorphen Abbildung $\mathfrak{Q}_k$ für ein Gebiet Z ist in der Umgebung jedes Punktes von $\tilde{\mathfrak{R}}$ Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems von $\mathfrak{Q}_k$ (vgl. 2.4). Für die Existenz einer derartigen Menge ist entscheidend, daß es auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ einen Primkeim gibt, der *parametrisch von* z *abhängt* und alle Punktepaare $\{\mathfrak{P}, z = \mathfrak{Q}_k(\mathfrak{P})\}$ enthält, wenn $\mathfrak{P}$ ein Gebiet in $\mathfrak{R}$ durchläuft. Hierfür ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Der Rang von $\mathfrak{Q}_k$ *auf* $\mathfrak{R}$ *ist gleich* k.

Setzen wir außerdem voraus, daß der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ *kompakt* sei, so liefert die Anwendung des Satzes 3.9 a) auf die Gleichungssysteme von $\mathfrak{Q}_k$ das Ergebnis (vgl. [5], S. 45):

Es gibt ein Gebiet des z-Raumes mit kanonischer Menge für $\mathfrak{Q}_k$.

Hieraus ergibt sich wegen Satz 4.9 a):

Es sei $\mathfrak{R}$ *ein kompakter Riemannscher Bereich. Der Rang der meromorphen Abbildung* $\mathfrak{Q}_k$ *von* $\mathfrak{R}$ *sei* k. *Dann besitzt* $\mathfrak{Q}_k$ *einen regulären Punkt.*

5.3. Die Sätze 3.9, 3.10 und 4.9 lassen erkennen, daß im Falle eines einzigen Parameters schärfere Aussagen möglich sind als bei $k > 1$. Diesen Umstand nutzen wir dadurch aus, daß wir die Urbildmengen von analytischen Ebenen des z-Raumes untersuchen. Wir legen durch den (endlichen) Punkt z^* des z-Raumes ein Büschel analytischer Ebenen:

$$z_j = z_j^* + t\zeta_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{21}$$

ζ_j feste Konstanten, welche die Lage der Ebene bestimmen, t laufende Koordinate auf der Ebene. Abgekürzt schreiben wir für (21):

$$z = z^* + t\zeta. \tag{22}$$

Wieder werden bestimmte Urbildmengen von Gebieten auf (21) als Fasermengen ausgezeichnet (vgl. [5], S. 38, und beachte die Unterschiede):

Es sei $\bar{t}$ ein Punkt und $T(\bar{t})$ eine Umgebung von $\bar{t}$ in der t-Ebene[4]).

A. Es gebe auf $\mathfrak{R}' = \{\mathfrak{R}, T(\bar{t})\}$ eine kanonische Menge $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'(t)$, $t \in T(\bar{t})$, mit folgenden Eigenschaften:

a) Ist $\mathfrak{P}' = \{\mathfrak{P}, t'\} \in \mathfrak{R}'$, $t' \neq \bar{t}$ [11]), $z' = z^* + t'\zeta = \Omega_k(\mathfrak{P})$, so sei $\mathfrak{P}' \in \mathfrak{N}'$.

b) Ist $\mathfrak{P}' = \{\mathfrak{P}, t'\} \in \mathfrak{N}'$, so sei $z' = z^* + t'\zeta = \Omega_k(\mathfrak{P})$.

Dann heiße $\mathfrak{N}'$ kanonische Menge von Ω_k für das Gebiet $T(\bar{t})$ in der Ebene (21). Jede analytische Komponente von $\mathfrak{N}'$ werde (t-)[10]) *Fasermenge von $T(\bar{t})$* genannt.

B. Ein Punkt $\bar{t}$ heiße (t-)[10]) *regulär*, wenn gilt:

a) Es gebe eine Umgebung $T(\bar{t})$ von $\bar{t}$ mit kanonischer Menge $\mathfrak{N}'$ von Ω_k.

b) In der Bedingung a) der Definition der kanonischen Menge ist die Ungleichung $t' \neq \bar{t}$ wegzulassen.

c) $\mathfrak{N}'$ habe die Eigenschaften $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ (vgl. 4.6).

Als (t-) *Fasermenge*[10]) *des regulären Punktes $\bar{t}$* bezeichnen wir jede analytische Komponente von $\mathfrak{N}'$.

C. Jeder Punkt der t-Ebene, der Häufungspunkt von t-regulären Punkten, selbst aber nicht t-regulär ist, heiße *singulär*.

5.4. Es folgen Sätze über die Verteilung der regulären und singulären Punkte in einer beliebigen, jedoch festzuhaltenden Ebene (21). Unmittelbar aus Definition 5.3 ergibt sich:

I. *Jeder reguläre Punkt besitzt eine Umgebung, die aus regulären Punkten besteht.*

Die kanonische Menge eines Gebietes $T(\bar{t})$ ist in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{R}'$ Lösungsmenge des zu Ω_k gehörigen Gleichungssystems (vgl. 2.4) und des Systems (21). Wenden wir auf diese Gleichungssysteme den Satz 3.9 b)[12]) unter der Voraussetzung an, daß der Punkt $\bar{t}$ singulär ist, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Definitionen 5.3 A und C:

II. *Wenn der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ kompakt ist, besitzt ein singulärer Punkt eine Umgebung mit kanonischer Menge von Ω_k.*

Wegen Satz 4.9 b) folgt daraus:

III. *Wenn der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ kompakt ist, besitzt jeder singuläre Punkt $\bar{t}$ eine Umgebung, die mit Ausnahme von $\bar{t}$ nur reguläre Punkte enthält.*

5.5. Wir können auch den Fall des unendlich fernen Punktes der t-Ebene in die Betrachtung einbeziehen. Dazu führen wir $t' = 1/t$ ein, ersetzen (21) durch das System:

$$t' z_j = t' z_j^* + \zeta_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{23}$$

und suchen die Lösungen der zu Ω_k gehörenden Gleichungssysteme und des Systems (23) in $\{\mathfrak{R}$, Umgebung von $t' = 0\}$.

[11]) Man beachte diese Voraussetzung; sie hat ihren Grund in der Struktur des Satzes 3.9 (b).

[12]) Vgl. Nr. 5.3, Bedingung A, a) und Fußnote [11]).

Daher gelten die Ergebnisse I., II. und III. auch für den unendlich fernen Punkt der t-Ebene.

5.6. Aus 5.4 und 5.5 fließt folgende Erkenntnis:

Der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ sei kompakt. Wenn die Menge der t-regulären Punkte nicht leer ist, gibt es in der t-Ebene außer endlich vielen singulären Punkten nur t-reguläre Punkte.

5.7. Vollkommenen Aufschluß über den Zusammenhang zwischen den Fasermengen regulärer und singulärer Punkte erhalten wir durch folgende Sätze, die mit dem Satz 4.9 bewiesen werden:

I. Die gemäß Definition 5.3 zu den regulären Punkten t_1 und t_2 gehörenden Umgebungen $T(t_1)$ bzw. $T(t_2)$ mögen den nichtleeren Durchschnitt $D(t_1, t_2)$[4]) haben. Die Fasermengen von t_λ seien $\mathfrak{P}_\lambda^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \alpha_\lambda$; $\lambda = 1, 2$. Dann ist $\alpha_1 = \alpha_2$, und bei geeigneter Verteilung der Indizes gilt:

$$\mathfrak{P}_1^\alpha \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\} = \mathfrak{P}_2^\alpha \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\}, \tag{24}$$

$\alpha = 1, \ldots, \alpha_1 = \alpha_2$.

II. Es sei $\bar{t}$ ein singulärer Punkt und $T(\bar{t})$ eine Umgebung von $\bar{t}$ mit kanonischer Menge. $T(\bar{t}) - \bar{t}$ bestehe aus regulären Punkten.

a) Es sei $\mathfrak{P}'$ eine Fasermenge von $T(\bar{t})$. Jeder Punkt $t^* \in T(\bar{t}) - \bar{t}$ hat eine Umgebung $\mathfrak{T}(t^*)$ derart, daß die analytischen Komponenten von

$$(\mathfrak{P}') = \mathfrak{P}' \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{T}(t^*)\}$$

Fasermengen des (regulären) Punktes t^* sind.

b) Jede Fasermenge des Punktes $t^* \in T(\bar{t}) - \bar{t}$ kann aus einer Fasermenge des Gebietes $T(\bar{t})$ auf die in a) beschriebene Weise erhalten werden.

5.8. Beschränken wir uns auf kompakte Riemannsche Bereiche, so zeigen 5.6 und 5.7, daß die Fasermengen der Punkte einer Ebene (21) wie die Zweige einer algebraischen Funktion von t zusammenhängen. Die Fasermengen eines regulären Punktes können nach allen regulären Punkten hin analytisch fortgesetzt werden, wobei wegen (24) die Fortsetzung auf jedem Wege, der die singulären Punkte vermeidet, eindeutig ist. Wie 5.7 II. zeigt, spielen die singulären Punkte bei diesen Fortsetzungen die Rolle von Verzweigungspunkten; d.h. setzen wir eine Fasermenge von einem regulären Punkte aus auf einem geschlossenen Wege, der keinen singulären Punkt enthält, analytisch fort, so kommen wir im Ausgangspunkt eventuell mit einer Fasermenge an, die von der Ausgangsmenge verschieden ist.

5.9. Aufzuklären ist noch die Frage, ob die Ebene (21) t-reguläre Punkte enthält. In befriedigender Weise gibt darüber folgender Satz, dessen Beweis auf 4.6 beruht, Auskunft:

Es sei z^* ein regulärer Punkt der meromorphen Abbildung Ω_k des Riemannschen Bereiches $\mathfrak{R}$ (vgl. 5.1). *Es sei eine beliebige Ebene* (21) *durch z^* gegeben. Dann ist der Punkt $t = 0$ ein t-regulärer Punkt in dieser Ebene. Die t-Fasermengen von $t = 0$ werden aus den Fasermengen von z^* durch Einsetzen von* (21) *erhalten.*

5.10. Im Falle eines kompakten Riemannschen Bereiches gestatten unsere Ergebnisse die folgende, zusammenfassende Deutung:

Wenn der Rang von $\mathfrak{Q}_k$ auf $\mathfrak{R}$ gleich k ist, existiert ein regulärer Punkt z^* von $\mathfrak{Q}_k$ (vgl. 5.2). Diesem Punkte werden Fasermengen zugeordnet. Durch z^* wird das Ebenenbüschel (21) gelegt; den Punkten jeder Ebene werden Fasermengen zugeordnet, die im beschriebenen Sinne algebraisch zusammenhängen (vgl. 5.8). Für die Gesamtheit aller so bestimmten Fasermengen führen wir die Bezeichnung „*Fasergesamtheit*" $\mathfrak{F}$ ein. Die Anzahl der Fasermengen von z^* heiße *Faseranzahl* f von $\mathfrak{F}$. Ebenso groß ist nach 5.9 übrigens auch die Anzahl der Fasermengen in den regulären Punkten einer Ebene (21); in den singulären Punkten ist sie höchstens gleich f.

§ 6. Funktionen auf der Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung.

6.1. Die Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung wird erst dadurch interessant, daß sie Definitionsbereich von meromorphen Funktionen sein kann. Die nähere Erklärung geben die folgenden Definitionen (vgl. [5], S. 42):

Es sei $\mathfrak{X}$ ein Riemannscher Elementarbereich; Z sei ein Gebiet des z-Raumes[4]). $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$ (vgl. 3.2), sei ein kanonischer Keim in $\widetilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, Z\}$ mit der Keimprojektion $\widetilde{Y}^{(\varrho)} = \{Y^{(\varrho)}, Z\}$ und der Verzweigungsprojektion $v(\widetilde{\mathfrak{M}})$ (vgl. 1.13).

Es sei $\tilde{y}_0 = \{(y^0)_\varrho, z^0\}$ ein Punkt von $\widetilde{Y}^{(\varrho)} - v(\widetilde{\mathfrak{M}})$; seine Überlagerungspunkte in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ seien $\widetilde{\mathfrak{P}}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, a$. Da diese Punkte nicht in der Verzweigungsmenge von $\widetilde{\mathfrak{X}}$ liegen, können die Koordinaten $\{y, z\}$ für sie als Ortsuniformisierende gewählt werden. $\widetilde{\mathfrak{M}}$ besitzt in $\widetilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ einen einzigen Primkeim $\widetilde{\mathfrak{E}}_\alpha$; seine Projektion $\widetilde{E}_\alpha = \widetilde{A}(\widetilde{\mathfrak{E}}_\alpha)$ besitzt eine Darstellung:

$$y_{\varrho+j} = \psi_{\varrho+j}^{(\alpha)}\left((y)_\varrho, z\right), \qquad j = 1, \ldots, n-\varrho, \tag{25}$$

$\psi_{\varrho+j}^{(\alpha)}$ analytisch in $\tilde{y}_0$.

6.2. Die Funktion $f(\mathfrak{P}, z)$ sei analytisch in $\widetilde{\mathfrak{X}}$. In der Umgebung von $\widetilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ ist $f A^{-1}$ eine analytische Funktion $f_\alpha(y, z)$ der Ortsuniformisierenden $\{y, z\}$. In diese Funktion setzen wir die Entwicklungen (25) ein:

$$f'_\alpha\left((y)_\varrho, z\right) = f_\alpha\left((y)_\varrho, \psi_{\varrho+1}^{(\alpha)}, \ldots, \psi_n^{(\alpha)}, z\right). \tag{26}$$

Das Produkt:

$$N\left((y)_\varrho, z\right) = \prod_{\alpha=1}^{a} f'_\alpha\left((y)_\varrho, z\right) \tag{27}$$

heiße *Normfunktion* von f bezüglich $\widetilde{\mathfrak{M}}$; N ist eindeutig und analytisch in $\widetilde{Y}^{(\varrho)}$.

6.3. Die Funktion $w = w(\mathfrak{P})$ sei meromorph in $\mathfrak{X}$. Ist $w = h(\mathfrak{P})/g(\mathfrak{P})$, g, h analytisch in $\mathfrak{X}$, so bilden wir die Norm von $g(\mathfrak{P})\, w - h(\mathfrak{P})$ bezüglich $\widetilde{\mathfrak{M}}$ und erhalten, falls auf keiner analytischen Komponente von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ $g(\mathfrak{P}) \equiv 0$ ist, ein

Polynom von w mit Koeffizienten, die in $\tilde{Y}^{(\varrho)}$ analytisch sind:

$$\Phi\left(w/(y)_\varrho, z\right) = a_0\left((y)_\varrho, z\right) w^s + \cdots + a_s\left((y)_\varrho, z\right). \tag{28}$$

w genügt auf $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Gleichung:

$$\Phi\left(w/(y)_\varrho, z\right) = 0. \tag{29}$$

Wenn die Funktionen $a_i\left((y)_\varrho, z\right)/a_0\left((y)_\varrho, z\right)$, $i = 1, \ldots, s$, unabhängig von $(y)_\varrho$ sind, nennen wir w *„endlich mehrdeutig"* auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Hat das Polynom Φ folgende spezielle Gestalt:

$$\Phi = c\left((y)_\varrho, z\right)\left(w - a(z)/b(z)\right)^s, \tag{30}$$

c analytisch in $\tilde{Y}^{(\varrho)}$, $a(z)$, $b(z)$ analytisch in Z, so heiße w *„eindeutig"* auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

6.4. Die Eigenschaft einer Funktion w, auf einem kanonischen Keim endlich mehrdeutig zu sein, ist invariant gegenüber analytischer Fortsetzung; es gilt nämlich:

$\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$ sei analytisch zusammenhängend. Es gebe einen Primkeim von $\mathfrak{M}$, auf dem die meromorphe Funktion w endlich mehrdeutig ist. Dann ist w endlich mehrdeutig auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Wenn $\tilde{\mathfrak{M}}$ zusätzlich noch ausgezeichnet ist, ist w eindeutig auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Während die erste Behauptung des Satzes durch analytische Fortsetzung bewiesen wird (vgl. [4], S. 266 und [5], S. 43), folgt die zweite aus dem Satz 3.6, nach dem $\tilde{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ für alle $\bar{z} \in Z$ analytisch zusammenhängend ist.

6.5. Wir gehen zur Untersuchung dieser Dinge in Riemannschen Bereichen über. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Riemannscher Bereich und Z ein Gebiet des z-Raumes[4]). $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, sei eine kanonische Menge in $\tilde{\mathfrak{R}} = \{\mathfrak{R}, Z\}$. Die Funktion w sei meromorph in $\mathfrak{R}$; sie heiße *„endlich mehrdeutig"* bzw. *„eindeutig"* auf $\tilde{\mathfrak{M}}$, wenn sie auf jedem kanonischen Keim von $\tilde{\mathfrak{M}}$ (vgl. 4.2 C) endlich mehrdeutig bzw. eindeutig ist. Im ersten Falle besteht für w auf $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine algebroide Gleichung:

$$c_0(z)\, w^s + c_1(z)\, w^{s-1} + \cdots + c_s(z) = 0, \tag{31}$$

$c_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, analytisch in Z; im zweiten Falle gilt auf $\tilde{\mathfrak{M}}$:

$$w = a(z)/b(z), \tag{32}$$

$a(z)$, $b(z)$ analytisch in Z.

Die Aussage 6.4 überträgt sich ohne Änderung auf kanonische Mengen in Riemannschen Bereichen.

6.6. Betrachten wir nun den Fall, daß die kanonische Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ Fasermenge einer meromorphen Abbildung ist.

$\mathfrak{Q}_k$ sei eine meromorphe Abbildung des kompakten Riemannschen Bereiches $\mathfrak{R}$ und habe eine Fasergesamtheit $\mathfrak{F}$ (vgl. 5.10).

Wenn die in $\mathfrak{R}$ meromorphe Funktion w auf allen Fasermengen von $\mathfrak{F}$ endlich mehrdeutig ist, heiße w *meromorph auf der Fasergesamtheit* $\mathfrak{F}$.

Die Funktion w ist meromorph auf $\mathfrak{F}$, wenn sie auf den Fasermengen des regulären Punktes z^* eindeutig und analytisch ist. Nach 5.9 folgt nämlich hieraus ihre Eindeutigkeit auf den t-Fasermengen des Punktes $t=0$ einer beliebigen Ebene durch z^*; aus dieser ergibt sich wegen 5.8 und 6.4, daß w auf allen t-Fasermengen von t-regulären Punkten eindeutig und von singulären Punkten endlich mehrdeutig ist.

6.7. Die folgende Bedingung läßt die Bedeutung dieser Begriffsbildungen klar erkennen: Die Funktion w ist auf der Fasergesamtheit $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{Q}_k$ meromorph, wenn es einen Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ und in $\mathfrak{P}$ ein System von Ortsuniformisierenden $(x)_n$ gibt, so daß der Rang der Funktionalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial w}{\partial x_j} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n) \tag{33}$$

in bezug auf identisches Verschwinden der Determinanten gleich k ist.

Zu beweisen ist nach 6.6 nur die Eindeutigkeit von w auf den Fasermengen des regulären Punktes z^* von $\mathfrak{Q}_k$, und diese folgt aus der Definition der Fasermenge (vgl. 5.1) und der Rangvoraussetzung (vgl. [5], S. 47).

6.8. Die Theorie der meromorphen Abbildungen gipfelt in dem folgenden Hauptsatz der Arbeit [4]:

Die in $\mathfrak{R}$ meromorphe Funktion w sei auf der Fasergesamtheit der meromorphen Abbildung $\mathfrak{Q}_k$ von $\mathfrak{R}$ meromorph. Dann genügt w einer algebraischen Relation in $(z)_k$, deren Grad in w unterhalb einer Schranke liegt, die allein durch die Abbildung $\mathfrak{Q}_k$ bestimmt wird und von w unabhängig ist.

Wir skizzieren den Beweis dieses Satzes und verweisen wegen der Einzelheiten auf [4], S. 276. Zu jeder der f Fasermengen $\tilde{\mathfrak{M}}_\nu$ des regulären Punktes z^* gehört nach 6.4 und 6.5 eine meromorphe Funktion $w_\nu = a_\nu(z)/b_\nu(z)$, welche die Werte von w auf $\tilde{\mathfrak{M}}_\nu$ angibt. Es sei S eine ganz rationale und symmetrische Funktion von $w_1, \ldots, w_f$. Es wird gezeigt, daß S eine rationale Funktion von z ist. Daraus ergibt sich unsere Behauptung, wenn wir für S die elementarsymmetrischen Funktionen der w_ν nehmen. Zunächst ist $S(z)$ in der Umgebung von z^* meromorph in z. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß w in z^* sogar analytisch ist, sonst müßte man den Punkt z^* etwas verschieben. Betrachten wir dann S auf einer festen Ebene des Büschels (21) durch z^*. Wie aus dem algebraischen Zusammenhang der t-Fasermengen in dieser Ebene (vgl. 5.8) leicht folgt, ist S in der t-Ebene eindeutig und überall meromorph und nach einem bekannten Satz deswegen rational in t. Man sieht, daß die Funktion S in allen Ebenen des Büschels rational in t ist. Der Zusammenhang zwischen den rationalen Funktionen in

verschiedenen Ebenen wird klar, wenn wir den z-Raum der folgenden Cremona-Transformation unterwerfen:

$$(34) \qquad \begin{cases} z_i = z_i^* + t\zeta_i & (i = 1, \ldots, l-1,\ l+1, \ldots, k), \\ z_l = z_l^* + t. \end{cases}$$

Hier ist ζ nun als variabel anzusehen. Setzen wir (34) in $S(z)$ ein, so erhalten wir eine Funktion von t und ζ mit folgenden Eigenschaften:

a) $S(t, \zeta)$ ist analytisch in t und ζ, wenn t in der Umgebung von $t=0$ und ζ in der Umgebung eines beliebigen Punktes ζ^0 variieren.

b) Wenn ζ irgendwie spezialisiert wird, so entsteht eine rationale Funktion von t, denn diese Spezialisierung bedeutet nach der Form der Cremona-Transformation, daß wir eine bestimmte Ebene des Büschels durch z^* auswählen.

Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie ([1], S. 282) folgt aus diesen Eigenschaften für $S(t, \zeta)$ die Darstellung:

$$(35) \qquad S(t, \zeta) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 t + \cdots + \varphi_p t^p}{\psi_0 + \psi_1 t + \cdots + \psi_p t^p},$$

wobei die φ_ν und ψ_ν in ζ^0 analytisch sind und $\psi_0(\zeta^0) \neq 0$ ist. Diese Darstellung zeigt, daß S in allen endlichen Punkten des $\{t, \zeta\}$-Raumes meromorph ist. Machen wir die Cremona-Transformation (34) rückgängig, so ergibt sich meromorphes Verhalten von $S(z)$ in allen endlichen Punkten des z-Raumes mit Ausnahme derjenigen Punkte, die $t=0$ entsprechen, weil in diesen Punkten (34) singulär ist. $t=0$ bedeutet $z_l = z_l^*$. Dieses Ergebnis besteht für $l = 1, \ldots, k$. Durch Zusammenfassung kommt heraus: $S(z)$ ist in allen endlichen Punkten des z-Raumes meromorph mit alleiniger Ausnahme eventuell des Punktes z^*; aber in z^* ist $S(z)$ nach Konstruktion sogar analytisch. Es ist also $S(z)$ in allen endlichen Punkten des z-Raumes meromorph. Um das Verhalten von S in den unendlich fernen Punkten des z-Raumes (der Funktionentheorie) zu studieren, nehmen wir eine lineare Transformation des z-Raumes vor:

$$(36) \qquad z'_{i_\lambda} = 1/(z_{i_\lambda} - \alpha_{i_\lambda}), \qquad z'_{i_\mu} = z_{i_\mu} \quad \text{für} \quad i_\mu \neq i_\lambda.$$

Hier ist α_{i_λ} von $z^*_{i_\lambda}$ verschieden zu wählen. Auch die Funktionen z_j, $j = 1, \ldots, k$, bestimmen eine meromorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$, deren Rang in $\mathfrak{R}$ wiederum k ist. Wegen 5.2 besitzt diese Abbildung eine Fasergesamtheit, auf der die Funktion w meromorph ist. Mit denselben Schlüssen wie für $S(z)$ wird gezeigt, daß $S(z')$ in allen endlichen Punkten des z'-Raumes meromorph ist. Diese Feststellung gilt für alle Transformationen (36), die unendliche Punkte des z-Raumes ins Endliche holen. Da also die Funktion S in allen endlichen und unendlichen Punkten des z-Raumes meromorph ist, ist sie nach einem bekannten Satze rational. Der Grad der algebraischen Relation zwischen w und $(z)_k$ ist in w höchstens gleich der Faseranzahl f der Fasergesamtheit $\mathfrak{F}$. Damit ist auch der letzte Teil des Hauptsatzes bewiesen.

6.9. Wir fassen die Hauptergebnisse zusammen, wobei wir alle Voraussetzungen wiederholen.

Hauptsatz I. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kompakter Riemannscher Bereich. Ω_k sei die meromorphe Abbildung:*

$$z_j = f_j(\mathfrak{P}), \qquad j = 1, \ldots, k,$$

von $\mathfrak{R}$; der Rang von Ω_k auf $\mathfrak{R}$ sei k. Die Funktion w sei meromorph in $\mathfrak{R}$. Es gebe einen Punkt $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ und in $\mathfrak{P}$ ein System von Ortsuniformisierenden $(x)_n$, so daß der Rang der Funktionalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_i}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, k, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

gleich k ist. Dann besteht zwischen w und $z_1, \ldots, z_k$ eine algebraische Relation:

$$g(w, z_1, \ldots, z_k) = 0,$$

g Polynom von $w, z_1, \ldots, z_k$. Das Polynom g kann so gewählt werden, daß sein Grad in w unterhalb einer Schranke liegt, die allein durch die Abbildung Ω_k bestimmt wird, also unabhängig von w ist.

6.10. Eine kürzere Formulierung dieses Satzes ist:

Hauptsatz II. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kompakter Riemannscher Bereich. Wenn in $\mathfrak{R}$ meromorphe Funktionen auf $\mathfrak{R}$ analytisch voneinander abhängen, so sind sie algebraisch abhängig.*

6.11. Ein Spezialfall von Hauptsatz II ist:

Hauptsatz III. *Zwischen $n+1$ meromorphen Funktionen auf einem $2n$-dimensionalen, kompakten Riemannschen Bereich besteht eine algebraische Relation.*

Literatur.

[1] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II/1, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1929. — [2] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Bereiche. Math. Ann. **124**, 1—16 (1950). — [3] THIMM, W.: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. I. Math. Ann. **125**, 145—164 (1952). — [4] THIMM, W.: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. II. Math. Ann. **125**, 264—283 (1953). — [5] THIMM, W.: Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **128**, 1—48 (1954).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 28. März 1954.)

HÄMISCH, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 458—487 (1954)

Über die Topologie in der Algebra.

Von

WERNER HÄMISCH.

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch ein von Herrn KRULL [1] entworfenes Programm. Demgemäß überträgt sie die Topologisierungsmethoden, die von der Theorie der unendlichen Gruppen und von der Idealtheorie der kommutativen Ringe her bekannt sind, auf allgemeine Algebren im Sinne von BIRKHOFF [1], d.h. auf Mengen mit beliebig vielstelligen Operatoren.

Durch das Beiseitelassen der Gruppen- und Ringaxiome kann in der Tat gerade das Wesentliche der topologischen Algebra deutlich gemacht werden. Insbesondere zeigt sich hierbei: 1. Bildet man nicht nur die gewöhnlichen topologischen Produkte, sondern auch allgemeinere, auf sog. Aufbaumengen bezogene $\mathfrak{L}$-Produkte, dann lassen sich die in der Algebra bekannten Topologisierungsmethoden zurückführen auf die topologische Multiplikation diskreter Algebren (§ 4 und § 5). 2. Deutet man die den direkten und subdirekten Summen- bzw. Produktdarstellungen von Gruppen und Ringen entsprechenden Zerlegungen einer Algebra in einfacher strukturierte Algebren als Analysen der Struktur dieser Algebra (man denke etwa an die Strukturätze der hyperkomplexen Systeme), dann läßt sich die algebraische Topologisierung von Algebren mit anschließender Bildung der vollständigen Hülle verstehen als eine wesentlich feinere und durchaus naturgemäße Strukturanalyse (§ 5). 3. Die Gruppen und Ringe sind vor den allgemeinen Algebren im Hinblick auf die algebraischen Topologien vor allem dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen die Komposition der Kongruenzen stets kommutativ ist und überdies noch eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Kongruenzen und ihren Nullklassen, den sog. Kernen besteht (§ 7).

§ 1 und § 2 bauen auf dem Mengen- und dem Abbildungsbegriff organisch die allenthalben in der Mathematik und insbesondere in der Algebra benötigten Grundbegriffe in einer einheitlichen Bezeichnungsweise auf, die so vielseitigen Anforderungen gewachsen ist, wie sie hier die allgemeinen Betrachtungen stellen. § 2 enthält außerdem noch die wichtigsten Sätze über Kongruenzen, insbesondere über deren Verhalten bei homomorphen Abbildungen.

§ 3 behandelt die Kongruenztopologien. Außer einigen grundlegenden Sätzen über die Hüllen von Teilmengen und von Relationen zeigt er, daß die oben genannten $\mathfrak{L}$-Produkte (auf Grund ihrer Beziehung zu sog. $\mathfrak{L}$-Schnitten von Filterbasen) und unter gewissen bei Gruppen und Ringen stets erfüllten Voraussetzungen auch die Quotienten von Kongruenztopologien wieder Kongruenztopologien sind. § 4 präzisiert den Begriff der algebraischen Topologien — es sind dies einfach die Kongruenztopologien — und enthält unter anderem

den Satz von der Vollständigkeit der $\mathfrak{L}$-Produkte kongruenztopologisch vollständiger Algebren.

Die Betrachtung der Zerlegungen einer Algebra unter dem Blickwinkel der Strukturanalyse führt in § 5 ohne Künstlichkeit dazu, eine Algebra nach Maßgabe der gewählten Zerlegung in gewissem Sinne zu vervollständigen, und es ist dann evident, daß sich dieser Prozeß auch als Bildung einer vollständigen Hülle im topologischen Sinne deuten läßt, wenn man eine im wesentlichen durch die Zerlegung bestimmte Kongruenztopologie zugrunde legt. Eine eingehende Untersuchung der Beziehungen zwischen der Topologie in der Hülle und der in der Algebra selbst zeigt dann, daß die Hülle durch die Algebra und deren Topologie bis auf Isomorphie hinsichtlich ihrer algebraisch-topologischen Gesamtstruktur eindeutig bestimmt ist und daß man sich dementsprechend im allgemeinen auf die Betrachtung einer besonders einfachen Darstellung der Hüllen, auf die sog. $\mathfrak{T}$-Hüllen beschränken kann.

§ 6 enthält nun eine kleine Theorie der $\mathfrak{T}$-Hüllen. Es wird zunächst untersucht, wie weit im allgemeinen das Vervollständigen einer Algebra vertauschbar ist mit den elementaren Operationen zur Ableitung neuer Algebren, nämlich mit der Auswahl von Unteralgebren und der Bildung von Produkt- und Quotientalgebren. Während die Vertauschbarkeit in den beiden ersten Fällen besteht, gilt sie im letzten Falle anscheinend nicht allgemein, doch gibt es verhältnismäßig einfache Bedingungen, unter denen sie beinahe gilt, d. h. bis auf die Stetigkeit der Umkehrung beim Isomorphismus des Quotienten der Hülle auf die Hülle des Quotienten.

Des weiteren wird eine Möglichkeit untersucht, die Hülle einer Algebra in Hüllen der gleichen Algebra so zu zerlegen, daß sie hinsichtlich ihrer algebraisch-topologischen Gesamtstruktur in ein Produkt von unter Umständen einfacher strukturierten Hüllen eingebettet erscheint. Dies kann geschehen, wenn die der Vervollständigung zugrunde liegende Topologie eine gewisse, z. B. die gröbste, gemeinsame Verfeinerung von Kongruenztopologien ist. Als eine Anwendung dieser Hüllenzerlegung ordnet sich hier die allgemeine Darstellung einer bemerkenswerten Schlußweise von ZARISKI [1] ein.

§ 7 widmet sich schließlich den besonderen Verhältnissen bei Gruppen mit allgemeinen, d. h. mit beliebig vielstelligen Operatoren und dort insbesondere der zwischen den Kongruenzen und ihren Kernen bestehenden Korrespondenz. Diese ist nicht nur ein Verbandsisomorphismus, bei dem die Komposition zweier Kongruenzen in die Summe der zugeordneten Kerne übergeht, es entsprechen sich bei dieser Zuordnung auch die topologischen Hüllen der Kongruenzen und Kerne, und zwar sowohl die Hüllen bezüglich der nicht vervollständigten als auch die bezüglich der vervollständigten Kongruenztopologie.

§ 1. Die allgemeinen Grundbegriffe.

1.1. Mengen und Abbildungen. Es bedeute $\mathfrak{p}_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n}$ eine Aussage über $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ und $a_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n}$ einen von $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ abhängigen Term. Die Menge der $a_\varkappa$ mit einem der Bedingung $\mathfrak{p}_\varkappa$ genügenden Argument $\varkappa$ bezeichnen wir durch $\{a_\varkappa|_\varkappa \mathfrak{p}_\varkappa\}$ oder, wenn die Bedingung $\mathfrak{p}_\varkappa$ selbstverständlich ist, durch

$\{a_\varkappa|\varkappa\}$. Weitere Vereinfachungen sind $\{\varkappa|_\varkappa p_\varkappa\} = \{\varkappa|p_\varkappa\}$ und $\{a_\varkappa|_\varkappa \varkappa = 1, \ldots, k\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$. (Vgl. hierzu etwa LEFSCHETZ [1].)

Folgt für $\{\varkappa', \varkappa''\} \subseteq \{\varkappa|p_\varkappa\}$ stets $a_{\varkappa'} = a_{\varkappa''}$ aus $a'_{\varkappa'} = a'_{\varkappa''}$, dann bezeichnen wir die Abbildung oder, wie wir auch sagen werden, die Funktion, die $a'_\varkappa$ für $\varkappa \in \{\varkappa|p_\varkappa\}$ auf $a_\varkappa$ abbildet, durch $(a_\varkappa|_\varkappa a'_\varkappa|p_\varkappa)$ oder, wenn die Bedingung $p_\varkappa$ selbstverständlich ist, durch $(a_\varkappa|_\varkappa a'_\varkappa)$. Weitere Vereinfachungen sind $(a_\varkappa|_\varkappa \varkappa|p_\varkappa) = (a_\varkappa|_\varkappa p_\varkappa)$ und $(a_\varkappa|_\varkappa \varkappa) = (a_\varkappa|\varkappa)$ sowie $(a_\varkappa|_\varkappa \varkappa = 1, \ldots, k) = (a_1, \ldots, a_k)$, wenn k eine Variable oder > 1 ist.

Sehr bequem ist die folgende Vereinbarung: $\{a'_{(a_\varkappa|\varkappa)}|p_{(a_\varkappa|\varkappa)}\}$ bedeute $\{a'_{(a_\varkappa|\varkappa)}|_{(a_\varkappa|\varkappa)} p_{(a_\varkappa|\varkappa)}\}$, wenn die $a_\varkappa$ die einzigen Variablen sind, die in $a'_{(a_\varkappa|\varkappa)}$ und $p_{(a_\varkappa|\varkappa)}$ zugleich vorkommen. (Vgl. die EINSTEINsche Summationsvorschrift in der Tensorrechnung.) Entsprechend sind die Symbole $(a''_{(a_\varkappa|\varkappa)}|a'_{(a_\varkappa|\varkappa)}|p_{(a_\varkappa|\varkappa)})$, $(a''_{(a_\varkappa|\varkappa)}|a'_{(a_\varkappa|\varkappa)})$ und $(a'_{(a_\varkappa|\varkappa)}|p_{(a_\varkappa|\varkappa)})$ zu verstehen.

Das Element einer einelementigen Menge A bezeichnen wir durch $A^\bullet$ und leere Mengen stets durch $\varnothing$. $x\,\varkappa$ bezeichne das Bild von $\varkappa$ bei der Abbildung x [1]).

Es sei jetzt f eine Abbildung einer Menge von Funktionen $x = (a_\varkappa|\varkappa \in K)$. Wir schreiben dann

$$f(a_\varkappa|\varkappa \in K) = f_{\varkappa \in K}\, a_\varkappa = f_{\varkappa \in K}\, a_\varkappa = f_\varkappa\, a_\varkappa \tag{1.1.1}$$

und

$$f_{\varkappa = 1, \ldots, k}\, a_\varkappa = a_1 f \ldots f a_k \tag{1.1.2}$$

in Analogie zur Summenbezeichnung $\sum(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{1 \leq \varkappa \leq k} a_\varkappa = \sum_{\varkappa = 1, \ldots, k} a_\varkappa = \sum_\varkappa a_\varkappa = a_1 + \cdots + a_k$. Insbesondere wird also $f(a|_\varkappa \varkappa) = f_\varkappa\, a$.

Existiert $f\,x$ *nur* für Funktionen x mit dem Definitionsbereich K, dann werden für jede echte Teilmenge K' von K *partielle Funktionen*

$$f(a_{\varkappa'}|\varkappa' \in K') = f_{\varkappa' \in K'}\, a_{\varkappa'} = \left(f_{\varkappa \in K}\, a_\varkappa | (a_{\varkappa''}|\varkappa'' \in K')\right) \tag{1.1.3}$$

von f definiert. Es gilt also

$$(f_{\varkappa' \in K'}\, a_{\varkappa'})_{\varkappa'' \in K'}\, a_{\varkappa''} = (f_{\varkappa' \in K'}\, a_{\varkappa'})\,(a_{\varkappa''}|\varkappa'' \in K') = f_{\varkappa \in K}\, a_\varkappa.$$

1.2. Mengenprodukte und Relationen.

$$\times(A_\varkappa|\varkappa \in K) = \times_{\varkappa \in K} A_\varkappa = \{(a_\varkappa|\varkappa)\,|\,a_\varkappa \in A_\varkappa \quad \textit{für alle} \quad \varkappa \in K\} \tag{1.2.1}$$

[1]) Man kann auch von $\{\varkappa|p_\varkappa\}$ und $(a_\varkappa|\varkappa)$ ausgehen und dann $\{a_\varkappa|_\varkappa p_\varkappa\}$ und $(a_\varkappa|_\varkappa a_\varkappa|p_\varkappa)$ als Abkürzungen für $\{a|a = a_\varkappa$ *für (wenigstens) ein* $\varkappa$ *mit* $p_\varkappa\}$ und $(\{a|a = a_\varkappa,\ a' = a'_\varkappa$ *für ein* $\varkappa$ *mit* $p_\varkappa\}^\bullet|a')$ einführen. Die Symbole $\{\varkappa|p_\varkappa\}$ und $(a_\varkappa|\varkappa)$ besitzen den Vorzug, daß sich ihr Gebrauch leicht beschreiben läßt, nämlich durch die Regeln: 1a. $\{\varkappa|p_\varkappa\} = \{\varkappa|p'_\varkappa\}$, genau wenn die Aussagen $p_\varkappa$ und $p'_\varkappa$ für jedes in Betracht kommende $\varkappa$ gleichwertig sind. 1b. $\varkappa' \in \{\varkappa|p_\varkappa\}$, genau wenn $p_{\varkappa'}$ gilt. 2a. $(a_\varkappa|\varkappa) = (a'_\varkappa|\varkappa)$, genau wenn $a_\varkappa = a'_\varkappa$ für alle in Betracht kommenden $\varkappa$ gilt. 2b. $(a_\varkappa|\varkappa)\,\alpha\,\varkappa' = a_{\varkappa'}$, wo das Anwendungssymbol α meist unterdrückt wird (s. Text!). — Die Bezeichnung $(a_1, \ldots, a_k)$ ist für den praktisch kaum interessierenden Fall $k = 1$ [man kann fast immer $(a|_\varkappa \varkappa = 1)$ durch a ersetzen] nicht erlaubt, weil nach den Klammerregeln $(a) = a$ gilt. — Jede von $x\,\varkappa$ verschiedene Verknüpfung von x und $\varkappa$ benötigt natürlich ein eigenes Verknüpfungssymbol. Daher darf z. B. auf der linken Seite der Gleichung $(a, b, c) \cdot 3 = (a \cdot 3, b \cdot 3, c \cdot 3)$ das Multiplikationszeichen nicht fehlen, denn es gilt ja $(a, b, c)\,3 = c$.

heißt das *Produkt der Mengen* $A_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$. Insbesondere wird also $\times(A, B) = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Wie üblich schreiben wir für die Menge der Abbildungen von K in A auch

$$A^K = \times_{\varkappa \in K} A \quad \textit{und speziell} \quad A^{(1, \ldots, k)} = A^k. \tag{1.2.2}$$

Gemäß der Definition von $f^\sim$ in 1.3 bedeutet $f^\sim X$ die Bildmenge $\{f x \mid x \in X\}$ von X bei der Abbildung f [2]). Die Abbildung

$$\varkappa^\varkappa = (x \varkappa \mid x \in \times_\varkappa A_\varkappa) \tag{1.2.3}$$

heißt die *$\varkappa$-Projektion* von $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$. (Beachte $\varkappa^\varkappa\, x = x\, \varkappa$ und die Verwendung von α in Anm. 1!) Mit $X' \subseteq \times_\varkappa A_\varkappa$ gilt auch noch $X' = \{(x' \varkappa \mid \varkappa) \mid x' \in X'\} \subseteq \{(x'_\varkappa \varkappa \mid \varkappa) \mid x'_\varkappa \in X' \textit{ für alle } \varkappa\} = \times_\varkappa \{x' \varkappa \mid x' \in X'\} = \times_\varkappa (\varkappa^\varkappa{}^\sim X')$, aber nicht mehr $X' \subseteq \times_\varkappa A'_\varkappa$, sobald ein $A'_\varkappa$ das zugehörige $\varkappa^\varkappa{}^\sim X'$ nicht mehr enthält. Daher heißt $X' \subseteq \times_\varkappa A_\varkappa$ *Subprodukt* der $A_\varkappa$, wenn $\varkappa^\varkappa{}^\sim X' = A_\varkappa$ für alle $\varkappa \in K$ gilt.

Ihrer besonderen Bedeutung wegen (vgl. 1.3!) belegen wir die Teilmengen R eines Produktes $A \times B$ *zweier* Mengen A und B mit einem besonderen Namen: *Relationen*. Die Formulierung der Aussage $(a, b) \in R$ für ein $R \subseteq A \times B$ durch den Satz „der (unabhängigen) Variablen a wird durch R die (abhängige) Variable b zugeordnet" legt die Definition der Menge

$$R\,A' = \{b \mid (a, b) \in R \quad \textit{für ein} \quad a \in A'\} \tag{1.2.4}$$

aller einem $a \in A'$ durch R zugeordneten $b \in B$ nahe.

Mitunter ist es angenehm, die für $A' \subseteq A$ und für $(A_\varkappa \mid \varkappa)$ mit $\times_\varkappa A_\varkappa \subseteq A$ durch

$$R^\alpha A' = R\,A' \quad \textit{und} \quad R^\alpha_{\varkappa \in K}\, A_\varkappa = R(\times_\varkappa A_\varkappa) \tag{1.2.5}$$

definierte Abbildung R^α zur Hand zu haben. Die Vereinfachungen

$$R\,\{a\} = R\,a \quad \textit{und} \quad b\,R\,a \quad \textit{statt} \quad b \in R\,a \tag{1.2.6}$$

[d.i. also $(a, b) \in R$] ermöglichen es, die logische Konjunktion der Aussagen $c\,S\,b$ für $S \subseteq B \times C$ und $b\,R\,a$ durch $c\,S\,b\,R\,a$ zu notieren.

Die Interpretation einer Relation als Zuordnung führt weiter noch zur Definition der *Inversen*

$$R^- = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \tag{1.2.7}$$

in $B \times A$ von $R \subseteq A \times B$ und der *Komposition*

$$\begin{cases} S \circ R = \{(a, c) \mid c\,S\,b\,R\,a \quad \textit{für ein} \quad b \in B\} \\ \qquad\quad = \{(a, c) \mid c \in S(R\,a)\} \end{cases} \tag{1.2.8}$$

in $A \times C$ von $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$.

[2]) Oft kann $f^\sim$ auch wieder durch f ersetzt werden, es kann aber auch $f\,X \neq f^\sim X$ definiert sein.

Die Relationen in A^2 nennen wir die Relationen *über* A. Ausgezeichnet unter ihnen sind A^2 selbst und die *Identität*

$$I_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = I. \tag{1.2.9}$$

1.3. Graphen und Äquivalenzen. Die weitaus wichtigste Relation ist der Graph (vgl. etwa JACOBSON [1]) einer Abbildung f aus A (heraus) in B (hinein), d.i. die Relation

$$f^\sim = \{(a, f\,a) \mid a \in A\}, \tag{1.3.1}$$

für die also $b\,f^\sim\,a$ gleichwertig ist mit $b = f\,a$. Ersichtlich gilt $f^\sim \circ f^{-\sim} = I_{f^\sim A} \subseteq I_B$. Gilt $R \circ R^- \subseteq I_B$ für ein $R \subseteq A \times B$, dann heißt R ein *Graph* in $A \times B$. $\{b', b''\} \subseteq R\,a$, d.h. $b''\,R\,a\,R^-\,b'$, impliziert dann $b''\,I_B\,b'$, d.h. $b' = b''$. Daher existiert, wenn R ein Graph ist, $(R\,a)^\bullet$ für alle a mit $R\,a \neq \varnothing$, und es kann

$$R^\sim = \big((R\,a)^\bullet \mid a\big) \tag{1.3.2}$$

definiert werden. Dann gilt $R^{\sim\sim} = \{(a, (R\,a)^\bullet) \mid a\} = \{(a, b) \mid b\,R\,a\} = R$ und $f^{\sim\sim} = \big((f^\sim\,a)^\bullet \mid a\big) = (f\,a \mid a)$, d.h. die Graphen in $A \times B$ entsprechen eineindeutig den Abbildungen aus A in B[3]).

Weiter wird für zwei Abbildungen f und g, für die $g(f\,a)$ für alle a existiert, die *Komposition*

$$g \circ f = (g^\sim \circ f^\sim)^\sim = \big(g(f\,a) \mid a\big) \tag{1.3.3}$$

[beachte $\big(((g^\sim \circ f^\sim)\,a)^\bullet \mid a\big) = (\{c \mid c\,g^\sim\,b\,f^\sim\,a \text{ für ein } b\}^\bullet \mid a)$!] definiert, so daß $(g \circ f)\,a = g(f\,a)$ gilt. Und wenn für eine Abbildung f von A und alle $b \in f^\sim A$ der Term $(f^{-\sim}\,b)^\bullet = \{a \mid b\,f^\sim\,a\}^\bullet = \{a \mid b = f\,a\}^\bullet$ existiert, ist noch die *inverse* Abbildung

$$f^- = f^{-\sim\sim} = (\{a \mid b = f\,a\}^\bullet \mid b) \tag{1.3.4}$$

[beachte $f^{-\sim\sim} = \big((f^{-\sim}\,b)^\bullet \mid b\big)$!] zu definieren, so daß $f^-\,b = \{a \mid b = f\,a\}^\bullet$ [4]).

An dieser Stelle seien auch noch die zu f gehörigen Abbildungen

$$f^\in = f^{\sim\alpha} \quad \textit{und} \quad f^\ni = f^{-\sim\alpha} \tag{1.3.5}$$

erwähnt, die die Teilmengen $A' \subseteq A$ in Teilmengen $B' \subseteq B$ und umgekehrt die B' in die A' überführen. Für eine Menge $\mathfrak{B}$ von Bildmengen B' wird also z.B. $f^{\ni\in}\,\mathfrak{B} = f^{\ni\sim}\,\mathfrak{B} = \{f^\ni B' \mid B' \in \mathfrak{B}\} = \{f^{-\sim} B' \mid B' \in \mathfrak{B}\} = \{\{a \mid f\,a \in B'\} \mid B' \in \mathfrak{B}\}$, d.i. die Menge der Urbildmengen aller $B' \in \mathfrak{B}$ bei der Abbildung f.

---

[3]) Mitunter werden Abbildungen von vorneherein als Graphen definiert. Dann muß man aber den Begriff des (geordneten) Paares voranstellen, und dieses ist im Grunde eine Abbildung, denn es besteht aus einem ersten, also der 1 zugeordneten, und einem zweiten, also der 2 zugeordneten Element. Es gibt auch keinen Grund, die Paare gemäß der Regel 2a in Anm. 1 durch „$(a, b) = (a', b')$, genau wenn $a = a'$ und $b = b'$ gilt", zu definieren, ohne die Regel 2b in der Form „$(a, b)\,1 = a$ und $(a, b)\,2 = b$" sogleich hinzuzunehmen, die die Paare zu vollwertigen Abbildungen macht.

[4]) Oft wird $g \circ f = g \cdot f$ und $f^- = f^{-1}$ gesetzt. Sind aber z.B. $g\,a$ und $f\,a$ stets Elemente einer multiplikativen Gruppe, dann kann auch $g \cdot f = (g\,a \cdot f\,a \mid a)$ und $f^{-1} = ((f\,a)^{-1} \mid a)$ vereinbart werden. Die Notation $g \circ f = g\,f$ ist auch nicht statthaft, weil es vorkommen kann, daß der Definitionsbereich von g sowohl $\{f\}$ als auch $f^\sim A$ umfaßt.

Außer ihrem Graphen definiert eine Abbildung f von A auch noch eine andere wichtige Relation, nämlich ihre Äquivalenz

$$f^{=} = f^{\sim -} \circ f^{\sim} = \{(a', a'') \mid f\,a' = f\,a''\} \tag{1.3.6}$$

(beachte, daß die Existenz eines b mit $a''\ f^{\sim -}\ b\ f^{\sim}\ a'$ genau $f\,a' = f\,a''$ bedeutet) die sich also relationstheoretisch leicht aus dem Graphen gewinnen läßt. $E = f^{=}$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. es gilt $I \subseteq E$, $E^{-} \subseteq E$, und $E \circ E \subseteq E$ oder damit gleichbedeutend

$$E^{-} \circ E \subseteq E \supseteq I\ ^{5}). \tag{1.3.7}$$

Eine Relation E über A mit diesen Eigenschaften heißt eine *Äquivalenz* über A. Die Aussagen

$$a''\,E\,a', \qquad E\,a' = E\,a'', \qquad E\,a' \cap E\,a'' \neq \varnothing \tag{1.3.8}$$

sind dann untereinander gleichwertig[6]). Daher liefern die $E\,a$ mit $a \in A$ eine Klasseneinteilung von A, und $E\,a$ ist die a enthaltende *E-Klasse*.

Die Bildmenge

$$A'/E = (E\,a \mid a)^{\sim}\,A' = \{E\,a \mid a \in A'\} \tag{1.3.9}$$

von $A' \subseteq A$ bei der Abbildung $(E\,a \mid a)$ heißt der *Quotient* von A' modulo E. Für die *kanonische* Abbildung $f = (E\,a \mid a)$ von A auf A/E gilt $f^{=} = \{(a', a'') \mid E\,a' = E\,a''\} = \{(a', a'') \mid a''\,E\,a'\} = E$, d.h. jede Äquivalenz E über A wird durch eine Abbildung von A definiert, nämlich durch die kanonische Abbildung modulo E.

§ 2. Die algebraischen Grundbegriffe.

2.1. Algebren und ihre Produkte. Zu den allgemeinen Grundbegriffen aus § 1 tritt jetzt der Operatorbegriff. *Operator auf* einer Menge A nennen wir jede Abbildung ω, deren Definitionsbereich nur aus Abbildungen einer Menge I_ω besteht und A^{I_ω} umfaßt, und für die [(1.2.5)!]

$$\omega^{\sim}\,A^{I_\omega} = \omega^{\in}_{i \in I_\omega} A \subseteq A \tag{2.1.1}$$

gilt. Ist Ω eine Menge von Operatoren auf A, dann heiße A bezüglich Ω *zulässig*, kurz *Ω-zulässig*, oder eine *Ω-Menge*. Wir werden auch sagen, A besitze eine *algebraische Struktur*, nämlich eine *Ω-Struktur*, und sei eine *Algebra*. (Vgl. hierzu sowohl Birkhoff [1] als auch Schmidt [1].) Einen Strukturbegriff benötigen wir nicht.

---

[5]) Weil die Inversion eine isotone Involution ist, d.h. weil $R^{--} = R$ gilt und $R^{-} \subseteq R'^{-}$, wenn $R \subseteq R'$ gilt, folgt aus $E^{-} \subseteq E$ sogar $E^{-} = E$. Und wegen $R \circ I_A = R = I_A \circ R$ für $R \subseteq A^2$ und der Isotonie der Komposition, also weil $S \circ R \subseteq S' \circ R'$, wenn $S \subseteq S'$ und $R \subseteq R'$, folgt aus $E^{-} \circ E \subseteq E \supseteq I$: $E^{-} = E^{-} \circ I \subseteq E^{-} \circ E \subseteq E$ und damit auch $E^{-} = E$.

[6]) $a''\,E\,a'$ impliziert $E\,a' = E\,a''$, weil aus $a \in E\,a''$ sofort $a\,E\,a''\,E\,a'$, also $a \in (E \circ E)\,a' = E\,a'$ folgt. $E\,a' = E\,a''$ impliziert trivial $E\,a' \cap E\,a'' \neq \varnothing$, und $a \in E\,a' \cap E\,a''$ impliziert $a''\,E^{-}\,a\,E\,a'$, also $a''(E^{-} \circ E)\,a'$, d.h. $a''\,E\,a'$.

Eine *Unteralgebra* U von A ist natürlich eine Ω-Teilmenge von A. Ersichtlich gilt dann:

(2.1.2) *Die Unteralgebren U einer Algebra A bilden einen vollständigen Verband bezüglich der Ordnung „$\subseteq$" mit* $\inf_{U\in\mathfrak{U}} U = \bigcap_{U\in\mathfrak{U}} U$ *für jede Menge* $\mathfrak{U}$ *von Unteralgebren U von A.*

Es seien Ω und Ω' Operatorenmengen auf A, und $A' \supseteq A$ sei eine Ω'-Menge. Wir definieren dann: 1. Ω' ist *bezüglich A reicher* als Ω, wenn zu jedem $\omega\in\Omega$ ein $\omega'\in\Omega'$ existiert, das auf A^{I_ω} die gleiche Funktion induziert wie ω, so daß also $\omega\, x = \omega'\, x$ für alle $x\in A^{I_\omega}$ gilt. 2. Ω' und Ω sind *äquivalent bezüglich A*, wenn jede von beiden Operatorenmengen bezüglich A reicher ist als die andere. 3. Ω' ist eine *Fortsetzung bezüglich A* von Ω auf A' hin, wenn Ω und Ω' bezüglich A äquivalent sind.

Immer wenn wir nun im folgenden bezüglich A die $\omega\in\Omega$ auf irgendeine Weise zu Operatoren $\omega'\in\Omega'$ auf einem $A'\supseteq A$ fortsetzen, werden wir anschließend sofort die Bezeichnungen ändern und ω hinfort als Variable für die Fortsetzungen verwenden. Statt dessen können wir aber auch sagen, die ω seien von vornherein in der gewünschten Weise als Operatoren auf A' definiert.

Die folgende Definition der Produktalgebren ist ein Beispiel für dieses bequeme Vorgehen, bei dem nur zu beachten ist, daß man erst nach dem letzten Fortsetzungsprozeß die Definitionsbereiche der Operatoren kennt. *Vorher* darf man also eine „wohldefinierte" Abbildung f nie als Operator verwenden, sondern kann nur von einem Operator sprechen, der auf dem Definitionsbereich von f gerade die Abbildung f induziert. Insbesondere gilt dies für die partiellen Abbildungen $f = \omega_{\iota'\in I'}\, a_{\iota'}$ $(I' < I_\omega)$, die ein Operator ω auf $\times_{\iota''\notin I'} A$ induziert [vgl. (2.4.6) und (5.1.7)!].

Auf dem Produkt $X = \times_{\varkappa\in K} A_\varkappa$ der Ω-Mengen $A_\varkappa$ sei $\omega\in\Omega$ definiert durch

$$\omega_{\iota\in I_\omega}\, x_\iota = \big(\omega_\iota(x_\iota\varkappa)\,\big|\,\varkappa\in K\big)\,, \qquad (x_\iota\in\times_\varkappa A_\varkappa)\,. \tag{2.1.3}$$

Die so definierte Ω-Menge X heiße das *Produkt der Algebren* $A_\varkappa$. Entsprechend werden wir unter einem *Subprodukt der Algebren* $A_\varkappa$ eine Unteralgebra des Produktes dieser Algebren verstehen, die ein Subprodukt der Mengen $A_\varkappa$ ist.

2.2. Zulässige Relationen, Kongruenzen. Nach (2.1.3) ist mit A und B auch $A\times B$ eine Ω-Menge so, daß $\omega_\iota(a_\iota, b_\iota) = (\omega_\iota\, a_\iota, \omega_\iota\, b_\iota)$ für alle $(a_\iota, b_\iota)\in A\times B$, $\iota\in I_\omega$, $\omega\in\Omega$. Daher sind die Ω-Relationen, also die Unteralgebren R von $A\times B$, dadurch charakterisiert, daß für alle $\omega\in\Omega$ stets $(\omega_\iota\, b_\iota)\, R\, (\omega_\iota\, a_\iota)$ folgt, wenn $b_\iota R\, a_\iota$ für alle $\iota\in I_\omega$ gilt. Damit ergibt sich mühelos:

(2.2.1) *Mit $R\subseteq A\times B$ und $S\subseteq B\times C$ sind auch $R^-\subseteq B\times A$ und $S\circ R\subseteq A\times C$ zulässig. Und Identitäten über Algebren sind stets zulässig.*

Eine zulässige Äquivalenz E über einer Algebra A heißt *Kongruenz*. Nennen wir zwei Relationen R' und R'' *miteinander vertauschbar*, wenn $R''\circ R' = R'\circ R''$ gilt, dann ergibt sich:

(2.2.2) *Die Kongruenzen über einer Algebra bilden einen vollständigen Verband bezüglich der Ordnung „$\subseteq$" mit* $\inf_{E\in\mathfrak{E}} E = \bigcap_{E\in\mathfrak{E}} E$ *für jede Menge* $\mathfrak{E}$ *von*

Kongruenzen E.

(2.2.3) $$E' \cup E'' \subseteq E' \circ E'' \subseteq \bigcap_{E \supseteq E' \cup E''} E.$$

(2.2.4) *$E' \circ E''$ ist genau dann die kleinste E' und E'' enthaltende Kongruenz, wenn E' und E'' miteinander vertauschbar sind.*

Beweise. (2.2.2) folgt aus (2.1.2) und $(\bigcap_\varkappa E_\varkappa)^- \circ (\bigcap_\varkappa E_\varkappa) = (\bigcap_\varkappa E_\varkappa^-) \circ (\bigcap_\varkappa E_\varkappa) \subseteq \bigcap_\varkappa (E_\varkappa^- \circ E_\varkappa) \subseteq \bigcap_\varkappa E_\varkappa \supseteq I$ gemäß (1.3.7). $I \subseteq E' \cap E''$ und die Isotonie der Komposition liefern (2.2.3). Aus $E' \circ E'' = E'' \circ E'$ folgt $(E' \circ E'')^- \circ (E' \circ E'') = E''^- \circ E'^- \circ E' \circ E'' \subseteq E'' \circ E' \circ E'' \subseteq E' \circ E'' \supseteq I \circ I = I$, so daß $E' \circ E''$ nach (1.3.7) und (2.2.1) eine Kongruenz ist. Umgekehrt gilt für eine Äquivalenz $E' \circ E'' : E' \circ E'' = (E' \circ E'')^- = E''^- \circ E'^- = E'' \circ E'$. Damit folgt (2.2.4) aus (2.2.3).

2.3. Homomorphismen. Eine Abbildung f einer Ω-Menge A in eine Ω-Menge B heiße *Ω-zulässig* oder ein *Homomorphismus*, wenn ihr Graph Ω-zulässig ist, d.h. wenn mit $b_\iota f^\sim a_\iota$ für alle ι stets auch $(\omega_\iota b_\iota) f^\sim (\omega_\iota a_\iota)$, also

(2.3.1) $$\omega_\iota (f a_\iota) = f(\omega_\iota a_\iota)$$

gilt, so daß $f^\sim A$ trivial eine Unteralgebra von B wird. Ein umkehrbarer Homomorphismus heißt *Isomorphismus*. Seine Umkehrung f^- ist wieder ein Homomorphismus, weil mit $f^\sim$ nach (2.2.1) auch $f^{\sim -} = f^{-\sim}$ zulässig ist. Ebenso ist nach (2.2.1) wegen $g^\sim \circ f^\sim = (g \circ f)^\sim$ mit g und f auch $g \circ f$ ein Homomorphismus.

Die Äquivalenz $f^= = f^{\sim -} \circ f^\sim$ eines Homomorphismus f ist nach (2.2.1) stets eine Kongruenz. Ist umgekehrt die Äquivalenz einer Abbildung f von A zulässig, gilt also für alle $\omega \in \Omega$ stets $f(\omega_\iota a_\iota') = f(\omega_\iota a_\iota'')$, wenn $f a_\iota' = f a_\iota''$ für alle $\iota \in I_\omega$ gilt, dann wird, weil $f(\omega_\iota a_\iota)$ nur von ω und den $f a_\iota$ abhängt, durch (2.3.1) in $f^\sim A$ eine Ω-Struktur *induziert*. *Ein Homomorphismus ist also genau eine solche Abbildung mit zulässiger Äquivalenz, die in ihrer Bildmenge gerade die dort vorliegende algebraische Struktur induziert.*

Eine Abbildung f von A wollen wir jetzt stets gemäß

(2.3.2) $$f(a', a'') = f \circ (a', a'') = (f a', f a'')$$

auf A^2 fortsetzen[7]). Nach dieser Vereinbarung formulieren wir:

(2.3.3) *Für $f \in B^A$, $R \subseteq A^2$, und $S \subseteq B^2$ gilt:*

$$f^\sim R = f^\sim \circ R \circ f^{\sim -} \quad \text{und} \quad f^{\sim -} S = f^{\sim -} \circ S \circ f^\sim.$$

(2.3.4) *Für $f \in B^A$, $R_1 \cup R_2 \subseteq A^2$ und $S_1 \cup S_2 \subseteq B^2$ gilt:*

$f^\sim (R_2 \circ R_1) = f^\sim R_2 \circ f^\sim R_1$, *wenn* $f^= \circ R_i = R_i \circ f^=$ *für ein* $i = 1, 2$, *und*

$f^{\sim -} (S_2 \circ S_1) = f^{\sim -} S_2 \circ f^{\sim -} S_1$, *wenn* $S_i \subseteq f^\sim A$ *für ein* $i = 1, 2$.

(2.3.5) *Ist R eine Äquivalenz über A und mit dem $f^=$ eines $f \in B^A$ vertauschbar, dann ist $f^\sim R$ eine Äquivalenz über $f^\sim A$.*

[7]) Macht man, wie es bei $A \cap A^1 = \emptyset$ meist geschieht, zwischen den Abbildungen f von A und denen von A^1 keinen Unterschied, indem man stets $f a = f(a|_\varkappa \varkappa = 1)$ definiert (vgl. Anm. 1!), dann ist (2.3.2) für $f^\sim A \subseteq A$ im Einklang mit (2.1.3).

Ist S eine Äquivalenz über B, dann ist $f^{\sim -} S$ eine Äquivalenz über A, die $f^{=}$ enthält und daher mit $f^{=}$ vertauschbar ist.

Beweise. $(b', b'') = f(a', a'')$ mit $a'' R a'$ bzw. mit $b'' S b'$ bedeutet $b'' f^{\sim} a'' R a' f^{\sim -} b'$ bzw. $a'' f^{\sim -} b'' S b' f^{\sim} a'$. Damit ist (2.3.3) bewiesen, und (2.3.4) und (2.3.5) lassen sich jetzt leicht nachrechnen. Man hat dabei nur zu beachten, daß $f^{\sim} \circ f^{=} = I_{f^{\sim} A} \circ f^{\sim} = f^{\sim}$ (und damit auch die invertierte Gleichung $f^{=} \circ f^{\sim -} = f^{\sim -}$) gilt sowie $f^{=} \subseteq f^{\sim -} \circ S \circ f^{\sim}$ für $I_{f^{\sim} A} \subseteq S$.

In Verbindung mit (2.2.1) beantworten (2.3.3), (2.3.4) und (2.3.5) die Frage nach dem Verhalten der Zulässigkeit, der Vertauschbarkeit und der Äquivalenzeigenschaft von Relationen bei Homomorphismen.

2.4. Quotienten von Algebren und Relationen. Ist E eine Kongruenz über der Algebra A, dann induziert die kanonische Abbildung $(E\,a|a)$, deren Äquivalenz nach 1.3 gerade E, also zulässig ist, gemäß (2.3.1) in A/E eine Ω-Struktur so, daß

$$\omega_\iota(E\,a_\iota) = E\,(\omega_\iota\,a_\iota). \tag{2.4.1}$$

Mit dieser algebraischen Struktur versehen, heiße A/E der *Quotient der Algebra A modulo E*. Entsprechend heißt das Bild

$$R/E = (E\,a|a)^{\sim} R = \{(E\,a', E\,a'')\,|\,a'' R a'\} \tag{2.4.2}$$

einer Relation R über A der *Quotient der Relation R modulo E*. Wir heben hervor:

Für eine Kongruenz E und eine Relation R über einer Algebra A gilt:

(2.4.3) $(E\,a'')\,(R/E)\,(E\,a')$, *genau wenn* $a''(E \circ R \circ E)\,a'$ *gilt.*

(2.4.4) $(R \circ E)/E' = R/E' = (E \circ R)/E'$, *wenn* $E \subseteq E'$ *gilt.*

(2.4.5) $\omega_\iota^{\subseteq}(E\,a_\iota) \subseteq \omega_\iota(E\,a_\iota)$ *für alle* $\omega \in \Omega$ $\big((1.2.5)!\big)$.

(2.4.6) $\omega'_{\iota''}(E\,a_{\iota''}) = \big(\omega_{\iota'}(E\,a_{\iota'})\big)_{\iota''}(E\,a_{\iota''})$, *wenn* $\omega'_{\iota''}\,a_{\iota''} = (\omega_{\iota'}\,a_{\iota'})_{\iota''}\,a_{\iota''}$,

wo natürlich $\{\omega, \omega'\} \subseteq \Omega$ und $I_{\omega'} \ni \iota''$ zu $I' \ni \iota'$ in I_ω komplementär sein muß[8].

Beweise. Nach (2.3.3) ist $f^{=} \circ R \circ f^{=}$ die größte Relation, die f auf $f^{\sim} R$ abbildet. Für $f = (E\,a|a)$ folgt damit wegen $f^{=} = E$ (2.4.3). Da $E \subseteq E'$ gleichbedeutend ist mit $E \circ E' = E' = E' \circ E$, gilt $E' \circ R \circ E \circ E' = E' \circ R \circ E' = E' \circ E \circ R \circ E'$, und somit folgt nach (2.4.3) modulo E' (2.4.4). Gilt $a'_\iota \in E\,a_\iota$, also $E\,a'_\iota = E\,a_\iota$, für alle ι, dann wird $\omega_\iota\,a'_\iota \in E(\omega_\iota\,a'_\iota) = \omega_\iota(E\,a'_\iota) = \omega_\iota(E\,a_\iota)$, also gilt (2.4.5). (2.4.6) folgt durch einfaches Rechnen: $\omega'_{\iota''}(E\,a_{\iota''}) = E(\omega'_{\iota''}\,a_{\iota''}) = E\,(\omega_{\iota \in I_\omega}\,a_\iota) = \omega_\iota(E\,a_\iota)$.

§ 3. Die Kongruenztopologien.

Wir entwickeln jetzt die topologischen Hilfsmittel. Dabei halten wir uns streng an die Terminologie von BOURBAKI [1]. Immer wenn ein BOURBAKIscher

[8]) Zum Beispiel ist also die Fortsetzung der Multiplikation mit einem Element a eines Ringes A auf A/E die gleichseitige Multiplikation mit $E\,a$. Man darf daher oft $a \cdot E\,a' = E(a \cdot a')$ setzen.

Begriff zum ersten Male im Text auftritt, fügen wir der hier gewählten Übersetzung den französischen Ausdruck hinzu.

3.1. $\mathfrak{L}$-Produkte und $\mathfrak{L}$-Schnitte von Filterbasen. Über der Menge der Teilmengen von A definieren wir die *Größer-oder-gleich-Relation*

$$\geqq_A = \{(A', A'') \mid A' \subseteq A'' \subseteq A\} = \geqq \tag{3.1.1}$$

und haben dann nach (1.2.4) für den von einer *Filterbasis* (*base d'un filtre*) $\mathfrak{F}$ in A erzeugten *Filter* (*filtre*) die Bezeichnung

$$\geqq_A \mathfrak{F} = \{A' \mid F \subseteq A' \subseteq A \quad \text{für ein} \quad F \in \mathfrak{F}\} = \geqq \mathfrak{F}.$$

Eine Menge $\mathfrak{L}$ von Teilmengen Λ von K nennen wir eine *Aufbaumenge* von K, wenn sie mit Λ' und Λ'' stets auch ein $\Lambda \supseteq \Lambda' \cup \Lambda''$ enthält (wenn sie also ein ensemble filtrant ist) und wenn sie K überdeckt, wenn also $\bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{L}} \Lambda = K$ gilt. Man beachte, daß mit K auch $\mathfrak{L}$ endlich ist und dann $\bigcup_{\Lambda} \Lambda = K$ enthält.

Nun sei $\mathfrak{F}_\varkappa$ für jedes $\varkappa \in K$ eine Filterbasis in $A_\varkappa$. Als $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{F}_\varkappa$ definieren wir dann

$$\bigtimes_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa = \left\{ \bigtimes_{\varkappa \in K} F_\varkappa \;\middle|\; \text{es gibt } \Lambda \in \mathfrak{L} \text{ mit } F_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \text{ und } F_\varkappa = A_\varkappa \text{ für alle } \varkappa \notin \Lambda \right\} \tag{3.1.2}$$

Wie leicht zu sehen, ist es wegen $\bigtimes_\varkappa F'_\varkappa \cap \bigtimes_\varkappa F''_\varkappa = \bigtimes_\varkappa (F'_\varkappa \cap F''_\varkappa)$ und der Aufbaueigenschaft von $\mathfrak{L}$ eine Filterbasis in $\bigtimes_\varkappa A_\varkappa$. Besteht $\mathfrak{L}$ genau aus allen endlichen Teilmengen von K, dann erzeugt das $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{F}_\varkappa$ ersichtlich das übliche *Filterprodukt* (*produit de filtres*) der $\geqq \mathfrak{F}_\varkappa$.

Sind jetzt die $A_\varkappa$ sämtlich gleich A, dann definieren wir

$$\bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa = \{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \mid \Lambda \in \mathfrak{L}, \quad F_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \Lambda\} \tag{3.1.3}$$

als den $\mathfrak{L}$-*Schnitt* der $\mathfrak{F}_\varkappa$. Ersichtlich ist er wegen der Aufbaueigenschaft von $\mathfrak{L}$ wieder eine Filterbasis in A, wenn er die leere Menge nicht enthält, trivial also, wenn

$$\bigcap_{\varkappa \in K} \bigcap_{F_\varkappa \in \mathfrak{F}_\varkappa} F_\varkappa = \bigcap_{F \in \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa} F \tag{3.1.4}$$

nicht leer ist. Der $\mathfrak{L}$-Schnitt ist stets *feiner* (*plus fin*) als seine Komponenten und hat nichts mit dem *Durchschnitt* $\bigcap_\varkappa \geqq \mathfrak{F}_\varkappa$ (*filtre intersection*) zu tun, der die untere Grenze (*borne inférieure*) seiner Komponenten ist.

Es sei jetzt $\varkappa^x$ die $\varkappa$-Projektion von $X = \bigtimes_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$. Mit

$$\begin{cases} F_\varkappa^\ni = \varkappa^{x\ni} F_\varkappa = \{x \mid x\varkappa \in F_\varkappa\} & \text{und} \\ \mathfrak{F}_\varkappa^\ni = \varkappa^{x\ni\in} \mathfrak{F}_\varkappa = \{F_\varkappa^\ni \mid F_\varkappa \in \mathfrak{F}_\varkappa\} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

ergibt sich

$$\bigtimes_{\varkappa \in K} F_\varkappa = \{x \mid x\lambda \in F_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^\ni, \text{ wenn } F_\varkappa = A_\varkappa \text{ für alle } \varkappa \notin \Lambda, \tag{3.1.6}$$

so daß

$$\bigtimes_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa = \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa^\ni.$$

3.2. Kongruenzstrukturen. Besonders einfach sind diejenigen *gleichmäßigen Strukturen* (*structures uniformes*), deren *Nachbarschaftsfilter* (*filtres*

d'entourages) durch eine Menge von Äquivalenzen erzeugt werden. Denn jeder von Äquivalenzen erzeugte Filter besitzt nach (2.2.2) eine nur aus Äquivalenzen bestehende Basis und ist also trivial ein Nachbarschaftsfilter.

Unter einer *Kongruenzstruktur* in einer Algebra A verstehen wir nun eine gleichmäßige Struktur in A, deren Nachbarschaftsfilter durch Kongruenzen erzeugt wird, der also nach (2.2.2) eine nur aus Kongruenzen T über A bestehende Basis $\mathfrak{T}$ besitzt. Wir nennen $\mathfrak{T}$ dann eine *zulässige Äquivalenz-* oder *Kongruenzbasis*. Die durch $\mathfrak{T}$ definierte Kongruenzstruktur in A heiße $\mathfrak{T}$-*Struktur* und A selbst eine $\mathfrak{T}$-*Algebra* bzw. $\mathfrak{T}$-Ω-*Menge*. Für $\mathfrak{T} = \{I\}$ liegt dann eine gewöhnliche Algebra mit der diskreten (discrète) gleichmäßigen Struktur vor und für $\Omega = \{(a\,|\,a)\}$ eine Menge mit Kongruenzstruktur, aber ohne algebraische Struktur.

Sind zwei Algebren A und B isomorph aufeinander bezogen, und zwar durch ein und dieselbe Abbildung f sowohl algebraisch als auch im Sinne der gleichmäßigen Strukturen *(isomorphisme de la structure uniforme de A sur celle de B)*, dann sagen wir A und B seien *simultanisomorph* zueinander und nennen f einen *Simultanisomorphismus*.

Die durch eine Kongruenzbasis $\mathfrak{T}$ in A *eingeführte gleichmäßige Topologie (topologie déduite d'une structure uniforme)* nennen wir eine *Kongruenztopologie* oder genauer $\mathfrak{T}$-*Topologie*. Bei dieser ist

$$\mathfrak{T}\,a = \{T\,a\,|\,T \in \mathfrak{T}\} \tag{3.2.1}$$

eine *Umgebungsfilterbasis (base d'un filtre de voisinages)* von $a \in A$.

Im folgenden werden wir in erster Linie mit *separablen* gleichmäßigen Strukturen *(structures uniformes séparées)* zu tun haben und dementsprechend (BOURBAKI [1], Chap. II, § 2, Prop. 1) mit *separablen* Räumen *(espaces séparés)*, in denen also je zwei verschiedene Punkte im Sinne des HAUSDORFFschen Trennungsaxioms getrennt werden können, also separabel sind. Mit anderen Worten, wir betrachten hauptsächlich *separable Kongruenzbasen* $\mathfrak{T}$, für die also $\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} T = I$ gilt. Da die $T\,a$ mit $a \in A$ für jedes $T \in \mathfrak{T}$ die Klassen einer Klasseneinteilung von A sind, erweisen sie sich sofort als zugleich offen und abgeschlossen, also sind separable kongruenztopologische Räume stets *total unzusammenhängend (totalement discontinue)* und *regulär (régulier)*.

Statt „CAUCHY-*Filterbasis (base d'un filtre de Cauchy)* bezüglich der $\mathfrak{T}$-Topologie" werden wir kurz „$\mathfrak{T}$-*Filterbasis*" sagen, d.i. also eine Filterbasis, die zu jedem $T \in \mathfrak{T}$ ein F mit $F^2 \leqq T$ enthält. Ein $\mathfrak{T}$-*Filter* ist dann natürlich ein Filter, der eine $\mathfrak{T}$-Filterbasis enthält.

(3.2.2) *Eine Filterbasis $\mathfrak{F}$ ist eine $\mathfrak{T} = \{T_\varrho\,|\,\varrho \in P\}$-Filterbasis in A, genau wenn $\geqq_A \mathfrak{F}$ zu jedem $\varrho \in P$ eine T_ϱ-Klasse enthält.*

(3.2.3) *Die Menge $\{T_\varrho\,a_\varrho\,|\,\varrho \in P\}$ ist eine Filterbasis, genau wenn ein Filter sie enthält.*

(3.2.4) *Die Menge $\{T_\varrho\,a_\varrho\,|\,\varrho \in P\}$ ist eine gegen a konvergierende (konvergent) Filterbasis, genau wenn $a \in \bigcap_{\varrho \in P} T_\varrho\,a_\varrho$ gilt.*

(3.2.5) *A ist bezüglich $\mathfrak{T}=\{T_\varrho|\varrho\in P\}$ vollständig (complet), d.h. jede $\mathfrak{T}$-Filterbasis in A konvergiert in A, genau wenn jede Filterbasis der Gestalt $\{T_\varrho a_\varrho|\varrho\in P\}$ einen nicht leeren Durchschnitt $\bigcap_{\varrho\in P} T_\varrho a_\varrho$ besitzt.*

Beweise. $a\in F$ mit $F^2\subseteq T$ impliziert $F=F^2 a\subseteq T a$, und $(a', a'')\in(T a)^2$ impliziert $a'' T a T^{-} a'$ und damit $a'' T a'$. Also gilt (3.2.2). Ist $\{T_\varrho a_\varrho|\varrho\}$ in einem Filter enthalten, dann existieren $a'\in T_\varrho a_\varrho\cap T_{\varrho'} a_{\varrho'}$ und $a''\in T_\varrho a_\varrho\cap T_{\varrho''} a_{\varrho''}$ für beliebige $\varrho, \varrho', \varrho''$. Für $T_\varrho\subseteq T_{\varrho'}\cap T_{\varrho''}$ folgt dann mit (1.3.8) $T_\varrho a_\varrho=T_\varrho a'\subseteq T_{\varrho'} a'=T_{\varrho'} a_{\varrho'}$ und ebenso $T_\varrho a_\varrho\subseteq T_{\varrho''} a_{\varrho''}$. Daher ist $\{T_\varrho a_\varrho|\varrho\}$ eine Filterbasis und (3.2.3) bewiesen. $\mathfrak{T} a\subseteq\supseteq\{T_\varrho a_\varrho|\varrho\}$ impliziert mit (1.3.8) $T_\varrho a=T_\varrho a_\varrho$ für alle ϱ, also $a\in\bigcap_\varrho T_\varrho a_\varrho$. Hieraus folgt wieder $T_\varrho a=T_\varrho a_\varrho$ und damit $\mathfrak{T} a=\{T_\varrho a_\varrho|\varrho\}$. (3.2.5) aber ist eine unmittelbare Folge von (3.2.2), (3.2.3) und (3.2.4).

3.3. Produkt-, Quotient- und Unterstrukturen. Es sei $A_\varkappa$ für jedes $\varkappa\in K$ eine $\mathfrak{T}_\varkappa$-Ω-Menge. Die $\varkappa$-Projektion $\varkappa^{\mathfrak{x}}$ des Algebrenproduktes $X=\times_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$ ist nach (2.3.1) ein Homomorphismus, denn nach (2.1.3) gilt $(\omega_\iota x_\iota)\varkappa=\omega_\iota(x_\iota\varkappa)$. Daher sind ((2.3.2)!) die $T_\varkappa^{\ni}=\varkappa^{\mathfrak{x}\ni} T_\varkappa=\varkappa^{\mathfrak{x}\sim-} T_\varkappa$ für $T_\varkappa\in\mathfrak{T}_\varkappa$ nach (2.3.3) und (2.3.5) Kongruenzen über X, und somit bilden die *Urbilder (images reciproques)* $\mathfrak{T}_\varkappa^{\ni}=\varkappa^{\mathfrak{x}\ni}\mathfrak{T}_\varkappa=\{T_\varkappa^{\ni}|T_\varkappa\in\mathfrak{T}_\varkappa\}$ der $\mathfrak{T}_\varkappa$ Kongruenzbasen über X. Schließlich ist dann auch jeder $\mathfrak{L}$-Schnitt der $\mathfrak{T}_\varkappa^{\ni}$ wegen (2.2.2) eine Kongruenzbasis über X, *und zwar wegen* (3.1.4) *eine separable, wenn die $\mathfrak{T}_\varkappa$ separabel sind.* Die durch diese in X definierte gleichmäßige Struktur bzw. Topologie nennen wir das $\mathfrak{L}$-*Produkt* der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Strukturen bzw. $\mathfrak{T}_\varkappa$-Topologien in den $A_\varkappa$, denn es handelt sich, wie man nach BOURBAKI [*1*], Chap. II, § 5, No 1—2, mühelos feststellt, um die gewöhnliche *Produktstruktur (structure uniforme produit)* bzw. *Produkttopologie (topologie produit)*, wenn $\mathfrak{L}$ genau aus allen endlichen Teilmengen von K besteht. Da jedes $T_\varkappa^{\ni}$ wegen $\bigcup_\lambda\Lambda=K$ ein $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda^{\ni}\in\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa}\mathfrak{T}_\varkappa^{\ni}$ enthält, sieht man sofort, daß die $\mathfrak{L}$-Produkte im allgemeinen *feiner (plus fin)* sind als das gewöhnliche. Das mit dem $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Strukturen und $\mathfrak{T}_\varkappa$-Topologien versehene X selbst nennen wir schließlich das $\mathfrak{L}$-*Produkt* der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Algebren $A_\varkappa$.

Die Umgebungsfilterbasis eines Punktes $x\in X$ bezüglich der $\mathfrak{L}$-Produkttopologie läßt sich leicht (der üblichen Produktdefinition für Topologien entsprechend) als $\mathfrak{L}$-Produkt von Umgebungsfilterbasen schreiben:

(3.3.1) *$(\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa\in K}\mathfrak{T}_\varkappa^{\ni})\, x=\times_{\mathfrak{L},\varkappa\in K}\mathfrak{T}_\varkappa(x\varkappa)$, wobei $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda^{\ni} x=\times_{\varkappa\in K} T_\varkappa(x\varkappa)$ wird, wenn man $T_\varkappa=A_\varkappa^2$ für alle $\varkappa\notin\Lambda$ setzt.*

(3.3.2) *Für $K=\{1,\ldots,k\}$, $A_1=\cdots=A_k=A$ und $\mathfrak{T}_1=\cdots=\mathfrak{T}_k=\mathfrak{T}$ wird $\supseteq\times_{\mathfrak{L},\varkappa=1,\ldots,k}\mathfrak{T}(x\varkappa)=\supseteq\{\times_{\varkappa=1,\ldots,k} T(x\varkappa)\,|\,T\in\mathfrak{T}\}$.*

Beweise. Wegen $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda^{\ni} x=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\{x'|(x\lambda, x'\lambda)\in T_\lambda\}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(T_\lambda(x\lambda))^{\ni}$ wird gemäß (3.2.1) und (3.1.5) $(\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa}\mathfrak{T}_\varkappa^{\ni})\, x=\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa}(\mathfrak{T}_\varkappa(x\varkappa))^{\ni}$. Damit folgt (3.3.1) aus (3.1.6)[9]. Die linke Basis in (3.3.2) enthält die rechte, und $\times_{\varkappa=1,\ldots,k} T_\varkappa(x\varkappa)$ enthält $\times_{\varkappa=1,\ldots,k} T(x\varkappa)$ für $T\subseteq\bigcap_{\varkappa=1,\ldots,k} T_\varkappa$.

[9]) Zur Warnung: (3.1.6) setzt $\varkappa^{\mathfrak{x}}$ als $\varkappa$-Projektion von $X=\times_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$ voraus, kann also auf $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa}\mathfrak{T}_\varkappa^{\ni}$ nur angewandt werden, wenn $\varkappa^{\mathfrak{x}}$ als $\varkappa$-Projektion von $\times_\varkappa A_\varkappa^2$ auf $A_\varkappa^2$ gedeutet wird. Dann wird aber $T_\varkappa^{\ni}=\varkappa^{\mathfrak{x}\ni} T_\varkappa\subseteq\times_\varkappa A_\varkappa^2$ statt $T_\varkappa^{\ni}\subseteq(\times_\varkappa A_\varkappa)^2$.

Das Bild *(image directe)* $f^{\in\in}\mathfrak{T} = \{f^\sim T \mid T \in \mathfrak{T}\} = \{f^\sim \circ T \circ f^{\sim -} \mid T \in \mathfrak{T}\}$ einer Kongruenzbasis $\mathfrak{T}$ über einer Algebra A ist nach (2.3.3) und (2.3.5) eine Kongruenzbasis über $f^\sim A$, wenn f ein Homomorphismus von A und $f^=$ mit allen $T \in \mathfrak{T}$, kurz *mit* $\mathfrak{T}$ *vertauschbar* ist. Wir nennen ein solches f einen *$\mathfrak{T}$-Homomorphismus* und sagen dann, *f induziere* in seiner Bildmenge $f^\sim A$ die durch $f^{\in\in}\mathfrak{T}$ definierte Kongruenzstruktur und Kongruenztopologie. Wird diese Topologie eingeführt, dann ist f trivial *gleichmäßig stetig (uniformément continue)*. Für die Umgebungsfilterbasen bezüglich der durch einen $\mathfrak{T}$-Homomorphismus induzierten Topologie gilt:

(3.3.3) $f^{\in\in}(\mathfrak{T}\, a) = (f^{\in\in}\mathfrak{T})\,(f\, a)$, *wenn f ein $\mathfrak{T}$-Homomorphismus ist,*

denn wegen $(S \circ R)\, a = S(R\, a)$ ((1.2.8)!) und (2.3.3) wird $(f^\sim T)\,(f\, a) = (f^\sim \circ T \circ f^{\sim -})\,(f^\sim a) = (f^\sim \circ T \circ f^=)\, a = (f^\sim \circ T)\, a = f^\sim (T\, a)$, also

(3.3.4) $(f^\sim E)\,(f\, a) = f^\sim (E\, a)$, *wenn* $E \circ f^= = f^= \circ E$.

Wir dehnen den Brauch, Bildmengen kanonischer Abbildungen modulo einer Äquivalenz Quotienten zu nennen und entsprechend zu bezeichnen, auf die Bilder von Filterbasen aus und nennen

(3.3.5) $\mathfrak{T}/E = (E\, a \mid a)^{\in\in}\mathfrak{T} = \{T/E \mid T \in \mathfrak{T}\}$

den *Quotienten der Kongruenzbasis $\mathfrak{T}$ modulo der mit $\mathfrak{T}$ vertauschbaren Kongruenz E*. Die durch $\mathfrak{T}/E$ in A/E definierte Kongruenzstruktur bzw. Kongruenztopologie nennen wir dann die *Quotientstruktur* bzw. *Quotienttopologie* modulo E der Kongruenzstruktur bzw. Kongruenztopologie in A [10]).

Nun sei A eine Unteralgebra der $\mathfrak{S}$-Algebra B. Die $S \cap A^2$ mit $S \in \mathfrak{S}$ sind nach (2.1.2) zulässig und wegen $(S \cap A^2)^- \circ (S \cap A^2) = (S \cap A^2) \circ (S \cap A^2) \leqq (S \circ S) \cap (A^2 \circ A^2) = S \cap A^2 \supseteq I_B \cap I_A = I_A$ gemäß (1.3.7) Äquivalenzen über A, so daß $\{S \cap A^2 \mid S \in \mathfrak{S}\}$ eine Kongruenzbasis über A ist, die die sog. durch $\mathfrak{S}$ in A *induzierte Unterkongruenzstruktur* bzw. *-topologie* definiert. *Trivial ist mit $\mathfrak{S}$ auch $\{S \cap A^2 \mid S \in \mathfrak{S}\}$ separabel.* Für die Umgebungsfilterbasen gilt wegen ((3.2.1)!)

(3.3.6) $S\, a \cap A = (S \cap A^2)\, a$: $\{S\, a \cap A \mid S \in \mathfrak{S}\} = \{S \cap A^2 \mid S \in \mathfrak{S}\}\, a$.

3.4. Hüllen von Teilmengen und von Relationen. Ist A eine $\mathfrak{T}$-Algebra, dann bezeichnen wir mit $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ die *Hülle der Teilmenge* U von A bezüglich der $\mathfrak{T}$-Topologie in A und mit $\overline{R}^{\mathfrak{T}}$ die *Hülle der Relation* R über A bezüglich des Produktes der $\mathfrak{T}$-Topologie mit sich selbst in A^2. Es gilt dann:

(3.4.1) *Ist $U \subseteq A$ zulässig bezüglich der partiellen Abbildungen $\omega_{\iota' \in I'}\, a_{\iota'}$, die für ein $\omega \in \Omega$ und ein $I' < I_\omega$ mit beliebigen $a_{\iota'}$ aus einer Teilmenge U' von A gebildet sind, dann ist $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ zulässig bezüglich der $\omega_{\iota' \in I'}\, a_{\iota'}$ mit beliebigen $a_{\iota'}$ aus $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$.*

(3.4.2) *Für $U \subseteq A$ gilt* $\overline{U}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (T\, U)$.

[10]) Wegen der Vertauschbarkeitsvoraussetzung werden die Quotientstrukturen im allgemeinen nicht beachtet. Bei algebraischen Strukturen, wie Gruppen und Ringen, ist sie aber praktisch immer erfüllt. [Vgl. (7.2.1)!]

(3.4.3) *Für* $R \leqq A^2$ *gilt* $\overline{R}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (T \circ R \circ T)$ *und* $\overline{(R\,a)}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (T \circ R)\, a \supseteq \overline{R}^{\mathfrak{T}} a$ *und, wenn* R *mit* $\mathfrak{T}$ *vertauschbar ist,* $\overline{(R\,a)}^{\mathfrak{T}} = \overline{R}^{\mathfrak{T}} a$.

(3.4.4) *Mit* E *ist auch* $\overline{E}^{\mathfrak{T}}$ *eine Kongruenz über* A, *wenn* E *mit* $\mathfrak{T}$ *vertauschbar ist.*

(3.4.5) *Die Kongruenzen* $E \in \supseteq \mathfrak{T}$ *sind bezüglich der* $\mathfrak{T}$*-Topologie abgeschlossen.*

Beweise. (3.4.1): Es sei $a_{\iota'} \in \overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ für $\iota' \in I'$ und $a_{\iota''} \in \overline{U}^{\mathfrak{T}}$ für $\iota'' \notin I'$, so daß zu jedem $T \in \mathfrak{T}$ ein $a_{\iota', T} \in U' \cap T\, a_{\iota'}$ und ein $a_{\iota'', T} \in U \cap T\, a_{\iota''}$ existieren. Nach Voraussetzung gilt dann $(\omega_{\iota'}\, a_{\iota', T})_{\iota''}\, a_{\iota'', T} = \omega_{\iota \in I_\omega}\, a_{\iota, T} \in U$, und die Zulässigkeit von T liefert $\omega_\iota\, a_{\iota, T} \in T(\omega_\iota\, a_\iota)$, so daß U in der Tat jede Umgebung $T(\omega_{\iota'}\, a_{\iota'})_{\iota''}\, a_{\iota''}$ mit $T \in \mathfrak{T}$ schneidet. (3.4.2): $\overline{U}^{\mathfrak{T}} = \{a \mid T\, a \cap U \neq \varnothing$ *für alle* $T\} = \bigcap_T \{a \mid a'\, T\, a$ *für ein* $a' \in U\} = \bigcap_T T\, U$. (3.4.3): Nach (3.3.1) und (3.3.2) ist $\{T\, a' \times T\, a'' \mid T\}$ Umgebungsfilterbasis von $(a', a'') \in A^2$. Daher wird $\overline{R}^{\mathfrak{T}} = \{(a', a'') \mid (T\, a' \times T\, a'') \cap R \neq \varnothing$ *für alle* $T\} = \bigcap_T \{(a', a'') \mid a''\, T\, a_2\, R\, a_1\, T\, a'$ *für ein* $(a_1, a_2)\} = \bigcap_T \{(a', a'') \mid a''(T \circ R \circ T)\, a'\} = \bigcap_T (T \circ R \circ T)$. Daraus folgt mit (3.4.2) sofort $\overline{R}^{\mathfrak{T}}\, a = \bigcap_T (T \circ R \circ T) a \supseteq \bigcap_T (T \circ R)\, a = \bigcap_T T(R\, a) = \overline{(R\, a)}^{\mathfrak{T}}$, wo das Gleichheitszeichen steht, wenn R mit allen T vertauschbar ist. (3.4.4): Wegen (3.4.3) ist nach (2.2.1) und (2.2.2) $\overline{R}^{\mathfrak{T}}$ mit R zulässig, und weiter ergibt sich $(\overline{E}^{\mathfrak{T}})^- \circ \overline{E}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_T (T \circ E) \circ \bigcap_T (T \circ E) \leqq \bigcap_T (T \circ E \circ T \circ E) = \bigcap_T (T \circ E) \supseteq I \circ I = I$. (3.4.5): Wegen $T \circ E = E = E \circ T$ für $T \leqq E$ folgt aus (3.4.3) $\overline{E}^{\mathfrak{T}} \leqq E$ für $E \in \supseteq \mathfrak{T}$.

Für $I' = \varnothing$ folgt aus (3.4.1) sofort, daß mit U auch $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ eine Unteralgebra von A ist[11]).

§ 4. Die algebraischen Topologien.

4.1. $\mathfrak{L}$-Produkte von Algebren. Um im Algebraischen separable Topologien einzuführen, d. h. aus dem Diskreten heraus zu definieren, stehen sofort die beiden folgenden Wege zur Verfügung: a) Man bildet topologische Produkte diskreter Algebren. b) Man wählt eine *separable* Menge $\mathfrak{E}$ von Kongruenzen über eine Algebra A aus, für die also $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E = I$ gilt; der von $\mathfrak{E}$ über A erzeugte separable Nachbarschaftsfilter definiert dann in A eine separable Topologie[12]).

[11]) Die allgemeinere Aussage von (3.4.1) hat folgende Bedeutung: Ist A ein (der Einfachheit halber) kommutativer Ring mit dem Unterring U' und U ein Ideal aus U', dann folgt aus dem Korollar nur, daß $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ ein Unterring von $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ ist, der bei Multiplikation mit einem Element aus U' in sich übergeht (und dazu muß man zu $\Omega = \{+, -, \cdot\}$ noch die Multiplikationen mit Elementen aus U'' hinzugenommen denken). Erst die volle Aussage lehrt, daß $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ ein Ideal von $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ ist, also auch bei Multiplikation mit einem nicht in U' liegenden Element aus $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ in sich übergeht.

[12]) Zwei Beispiele mögen die beiden Wege illustrieren: a) Ist K ein Körper, $\mathfrak{L}$ eine aus Unterkörpern A von K bestehende Aufbaumenge von K (der Name Aufbaumenge hat hier seinen Ursprung), $A = A_\varkappa$ für alle $\varkappa \in K$ eine kommutative Gruppe und $B \leqq X = \mathsf{X}_\varkappa A_\varkappa = A^K$ eine Menge von Bewertungen von K in A hinein, dann wird in B durch das in X gebildete $\mathfrak{L}$-Produkt der diskreten Topologien der $A_\varkappa$ im wesentlichen eine Charakterentopologie im Sinne von Krull [1] induziert: In der Tat bedeutet $(b', b'') \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I^{\supseteq}_{A_\lambda}$, daß b' und b'' die gleiche Bewertung von A induzieren. b) Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus dem (kommutativen) Ringe A, für das $\bigcap_{\varkappa = 1, 2, \ldots} \mathfrak{a}^{\cdot \varkappa} = \{0\}$ gilt ($\mathfrak{a}^{\cdot \varkappa}$ ist die $\varkappa$-te Potenz von $\mathfrak{a}$ bezüglich der Idealmultiplikation), dann definiert das aus den Kongruenzen modulo der $\mathfrak{a}^{\cdot \varkappa}$ bestehende $\mathfrak{E} = \{\{(a', a'') \mid a' - a'' \in \mathfrak{a}^{\cdot \varkappa}\} \mid \varkappa = 1, 2, \ldots\} = \mathfrak{T}$ in A die $\mathfrak{a}$-adische Topologie im Sinne von Zariski [1].

Offenbar ist der erste Weg ein Spezialfall des zweiten, denn nach 3.3 wird ein $\mathfrak{L}$-Produkt von Topologien dadurch gebildet, daß über einer Produktalgebra eine Kongruenzbasis ausgezeichnet wird. Daß aber auch umgekehrt der zweite Weg auf eine Produktbildung zurückgeführt werden kann, wird sich in 5.3 herausstellen. Da andere Wege anscheinend nicht bekannt (und im allgemeinen wohl auch schwerlich denkbar) sind, wollen wir die nach a) oder b) erreichbaren Topologien einfach die *algebraischen Topologien* nennen.

Nach 3.3, wo im Sinne von a) jetzt $\mathfrak{T}_\varkappa = \{I_{A\varkappa}\}$ zu setzen ist, bilden die

$$(4.1.1) \qquad \Lambda^* = \cap_{\lambda\in\Lambda} I^{\ni}_{A\lambda} = \{(x', x'') \mid x'\,\lambda = x''\,\lambda \quad \textit{für alle} \quad \lambda\in\Lambda\}$$

eine separable Kongruenzbasis $\mathfrak{L}^* = \{\Lambda^* \mid \Lambda\in\mathfrak{L}\}$ über $X = \times_\varkappa A_\varkappa$. Die durch $\mathfrak{L}^*$ über X definierte Kongruenzstruktur nennen wir $\mathfrak{L}$-*Struktur* und die durch diese in X induzierte Topologie die $\mathfrak{L}$-*Topologie*. Das mit $\mathfrak{L}$-Struktur und $\mathfrak{L}$-Topologie versehene X selbst ist dann nach 3.3 das $\mathfrak{L}$-*Produkt* der (diskreten) $A_\varkappa$.

4.2. Einige Sätze. Von den folgenden, auch an sich bemerkenswerten Sätzen sind für unsere weiteren, allgemeinen Untersuchungen nur (4.2.2) und (4.2.3) wichtig[13]).

(4.2.1) *In einem $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_{\varkappa\in K} A_\varkappa$ ist $\{x' \mid x'^{\sim} K' \leqq x^{\sim} K'\}$ für jedes $K' \leqq K$ abgeschlossen und, wenn K' in einem $\Lambda\in\mathfrak{L}$ enthalten ist, auch $\{x' \mid x'^{\sim} K' = x^{\sim} K'\}$ sowie $\{x' \mid x'\,\varkappa' = x\,\varkappa'$ für alle $\varkappa'\in K'\} = K'^*\,x$ und K'^* selbst.*

Beweis. Wegen $\cup_\Lambda \Lambda = K$ existiert zu jedem $\varkappa\in K$ ein $\Lambda_\varkappa \ni \varkappa$. Gehört x'' zur Hülle der ersten Menge, dann existiert zu jedem $\varkappa'\in K'$ ein $x_{\varkappa'}\in \Lambda^*_{\varkappa'}\,x''$ mit $x^{\sim}_{\varkappa'} K' \leqq x^{\sim} K'$, so daß $x''\,\varkappa' = x_{\varkappa'}\,\varkappa' \in x^{\sim} K'$. Gehört x'' zur Hülle der zweiten Menge, dann existiert zu jedem $\Lambda \geqq K'$ ein $x'\in\Lambda^*\,x''$ mit $x'^{\sim} K' = x^{\sim} K'$, so daß $x''^{\sim} K' = x'^{\sim} K' = x^{\sim} K'$. Entsprechend ergibt sich die Abgeschlossenheit von $K'^*\,x$, die aber auch nach (3.4.3) aus der von K'^* folgt. Diese aber ist durch (3.4.5) gesichert, weil $K'^* = \cap_{\varkappa'\in K'} I^{\ni}_{A\varkappa'}$ eine Kongruenz über X ist und trivial jedes Λ^* enthält, für das $K' \leqq \Lambda$ gilt.

(4.2.2) *In einem $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ sind genau die abgeschlossenen Teilmengen vollständige Unterräume.*

Beweis. Nach 3.3 ist X separabel. Wegen der Vollständigkeit der diskreten $A_\varkappa$ und wegen BOURBAKI [1], Chap. II, § 3, Prop. 6 folgt die Behauptung daher aus (4.2.3).

(4.2.3) *Die $\mathfrak{L}$-Produkte vollständiger $\mathfrak{T}_\varkappa$-Algebren $A_\varkappa$ sind vollständig.*

Beweis. Es bedeute ϱ_Λ eine Funktion auf K mit $\varrho_\Lambda\,\lambda\in\mathfrak{T}_\lambda$ für alle $\lambda\in\Lambda$ und mit $\varrho_\Lambda\,\varkappa = A^{\mathfrak{d}}_\varkappa$ für alle $\varkappa\notin\Lambda$. Nach (3.2.2) und (3.3.1) enthält dann ein $\mathfrak{S} = \cap_{\mathfrak{L},\varkappa} \mathfrak{T}^{\ni}_\varkappa$-Filter (3.3!) $\mathfrak{F}$ in $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ zu jedem ϱ_Λ ein Element der Gestalt $F_{\varrho_\Lambda} = \times_\varkappa(\varrho_\Lambda\,\varkappa)\,(x_{\varrho_\Lambda}\,\varkappa)$ mit $x_{\varrho_\Lambda}\in X$, und nach (3.2.3) ist $\{F_{\varrho_\Lambda} \mid \Lambda, \varrho_\Lambda\}$ eine Filterbasis. Da nun ganz allgemein aus $\times_\varkappa U'_\varkappa \leqq \times_\varkappa U''_\varkappa$ stets $U'_\varkappa \leqq U''_\varkappa$ für alle $\varkappa$ folgt, bilden die $\{(\varrho_\Lambda\,\varkappa)\,(x_{\varrho_\Lambda}\,\varkappa) \mid \Lambda, \varrho_\Lambda\}$ für jedes $\varkappa\in K$ eine Filterbasis über $A_\varkappa$, und die Gleichung $\varrho_\Lambda\,\varkappa = T_\varkappa$ in ϱ_Λ kann trivial für jedes $T_\varkappa\in\mathfrak{T}_\varkappa$ erfüllt werden,

[13]) Die Sätze (4.2.2) und (4.2.4) haben ihren speziellen Ursprung bei KRULL [1] (Satz 2 und 5), sind hier im allgemeinen Rahmen aber etwas modifiziert und ganz anders bewiesen.

weil stets ein $\Lambda \ni \varkappa$ existiert. Wegen der Vollständigkeit der $A_\varkappa$ existiert dann nach (3.2.5) zu jedem $\varkappa$ ein $a_\varkappa \in A_\varkappa$ so, daß $(a_\varkappa | \varkappa) \in F_{\varrho_\Lambda}$ für alle ϱ_Λ mit $\Lambda \in \mathfrak{L}$, und d.h. nach (3.2.4), daß $\mathfrak{F}$ gegen $(a_\varkappa | \varkappa) \in X$ konvergiert.

(4.2.4) *Ist A ein vollständiger Unterraum des $\mathfrak{L}$-Produktes $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ und A/Λ^* für jedes $\Lambda \in \mathfrak{L}$ endlich, dann ist A kompakt (compact). (Eine unendliche Klasseneinteilung $\{\Lambda^* a \cap A \mid a \in A\}$ enthält trivial keine endliche Überdeckung von A!).*

Beweis. Da $A = \bigcup_{a' \in A} \Lambda^* a' \cap A$ nach Voraussetzung für jedes Λ nur endlich viele $\Lambda^* a' \cap A$ vereinigt, enthält ein *Ultrafilter (ultrafiltre)* $\mathfrak{F}$ von A zu jedem Λ ein $\Lambda^* a_\Lambda \cap A = (\Lambda^* \cap A^2)\, a_\Lambda$ ((3.3.6)!) mit $a_\Lambda \in A$ (Bourbaki [1], Chap. I, § 5, Prop. 5, Cor.). Mithin bilden die $(\Lambda^* \cap A^2)\, a_\Lambda$, mit $\Lambda \in \mathfrak{L}$, nach (3.2.3) und (3.2.2) eine $\{\Lambda^* \cap A^2 \mid \Lambda\}$-Filterbasis in A, und wegen der Vollständigkeit von A, muß diese gegen ein $a \in A$ konvergieren, so daß auch $\mathfrak{F} \geq \{(\Lambda^* \cap A^2)\, a_\Lambda \mid \Lambda\}$ in A (gegen a) konvergiert.

§ 5. Die Strukturanalyse einer Algebra.

5.1. Die grundlegenden Sätze. Wir sagen „die Äquivalenzen $F_\varkappa$ über A mit $\varkappa \in K$ *kollidieren miteinander*", wenn bei beliebiger Wahl der $a_\varkappa \in A$ stets $\bigcap_{\varkappa \in K} F_\varkappa a_\varkappa \neq \varnothing$ gilt, wenn also ((1.3.8)!) die Gleichungen $F_\varkappa a = F_\varkappa a_\varkappa$ $(\varkappa \in K)$ im Sinne der arithmetischen Kongruenzgleichungen stets simultan lösbar sind. Zur weiteren Verdeutlichung dieses Begriffes bemerken wir:

(5.1.1) *Die Äquivalenzen $F_1, \ldots, F_k$ über A kollidieren genau dann miteinander, wenn $F_\varkappa \circ (F_1 \cap \cdots \cap F_{\varkappa-1} \cap F_{\varkappa+1} \cap \cdots \cap F_k) = A^2$ für alle $\varkappa = 1, \ldots, k$ gilt.*

Beweis. $a \in F_1\, a' \cap \bigcap_{\varkappa=2,\ldots,k} F_\varkappa\, a''$ impliziert $a' (F_1 \circ \bigcap_{\varkappa>1} F_\varkappa)\, a''$. Umgekehrt folgt aus der Bedingung und der Isotonie der Komposition $(F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa) \circ F_{\varkappa+1} = A^2$ für alle $\varkappa = 1, \ldots, k-1$. Die Existenz eines $a \in F_1\, a_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa\, a_\varkappa$ zu beliebig vorgegebenen $a_1, \ldots, a_k$ sei bereits bewiesen. Dann existiert ein a' mit $a (F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa)\, a'\, F_{\varkappa+1}\, a_{\varkappa+1}$, so daß $a' \in (F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa)\, a \cap F_{\varkappa+1}\, a_{\varkappa+1}$ und $(F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa)\, a = F_1\, a_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa\, a_\varkappa$.

Einen Isomorphismus f von A auf ein Subprodukt $f^\sim A$ der $A_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ nennen wir eine *Zerlegung* von A in die $A_\varkappa$, und zwar eine *echte Zerlegung*, wenn $f^\sim A = \times_\varkappa A_\varkappa$ gilt[14]).

(5.1.2) *Ist f ein Homomorphismus von A, dann ist $g = (f\, a \mid f^= a)$ ein Isomorphismus von $A/f^=$ auf $f^\sim A$.*

(5.1.3) *Ist $f^\sim A \leq X = \times_\varkappa A_\varkappa$, dann gilt* $f^= = \bigcap_\varkappa (\varkappa^\mathfrak{x} \circ f)^=$.

(5.1.4) *Sind die $F_\varkappa$ $(\varkappa \in K)$ Kongruenzen über A, dann ist*

$$f = \left((F_\varkappa a \mid \varkappa) \mid \bigcap_\varkappa F_\varkappa a \right)$$

[14]) Im allgemeinen werden die $A_\varkappa$ nicht zu Unteralgebren von $\times_\varkappa A_\varkappa$ (und damit bei echten Zerlegungen zu Unteralgebren von A) isomorph sein, wie dies z.B. bei Gruppen (die eine einelementige nur aus dem neutralen Element bestehende Unteralgebra enthalten) vermöge eines trivialen Isomorphismus der Fall ist. Es handelt sich also im allgemeinen nicht um eine Zerlegung in Unteralgebren. Unter Beachtung von § 7 und (5.1.4) läßt sich die Bedingung von (5.1.1) im Verein mit der Bedingung $\bigcap_\varkappa F_\varkappa = I$ leicht in ein weniger geläufiges Kriterium für die Direktheit endlicher Summenzerlegungen von Gruppen übersetzen.

eine Zerlegung von $A/\bigcap_\varkappa F_\varkappa$ in die $A/F_\varkappa$, und zwar genau dann echt, wenn die $F_\varkappa$ miteinander kollidieren[15]).

Beweise. (5.1.2): Nach (1.3.6) und (1.3.8) ist $f\,a' = f\,a''$ gleichbedeutend mit $f^= a' = f^= a''$. Daher existieren g und g^-, und nach (2.1.3), (2.3.1) und (2.4.1) ergibt sich sofort die Zulässigkeit von $g^\sim$. (5.1.3): $f\,a' = f\,a''$ ist gleichbedeutend mit $(\varkappa^\mathfrak{o} \circ f)\,a' = (f\,a')\,\varkappa = (f\,a'')\,\varkappa = (\varkappa^\mathfrak{o} \circ f)\,a''$ für alle $\varkappa$. (5.1.4): $a'(\bigcap_\varkappa F_\varkappa)\,a$ ist gleichbedeutend mit $a'\,F_\varkappa\,a$ für alle $\varkappa$, d.h. f und f^- existieren, und wie bei $g^\sim$ in (5.1.2) folgt die Zulässigkeit von $f^\sim$. Schließlich ist $(F_\varkappa a|\varkappa) = (F_\varkappa a_\varkappa|\varkappa)$ wegen (1.3.8) gleichbedeutend mit $a \in \bigcap_\varkappa F_\varkappa a_\varkappa$.

Selbstverständlich identifiziert man A/I mit A durch

$$I\,a = a. \tag{5.1.5}$$

Und für $\bigcap_\varkappa F_\varkappa = I$ wollen wir A auch noch vermöge des Isomorphismus $f = ((F_\varkappa a|\varkappa)|a)$ mit $f^\sim A$ identifizieren, also in $X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ *kanonisch einbetten*, so daß

$$a = (F_\varkappa a|\varkappa) \quad \text{für} \quad \bigcap_\varkappa F_\varkappa = I. \tag{5.1.6}$$

Es gilt dann:

(5.1.7) *Ist A kanonisch in $X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ eingebettet und stimmt die partielle Abbildung $\omega_{\iota' \in I'} a_{\iota'}$ eines $\omega \in \Omega$ auf A mit $\omega' \in \Omega$ überein, dann auch auf X*[16]).

Beweis. Setzt man $a_{\iota'} = a_{\varkappa,\iota'}$ für alle $\varkappa$, dann ergibt sich wegen (2.1.3), (2.4.6) und (5.1.6) $\omega'_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''}|\varkappa) = ((\omega_{\iota'}(F_\varkappa a_\iota))_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''})|\varkappa) = (\omega_{\iota \in I_\omega}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota})|\varkappa)$ $= \omega_\iota(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota}|\varkappa) = (\omega_{\iota'}(F_\varkappa a_{\iota'}|\varkappa))_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''}|\varkappa) = (\omega_{\iota'} a_{\iota'})_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''}|\varkappa)$.

Im folgenden dürfen wir uns also wegen (5.1.2) und (5.1.3) auf Zerlegungen von A in Quotienten $A_\varkappa = A/F_\varkappa$ mit $I = \bigcap_\varkappa F_\varkappa$ beschränken und werden stets A kanonisch in $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ einbetten.

5.2. Die Vervollständigung einer Algebra. Einen gewissen, wenn auch groben Einblick in die Struktur einer Algebra A gewährt schon ein durchsichtig strukturierter Quotient derselben: man gewinnt Aussagen über das Verhalten gewisser Klassen von Elementen gegenüber den die algebraische Struktur definierenden Operationen. Einen tieferen Einblick in die Struktur von A erhält man, wenn es gelingt, A echt in durchsichtig strukturierte Algebren $A_\varkappa = A/F_\varkappa$ zu zerlegen, denn überblickt man die Strukturen der $A_\varkappa$, dann übersieht man auf Grund der einfachen Bildung der Produktstruktur in $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ in etwa auch diese.

Eine unechte Zerlegung schließlich ist nach (5.1.4) wesentlich leichter erreichbar als eine echte, auch vergröbert sie die Struktur nicht wie eine Quotientenbildung, sondern bettet sie unverändert in eine übersichtlich strukturierte Algebra ein. Aber diese Einbettung als Subprodukt in ein Produkt

[15]) Hiernach entspricht also jeder Zerlegung f von A in $A_\varkappa$ eine Darstellung von $f^= = I_A$ als Durchschnitt von Kongruenzen $F_\varkappa \subseteq A^2$, wobei die $A_\varkappa$ zu den $A/F_\varkappa$ isomorph sind, und umgekehrt liefert jede Darstellung von I_A als Durchschnitt von Kongruenzen $F_\varkappa$ eine Zerlegung von A in die $A/F_\varkappa$.

[16]) Grob gesprochen ist also die auf X definierte partielle Abbildung gerade die operatorgemäße Fortsetzung der auf A definierten.

ist im allgemeinen recht locker, d.h. ein Produkt bietet Raum für recht unterschiedlich strukturierte Subprodukte (vgl. etwa KRULL [2]).

Hiernach liegt es nahe, die Algebra A in eine ihr enger als X anliegende Algebra A^* einzubetten, und zwar wird man als A^* eine A umfassende Unteralgebra von X wählen. Es liegt auf der Hand, als Elemente von A^* solche Funktionen $x \in X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ zu wählen, die auf gewissen Teilmengen $\Lambda \in \mathfrak{L}$ von K mit Funktionen aus dem in X kanonisch eingebetteten A übereinstimmen, für die also nach (4.1.1) und (1.2.4) $x \in \cap_\Lambda (\Lambda^* A)$ gilt. Wir definieren also

$$A^* = \cap_{\Lambda \in \mathfrak{L}} (\Lambda^* A), \tag{5.2.1}$$

und dies ist in der Tat für jede beliebige Menge $\mathfrak{L}$ von Teilmengen $\Lambda \subseteq K$ eine Unteralgebra von X[17]: Denn $x_\iota \in A^*$ bedeutet die Existenz von $a_{\iota,\Lambda} \in A$ mit $x_\iota \lambda = a_{\iota,\Lambda} \lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, und daraus folgt nach (2.1.3) $(\omega_\iota x_\iota) \lambda = (\omega_\iota a_{\iota,\Lambda}) \lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, also $\omega_\iota x_\iota \in \Lambda^* (\omega_\iota a_{\iota,\Lambda}) \subseteq \Lambda^* A$, und zwar für beliebiges $\Lambda \in \mathfrak{L}$.

Das natürlichste ist es, für $\mathfrak{L}$ die Menge der endlichen Teilmengen Λ von K zu wählen, aber wir werden im folgenden nur ihre Aufbaumengeneigenschaft benötigen. Jetzt ist aber A^* auf Grund von (5.2.1) nach 4.1 und (3.4.2) die Hülle $\overline{A}^{\mathfrak{L}^*}$ von A im $\mathfrak{L}$-Produkt X der $A/F_\varkappa$:

$$A^* = \overline{A}^{\mathfrak{L}^*}. \tag{5.2.2}$$

Und diese einfache topologische Kennzeichnung des algebraisch definierten A^* rechtfertigt nun die Berücksichtigung der algebraischen Topologie in X bei der Strukturanalyse von A. Wegen (4.2.2) nennen wir A^* die *vollständige Hülle von A bezüglich $\mathfrak{L}$ und $(F_\varkappa | \varkappa \in K)$.*

5.3. Die Nachbarschaften in A und A^*. Für die durch $\mathfrak{L}^*$ in A und A^* induzierten Nachbarschaften führen wir zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} F_\Lambda = \Lambda^* \cap A^2 & \text{mit} \quad \mathfrak{F} = \{F_\Lambda | \Lambda \in \mathfrak{L}\} \quad \text{und} \\ F_\Lambda^* = \Lambda^* \cap A^{*2} & \text{mit} \quad \mathfrak{F}^* = \{F_\Lambda^* | \Lambda \in \mathfrak{L}\}. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Nach (4.1.1), (5.1.6) und (1.3.8) ergibt sich dann

$$F_\Lambda = \cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda, \quad \text{so daß} \quad \mathfrak{F} = \cap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \{F_\varkappa\}. \tag{5.3.2}$$

Im Falle $\mathfrak{L} = \{\Lambda | \Lambda \text{ endlich} \subseteq K\}$ induziert also $\mathfrak{L}^*$ gemäß 3.3 in A gerade die in 4.1 unter b) genannte Kongruenzstruktur für $\mathfrak{E} = \{F_\varkappa | \varkappa\}$, und *damit ist in der Tat der zweite Weg in* 4.1 *auf den ersten zurückgeführt.*

Das Studium von $\mathfrak{F}^*$ erfordert einige Vorbereitungen, die auch bei den weiteren Untersuchungen immer wieder benötigt werden. Nach (4.1.1), (5.1.6) und (1.3.8) bedeutet $x \in \Lambda^* A$ die Existenz eines $a \in A$ mit $a \in \cap_{\lambda \in \Lambda} x \lambda$. Daher ergibt sich wegen (5.2.1) und 3.1

(5.3.3) $x \in A^*$, *genau wenn* $\cap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{x \varkappa\}$ *eine Filterbasis ist.*

[17]) Man könnte auch an $A^* = \cup_\Lambda \Lambda^* A$ denken, was sich übrigens trivial weniger eng an A anschmiegt, aber man überlegt sich leicht, daß dieses A^* im allgemeinen nur dann eine Algebra sein wird, wenn $\mathfrak{L}$ mit $\{A_\iota | \iota \in I_\omega\}$ stets ein $\Lambda \subseteq \cap_\iota A_\iota$ enthält.

$a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$ $(a^* \in A^*)$ impliziert wegen (1.3.8) $F_\lambda a = a^* \lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und damit wegen (5.3.2) $F_\Lambda a = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$. Da jedes $E \in \supseteq_A \mathfrak{F}$ ein $F_\Lambda \in \mathfrak{F}$ umfaßt, enthält $\supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$ eine und als Filter nach (1.3.8) auch nur eine E-Klasse $E\, a \supseteq F_\Lambda a$ für $a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$. Also gilt: Die *symbolischen Schnitte*

(5.3.4) $E \cap a^* = (A/E \cap \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\})^{\bullet}$ [18] *und* $\mathfrak{E} \cap a^* = \{E \cap a^* \mid E \in \mathfrak{E}\}$ *existieren für Elemente* $a^* \in A^*$ *und Kongruenzen* $E \in \supseteq_A \mathfrak{F}$. *Insbesondere wird* $F_\Lambda \cap a^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$ *und damit* $\mathfrak{F} \cap a^* = \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$, *so daß* $\mathfrak{F} \cap a^*$ *nach* (5.3.3) *und* (3.2.2) *eine* $\mathfrak{F}$*-Filterbasis ist.*

Darüber hinaus benötigen wir noch die folgenden Eigenschaften der symbolischen Schnitte:

(5.3.5) $\qquad E \cap a = E\, a \quad$ *und* $\quad F_\varkappa \cap a^* = a^* \varkappa$.

(5.3.6) $E' \subseteq E''$ *impliziert* $E' \cap a^* \subseteq E'' \cap a^*$ *und, wenn* $E' \cap a^{*\prime} = E' \cap a^{*\prime\prime}$ *gilt, auch* $E'' \cap a^{*\prime} = E'' \cap a^{*\prime\prime}$.

(5.3.7) *Für eine Menge* $\mathfrak{E}$ *von Kongruenzen über* A *(mit* $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \in \supseteq_A \mathfrak{F}$*) gilt* $(\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E) \cap a^* = \bigcap_{E \in \mathfrak{E}} (E \cap a^*)$.

(5.3.8) *Für Kongruenzen* $E \in \supseteq_A F$ *und* $\omega \in \Omega$ *gilt*

$$E \cap \omega_\iota a_\iota^* = \omega_\iota (E \cap a_\iota^*).$$

Beweise. (5.3.5): Wegen $E \cap a \in \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a \varkappa\}$ existiert ein $\Lambda \in \mathfrak{L}$ mit $E \cap a \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda a \ni a$ ((5.1.6)!), und trivial gilt $a^* \varkappa \in A/F_\varkappa \cap \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$. (5.3.6): Aus $a \in E' \cap a^*$ folgt $E' \cap a^* = E'\, a \subseteq E''\, a$, also $E''\, a \in \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$ und daher $E''\, a = E'' \cap a^*$. Insbesondere gilt $E'' \cap a^{*\prime} \supseteq E' \cap a^{*\prime} = E' \cap a^{*\prime\prime} \subseteq E'' \cap a^{*\prime\prime}$, also wegen (1.3.8) $E'' \cap a^{*\prime} = E'' \cap a^{*\prime\prime}$. (5.3.7): $(\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E) \cap a^* = \bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E\, a \subseteq E\, a$ impliziert $E\, a = E \cap a^*$. (5.3.8): Aus $F_\Lambda \subseteq E$ und $a_\iota \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a_\iota^* \lambda$ folgt wegen (5.3.5), (5.3.7), (5.3.2) und (5.3.6) $a_\iota \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \cap a_\iota^* \subseteq E \cap a_\iota^*$ und damit wegen (2.1.3) und (2.4.1) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\omega_\iota a_\iota^*) \lambda = \bigcap_\lambda \omega_\iota (a_\iota^* \lambda) = \bigcap_\lambda \omega_\iota (F_\lambda \cap a_\iota^*) = \bigcap_\lambda \omega_\iota (F_\lambda\, a_\iota) = F_\Lambda (\omega_\iota\, a_\iota) \subseteq E\, (\omega_\iota\, a_\iota) = \omega_\iota (E\, a_\iota) = \omega_\iota (E \cap a_\iota^*)$, so daß in der Tat $\omega_\iota (E \cap a_\iota^*) \in \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{(\omega_\iota\, a_\iota^*) \varkappa\}$ gilt.

Damit zeigen wir jetzt:

(5.3.9) $\qquad F_\Lambda^* = \{(a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}) \mid F_\Lambda \cap a^{*\prime} = F_\Lambda \cap a^{*\prime\prime}\}$.

(5.3.10) *Für* $E \in \supseteq_A \mathfrak{F}$ *ist* $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*}$ *eine Kongruenz über* A^* *und es gilt:*

$$\overline{E}^{\mathfrak{L}^*} = \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} = \{(a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}) \mid E \cap a^{*\prime} = E \cap a^{*\prime\prime}\},$$

so daß $F_\Lambda^* = \overline{F_\Lambda}^{\mathfrak{F}^*}$ *und* $\overline{E}^{\mathfrak{F}^*} \cap A^2 = E$

(5.3.11) $\qquad \bigcap_{E \in \mathfrak{E}} \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} = \overline{(\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E)}^{\mathfrak{F}^*}$ *für* $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \in \supseteq_A \mathfrak{F}$.

(5.3.12) $\qquad \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} a^* \cap A = E \cap a^*, \quad \overline{(E \cap a^*)}^{\mathfrak{F}^*} = \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} a^*$.

Beweise. (5.3.9): $a^{*\prime\prime} F_\Lambda^* a^{*\prime}$ bedeutet wegen (5.3.1) $a^{*\prime} \lambda = a^{*\prime\prime} \lambda$, d.h. also nach (5.3.5) $F_\lambda \cap a^{*\prime} = F_\lambda \cap a^{*\prime\prime}$, für alle $\lambda \in \Lambda$, und dies ist wegen (5.3.7), (5.3.2) und (5.3.6) gleichbedeutend mit $F_\Lambda \cap a^{*\prime} = F_\Lambda \cap a^{*\prime\prime}$.

[18] Die durch (5.3.5) nahegelegte Bezeichnung $E \cap a^* = E\, a^*$ ist nicht statthaft, weil gemäß (1.2.4) und (1.2.6) $E\, a^*$ für ein $a^* \notin A$ leer wird. Die Bezeichnung $E \cap a^* = a^* E$, die ebenfalls durch (5.3.5) nahegelegt wird, führt unter Umständen zu Verwechslungen, wenn K Kongruenzen $\varkappa$ aus $\supseteq_A \mathfrak{F}$ enthält: Es muß dann nämlich zwischen der $\varkappa$-Klasse $\varkappa \cap a^*$ und der $F_\varkappa$-Klasse $a^* \varkappa$ unterschieden werden.

(5.3.10): Mit (5.2.2) gilt trivial $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*} \leqq \overline{(A^2)}^{\mathfrak{L}^*} = (\overline{A}^{\mathfrak{L}^*})^2 = A^{*2}$ und nach (3.4.3) $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*} = \bigcap_{\Lambda \in \mathfrak{L}} (\Lambda^* \circ E \circ \Lambda^*) \supseteq \bigcap_{\Lambda \in \mathfrak{L}} (F_\Lambda^* \circ E \circ F_\Lambda^*) = \overline{E}^{\mathfrak{F}^*}$ wegen (5.3.1) und der Isotonie der Komposition. $a \in \Lambda^* a^*$ ist wegen (5.3.1) gleichbedeutend mit $a \in \Lambda^* a^* \cap A^* = F_\Lambda^* a^*$. $a^{*\prime\prime} (\Lambda^* \circ E \circ \Lambda^*) a^{*\prime}$ bedeutet ersichtlich ((1.3.8)!) die Existenz eines $E a$, das sowohl $\Lambda^* a^{*\prime}$ als auch $\Lambda^* a^{*\prime\prime}$ schneidet, und damit nach dem eben festgestellten $a^{*\prime\prime} (F_\Lambda^* \circ E \circ F_\Lambda^*) a^{*\prime}$. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit der Existenz eines $E a_\Lambda$, das $F_\Lambda \cap a^{*\prime}$ und $F_\Lambda \cap a^{*\prime\prime}$ trifft, denn $a \in F_\Lambda^* a^*$ bedeutet wegen (5.3.9), (5.3.5) und (1.3.8) $a \in F_\Lambda \cap a^*$. Gilt nun $E \cap a^{*\prime} = E \cap a^{*\prime\prime} = E a$, dann schneidet diese E-Klasse als gemeinsames Element der Filter ((5.3.4)!) $\geqq_A (\mathfrak{F} \cap a^{*\prime})$ und $\geqq_A (\mathfrak{F} \cap a^{*\prime\prime})$ alle anderen Elemente derselben, also gilt $a^{*\prime\prime} \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} a^{*\prime}$. Umgekehrt folgt für ein $F_\Lambda \leqq E$ aus der Existenz eines $E a_\Lambda$, das $F_\Lambda \cap a^{*\prime}$ und $F_\Lambda \cap a^{*\prime\prime}$ trifft, wegen (1.3.8) sofort $F_\Lambda \cap a^{*\prime} \leqq E a_\Lambda \supseteq F_\Lambda \cap a^{*\prime\prime}$, also $E \cap a^{*\prime} = E a_\Lambda = E \cap a^{*\prime\prime}$. Die Äquivalenzeigenschaft von $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*}$ ist jetzt trivial und die Zulässigkeit folgt aus (5.3.8) [oder aus (3.4.3) wegen (2.2.1) und (2.1.2)].

(5.3.11): Nach (5.3.7) und (5.3.6) ist $E \cap a^{*\prime} = E \cap a^{*\prime\prime}$ für alle $E \in \mathfrak{E}$ gleichbedeutend mit $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \cap a^{*\prime} = \bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \cap a^{*\prime\prime}$.

(5.3.12): $a \in \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} a^*$ bedeutet nach (5.3.10), (5.3.5) und (1.3.8) $a \in E \cap a^*$. $a^{*\prime} \in \overline{(E \cap a^*)}^{\mathfrak{F}^*}$ bedeutet $F_\Lambda^* a^{*\prime} \cap (E \cap a^*) \neq \varnothing$ für alle Λ oder wegen $E \cap a^* \leqq A$ und (5.3.10) nach dem schon bewiesenen Teil von (5.3.12) $(F_\Lambda \cap a^{*\prime}) \cap (E \cap a^*) \neq \varnothing$ für alle $\Lambda \in \mathfrak{L}$. $a^{*\prime} \in \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} a^*$ bedeutet nach (5.3.10) $E \cap a^{*\prime} = E \cap a^*$. Hieraus folgt wegen der Filtereigenschaft von $\geqq_A (\mathfrak{F} \cap a^{*\prime})$ ((5.3.4)!), daß $E \cap a^*$ alle $F_\Lambda \cap a^{*\prime}$ trifft, und umgekehrt folgt hieraus wieder mit (1.3.8) für ein $F_\Lambda \leqq E$: $F_\Lambda \cap a^{*\prime} \leqq E \cap a^*$ und damit $E \cap a^* = E \cap a^{*\prime}$.

5.4. Die Reduktion auf $\mathfrak{T}$-Hüllen. Die Bestimmungsstücke eines gemäß 5.2 gebildeten $A^* \leqq X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ sind zunächst die $F_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ und $\mathfrak{L}$. Es ist aber A^* schon durch $\geqq_{A^*} \mathfrak{F} = \geqq_{A^*} \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \{F_\varkappa\}$ ((5.3.2)!) bis auf Simultanisomorphie im Sinne von 3.2 eindeutig bestimmt[19]. Dies folgt, wie wir sehen werden, sofort aus dem Satz:

(5.4.1) *$\mathfrak{S}$ sei eine separable Kongruenzbasis über der bezüglich $\mathfrak{S}$ vollständigen Algebra B. A sei eine in B bezüglich der $\mathfrak{S}$-Topologie dicht (dense) liegende Unteralgebra von B. Zugleich sei A bezüglich der Kongruenzen $F_\varkappa$ über A mit $\varkappa \in K$ kanonisch in das $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_{\varkappa \in K} A/F_\varkappa$ eingebettet und A^* die Hülle $\overline{A}^{\mathfrak{L}^*}$ in X von A bezüglich der $\mathfrak{L}$-Topologie. Induzieren jetzt $\mathfrak{L}^*$ und $\mathfrak{S}$ die gleiche Kongruenzstruktur in A, d.h. gilt*

$$\geqq_{A^*} \{\Lambda^* \cap A^2 \mid \Lambda \in \mathfrak{L}\} = \geqq_{A^*} \{S \cap A^2 \mid S \in \mathfrak{S}\},$$

dann ist

$$f = \left(\left((A/F_\varkappa \cap \geqq_A \{S\, b \cap A \mid S \in \mathfrak{S}\})^\bullet \mid \varkappa \in K \right) \mid b \in B \right)$$

ein A elementeweise festlassender Simultanisomorphismus von B auf A^* mit der Umkehrung

$$g = \left(\{b \mid \mathfrak{S}\, b \leqq \geqq_B \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \{a^* \varkappa\}\}^\bullet \mid a^* \in A^* \right).$$

[19] Aus (4.2.2) und Bourbaki [1], Kap. II, § 3, Théorèm 2 folgt lediglich die Eindeutigkeit bezüglich der gleichmäßigen Struktur.

Beweis. α) Da $\bar{A}^{\mathfrak{S}} = B$, also stets $S\,b \cap A \neq \varnothing$ gilt, ist mit $\mathfrak{S}\,b$ auch $\{S\,b \cap A \mid S\}$ eine Filterbasis, und zwar wegen $(S\,b \cap A) \times (S\,b \cap A) \leqq S \cap A^2$ (Beweis von (3.2.2)!) und der Voraussetzung sogar eine $\mathfrak{F}$-Filterbasis ((5.3.1)!). Nach (3.2.2) enthält $\geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\}$ dann zu jedem $\Lambda \in \mathfrak{L}$ eine F_Λ-Klasse und wegen (5.3.2) also erst recht zu jedem $\varkappa \in K$ eine $F_\varkappa$-Klasse. Mithin existieren in der Tat die $(f\,b)\,\varkappa$, und zwar folgt aus $F_\Lambda\,a \in \geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\}$ sofort $F_\lambda\,a = (f\,b)\,\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, so daß $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (f\,b)\,\lambda = F_\Lambda\,a$, also

$$(\alpha.\alpha) \qquad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (f\,b)\,\lambda = (A/F_\Lambda \cap \geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\})^\bullet \quad \text{für alle} \quad \Lambda \in \mathfrak{L}$$

Insbesondere enthält daher $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} \{(f\,b)\,\varkappa\}$ nicht die leere Menge, ist also eine Filterbasis (3.1!), und nach (5.3.3) gilt $f\,b \in A^*$.

β) Nach (5.3.4) ist $\mathfrak{F} \cap a^*$ eine $\mathfrak{F}$-Filterbasis und zufolge der Voraussetzung ist dann wegen (5.3.1) $\geqq_B (\mathfrak{F} \cap a^*)$ ein $\mathfrak{S}$-Filter. Wegen der Separabilität und der Vollständigkeit von B konvergiert dieser gegen genau ein $b \in B$: $\mathfrak{S}\,b \leqq \geqq_B (\mathfrak{F} \cap a^*)$, so daß wegen (5.3.4) in der Tat $g\,a^* \in B$ existiert.

γ) Aus der Definition von g folgt mit (5.3.4) und $(\alpha.\alpha)$

$$\mathfrak{S}\,(g\,(f\,b)) \leqq \geqq_B (\mathfrak{F} \cap f\,b) \leqq \geqq_B \{S\,b \cap A \mid S\} \geqq \mathfrak{S}\,b, \quad \text{also} \quad g\,(f\,b) = b,$$

denn ein Filter im separablen B kann nicht gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren. Mit (5.3.4) folgt aus $(\alpha.\alpha)$ und der Definition von g

$$(\gamma.\alpha) \qquad \mathfrak{F} \cap f\,(g\,a^*) \leqq \geqq_A \{S\,(g\,a^*) \cap A \mid S\} \leqq \geqq_A \{\mathfrak{F} \cap a^*\},$$

wegen (1.3.8) also $F_\Lambda \cap f\,(g\,a^*) = F_\Lambda \cap a^*$ für alle Λ und damit wegen (5.3.2), (5.3.6) und (5.3.5) schließlich $(f\,(g\,a^*))\,\varkappa = a^*\,\varkappa$ für alle $\varkappa$, d.h. $f\,(g\,a^*) = a^*$. Nach $(\alpha.\alpha)$ gilt $(f\,a)\,\varkappa \in \geqq_A \{S\,a \cap A \mid S\}$ für alle $\varkappa$, also $a \in (f\,a)\,\varkappa$. Wegen (5.1.6) heißt das aber $f\,a = (F_\varkappa\,a \mid \varkappa) = a$, und dies zusammen mit den eben bewiesenen Gleichungen $g\,(f\,b) = b$ und $f\,(g\,a^*) = a^*$, daß f in der Tat eine A elementeweise fest lassende umkehrbare Abbildung von B auf A^* mit der Umkehrung g ist.

δ) Für $g\,a^* = b$ folgt aus $(\gamma.\alpha)$ und $f\,(g\,a^*) = a^*$

$$(\delta.\alpha) \qquad \geqq_A (\mathfrak{F} \cap f\,b) = \geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\}.$$

Wegen der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{S}$ existiert nach $(\delta.\alpha)$ zu jedem F_Λ ein S mit $(F_\Lambda \cap f\,b') \cap (F_\Lambda \cap f\,b'') \geqq S\,b' \cap A \cap S\,b''$, so daß aus $b''\ S\ b'$ wegen (1.3.8) und (5.3.9) $(f\,b'')\,F_\Lambda^*\,(f\,b')$ folgt. Umgekehrt existiert wegen (5.3.6) und der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{F}$ nach $(\delta.\alpha)$ zu jedem S ein F_Λ mit $S\,b' \cap A \cap S\,b'' \geqq (F_\Lambda \cap f\,b') \cap (F_\Lambda \cap f\,b'')$, so daß aus $(f\,b'')\,F_\Lambda^*\,(f\,b')$ wegen (5.3.9) und (1.3.8) $b''\ S\ b'$ folgt. Mithin sind f und $g = f^-$ gleichmäßig stetig, d.h. f ist ein Isomorphismus bezüglich der gleichmäßigen Strukturen in A^* und B (BOURBAKI [1], Chap. II, § 2, Prop. 4).

ε) Es bleibt nur noch die Homorphieeigenschaft von f zu zeigen. Da jedes $\varkappa$ in einem Λ enthalten ist, existiert wegen (5.3.2) und der Voraussetzung zu $\varkappa$ ein S mit $F_\varkappa \geqq S \cap A^2$ und, weil A dicht in B liegt, zu jedem $b_\iota \in B$ ein $a_\iota \in A$ mit $a_\iota\ S\ b_\iota$. Daher gilt $F_\varkappa\,a_\iota \geqq S\,a_\iota \cap A = S\,b_\iota \cap A$ ((1.3.8)!), und das bedeutet nach Definition von f: $F_\varkappa\,a_\iota = (f\,b_\iota)\,\varkappa$. Damit wird nach (2.1.3)

und (2.4.1) $(\omega_\iota(f\,b_\iota))\,\varkappa = \omega_\iota((f\,b_\iota)\,\varkappa) = \omega_\iota(F_\varkappa\,a_\iota) = F_\varkappa(\omega_\iota\,a_\iota) \supseteq (S \cap A^2)\,(\omega_\iota\,a_\iota) = S(\omega_\iota\,a_\iota) \cap A = \omega_\iota(S\,a_\iota) \cap A = \omega_\iota(S\,b_\iota) \cap A = S(\omega_\iota\,b_\iota) \cap A$, also wieder nach der Definition von f: $(\omega_\iota(f\,b_\iota))\,\varkappa = (f(\omega_\iota\,b_\iota))\,\varkappa$ für alle $\varkappa$, so daß in der Tat $\omega_\iota(f\,b_\iota) = f(\omega_\iota\,b_\iota)$.

Ist nun $A^{*\prime} = \overline{A}^{\mathfrak{L}'^*}$ die Hülle von A im $\mathfrak{L}'$-Produkt $X' = \times_{\varkappa' \in K'} A/F'_{\varkappa'}$, während A^* die gleiche Bedeutung wie in (5.4.1) besitzt, und gilt

$$\geqq_{A^*}\{\Lambda^* \cap A^2 \mid \Lambda \in \mathfrak{L}\} = \geqq_{A^*}\{\Lambda'^* \cap A^2 \mid \Lambda' \in \mathfrak{L}'\}, \tag{5.4.2}$$

dann sind wie angekündigt A^* und $A^{*\prime}$ in der Tat simultanisomorph zueinander, denn die Voraussetzungen von (5.4.1) sind wegen (4.2.2) für $B = A^{*\prime}$ und $\mathfrak{S} = \{\Lambda'^* \cap A^{*\prime 2} \mid \Lambda'\}$ erfüllt. Man hat somit die Möglichkeit, eine im Hinblick auf den Zweck der Strukturanalyse getroffene Wahl von $(F_\varkappa \mid \varkappa)$ und $\mathfrak{L}$ noch im Hinblick etwa auf eine einfache rechnerische Beherrschung der Hülle von A in gewissen Grenzen zu verbessern. Insbesondere kann man stets von $(F_\varkappa \mid \varkappa \in K)$ und $\mathfrak{L}$ zu $(F_T \mid T \in \mathfrak{T})$ mit $F_T = T$ und

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{T} = \{\Lambda_\mathfrak{T} \mid \Lambda_\mathfrak{T} \quad \textit{endlich} \quad \leqq \mathfrak{T}\} \tag{5.4.3}$$

übergehen, wo $\mathfrak{T}$ eine den gleichen Filter wie $\mathfrak{F}$ erzeugende Kongruenzbasis über A ist, denn wegen der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{T}$ gilt dann trivial $\geqq_{A^*}\mathfrak{F} = \geqq_{A^*}\mathfrak{T} = \geqq_{A^*} \cap_{\mathfrak{L}_\mathfrak{T},\, T \in \mathfrak{T}} \{F_T\}$, und das ist wegen (5.3.1) und (5.3.2) gerade (5.4.2) für $K' = \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_\mathfrak{T}$.

Im folgenden können wir uns also bei der Vervollständigung einer Algebra A im Sinne von 5.2 auf den Fall

$$K = \mathfrak{T}, \quad F_T = T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_\mathfrak{T} \tag{5.4.4}$$

beschränken. Wir nennen die hiernach gebildete Hülle $A^* = \overline{A}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}} \leqq \times_{T \in \mathfrak{T}} A/T$ einer $\mathfrak{T}$-Algebra A deren $\mathfrak{T}$-*Hülle*. Setzt man hier noch

$$T^* = \overline{T}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}^* = \{\overline{T}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}}|_T \; T \in \mathfrak{T}\}, \tag{5.4.5}$$

was ersichtlich eine Filterbasis über A^* ist, dann ergibt sich

$$\geqq_{A^*}\mathfrak{F} = \geqq_{A^*}\mathfrak{T} \quad \textit{und} \quad \geqq_{A^*}\mathfrak{F}^* = \geqq_{A^*}\mathfrak{T}^* \quad \text{sowie:} \tag{5.4.6}$$

(5.4.7) *Es gilt $x \in A^*$, genau wenn $\{x\,T \mid T \in \mathfrak{T}\}$ eine Filterbasis ist.*

Beweise. (5.4.6): Wegen (5.3.2) und der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{T}$ gilt $\geqq_{A^*}\mathfrak{F} = \geqq_{A^*} \cap_{\mathfrak{L}_\mathfrak{T},\, T}\{T\} = \geqq_{A^*}\mathfrak{T}$, und daraus folgt wegen (5.3.10) und (5.4.5) sofort auch die zweite Behauptung, wenn man zu den Hüllen der $F_{\Lambda_\mathfrak{T}}$ und T bezüglich $\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}$ übergeht. (5.4.7): Die Bedingung folgt wegen (5.3.6) mit (5.4.4) und (5.3.5) sofort aus der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{T}$, und umgekehrt folgt aus der Bedingung trivial die Bedingung von (5.3.3).

Da nach (5.4.6) die durch $\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}$ in $\overline{A}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}}$ induzierte $\mathfrak{F}^*$-Topologie gleich der $\mathfrak{T}^*$-Topologie ist, können wir die $\mathfrak{T}$-Hülle von A auch durch $\overline{A}^{\mathfrak{T}^*}$ ausreichend bezeichnen. Ebenso wird wegen (5.3.10) $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}} = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$. *Die bequemen Bezeichnungen $A^* = \overline{A}^{\mathfrak{T}^*}$ und $T^* = \overline{T}^{\mathfrak{T}^*}$ für $T \in \mathfrak{T}$ darf man nur verwenden, wenn nicht zugleich mit der $\mathfrak{T}$-Hülle auch eine $\mathfrak{S}$-Hülle betrachtet wird.* (Man beachte, daß $T \in \mathfrak{S}$ gelten kann!) Weiter sind wegen (5.4.6) und (5.4.7) bei den $\mathfrak{T}$-Hüllen

die $\mathfrak{L}$-Schnittbildungen von (5.3.2) und (5.3.3) überflüssig, so daß bei ihnen überhaupt keine Aufbaumengen in Erscheinung treten. Schließlich ergibt sich bei $\mathfrak{T}$-Hüllen auch noch eine bezeichnungstechnische Vereinfachung (vgl. Anm. 18!): Für Kongruenzen $E \in \gtrsim_A \mathfrak{T}$ und aus solchen bestehenden Mengen $\mathfrak{E}$ kann

(5.4.8) $\qquad E \cap a^* = a^* E \quad$ *und* $\quad \mathfrak{E} \cap a^* = \{a^* E \mid E \in \mathfrak{E}\} = a^* \mathfrak{E}$

geschrieben werden, denn für $E = T \in \mathfrak{T}$ steht diese Definition wegen (5.4.4) nicht im Widerspruch zu (5.3.5): $F_T \cap a^* = a^* T$.

Die Gln. (5.4.3) *bis* (5.4.8) *sind im folgenden bei Verweisen auf* 5.3 *stets zu berücksichtigen.*

Wir schließen mit der jetzt trivialen Bemerkung, *daß es zu jeder separablen $\mathfrak{T}$-Algebra A im wesentlichen nur eine separable vollständige Hülle B und auch nur eine Fortsetzung von Ω bezüglich A auf B gibt:*

(5.4.9) *Jede separable vollständige $\mathfrak{S}$-Algebra B, in der A dicht liegt und die in A die $\mathfrak{T}$-Struktur induziert* ($\subseteq_A \mathfrak{T} = \gtrsim_A \{S \cap A^2 \mid S \in \mathfrak{S}\}$!), *ist nach* (5.4.1) *und* (5.3.1) *simultanisomorph zur $\mathfrak{T}$-Hülle von A* ((5.4.6)!).

§ 6. Zur Theorie der $\mathfrak{T}$-Hüllen.

6.1. Ergänzungen zu 5.1. Für die weiteren Untersuchungen der topologischen Algebra bedürfen die Sätze, die in 5.1 den Ausgangspunkt bildeten, einer topologischen Ergänzung.

(6.1.1) *Ist f ein $\mathfrak{T}$ Homomorphismus der $\mathfrak{T}$-Algebra A, dann ist $g = (f a \mid f^= a)$ ein Simultanisomorphismus der $\mathfrak{T}/f^=$-Algebra $A/f^=$ auf die $f^{\subseteq} \in \mathfrak{T}$-Algebra $f^\sim A$.*

(6.1.2) *Sind in* (5.1.4) *die $F_\varkappa$ samt $F = \bigcap_\varkappa F_\varkappa$ mit einer Kongruenzbasis $\mathfrak{T}$ über A vertauschbar, dann ist das f gleichmäßig stetig, wenn die $A/F_\varkappa$ und A/F beziehentlich mit den $\mathfrak{T}/F_\varkappa$- und $\mathfrak{T}/F$-Topologien versehen werden und in $X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ irgendein $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}/F_\varkappa$-Topologien eingeführt wird.*

Beweise. (6.1.1): Nach (5.1.2) genügt es zu bemerken, daß wegen (2.4.3) und (2.3.3) $g^\sim (T/f^=) = \{(f a', f a'') \mid a''(f^= \circ T \circ f^=) a'\} = f^\sim \circ f^{\sim -} \circ f^\sim \circ T \circ f^{\sim -} \circ f^\sim \circ f^{\sim -} = f^\sim \circ T \circ f^{\sim -} = f^\sim T$ wird. (6.1.2): Bedeutet $(T/F_\varkappa)^\ni$ das Urbild von $T/F_\varkappa$ bei der $\varkappa$-Projektion von X auf $A/F_\varkappa$, dann ergibt sich für jedes $\Lambda \in \mathfrak{L}$ und $T \in \mathfrak{T}$ nach (2.4.3) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T/F_\lambda)^\ni \cap (f^\sim (A/F))^2 = \{((F_\varkappa a' \mid \varkappa), (F_\varkappa a'' \mid \varkappa)) \mid a'' (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (F_\lambda \circ T \circ F_\lambda)) a'\} \supseteq \{\cdots \mid a''(F \circ T \circ F) a'\} = \{\cdots \mid (F a'')\ (T/F)\ (F a')\} = f^\sim (T/F)$.

Im Beweise von (6.1.2) würde $=$ an Stelle von $\supseteq$ (Vertauschbarkeit!) $\bigcap_\lambda (F_\lambda \circ T) \subseteq (\bigcap_\varkappa F_\varkappa) \circ T$ bedeuten, und dies braucht auch dann nicht zu gelten, wenn $\Lambda = K$ und, wie hier, T mit allen $F_\varkappa$ und F vertauschbar ist[20]). Man kann also keineswegs erwarten, daß auch f^- gleichmäßig stetig wird.

6.2. Die Vertauschungssätze. Nach § 1 gibt es neben der Auswahl von Teilmengen zwei fundamentale Operationen zur Definition von Mengen, nämlich die Bildung von Mengenprodukten und Mengenquotienten. Dementsprechend untersucht man, sobald strukturierte Mengen betrachtet werden, sofort die Möglichkeiten, die Strukturen auf Teil-, Produkt- und Quotient-

[20]) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $K = \{1, 2\}$, $A/F_1 = \{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}\}$, $A/F_2 = \{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$, $A/T = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$.

mengen zu übertragen, wie dies hier in § 2 für die Algebren und in § 3 für die kongruenztopologischen Räume geschehen ist. Aus den sich so ergebenden Fundamentaloperationen, aus vorgegebenen strukturierten Mengen neue zu bilden, lassen sich nun häufig weitere Operationen dieser Art ableiten, wie z. B. in § 5 die Bildung der $\mathfrak{T}$-Hülle einer $\mathfrak{T}$-Algebra. Mit dem Auftreten solcher neuen Operationen ergibt sich aber sofort die Frage, wie weit diese mit den fundamentalen Operationen vertauschbar sind.

(6.2.1) *A sei eine Unteralgebra der separablen $\mathfrak{S}$-Algebra B und $\mathfrak{T} = \{S \cap A^2 | S \in \mathfrak{S}\}$. Dann ist $\bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ simultanisomorph zu $\bar{A}^{\mathfrak{S}^\bullet} \leqq \bar{B}^{\mathfrak{S}^\bullet}$* [21]).

Beweis. Die Hülle $\bar{A}^{\mathfrak{S}^\bullet}$ von A in $\bar{B}^{\mathfrak{S}^\bullet}$ ist nach (3.4.1) eine Unteralgebra von $\bar{B}^{\mathfrak{S}^\bullet} \leqq \times_{S \in \mathfrak{S}} B/S$, also separabel und nach (4.2.2) auch vollständig, mithin nach (5.4.9) zu $\bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ simultanisomorph, denn nach Voraussetzung erzeugt $\mathfrak{T}$ trivial den gleichen Filter über A, wie die durch $\{S \cap (\bar{A}^{\mathfrak{S}^\bullet})^2 | S \in \mathfrak{S}\}$ über A induzierte Kongruenzbasis.

(6.2.2) *Für beliebige Aufbaumengen $\mathfrak{L}$ von K ist das $\mathfrak{L}$-Produkt der vollständigen Hüllen der separablen $\mathfrak{T}_\varkappa$-Ω-Mengen $A_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ simultanisomorph zur vollständigen Hülle des $\mathfrak{L}$-Produktes der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Algebren $A_\varkappa$.*

Beweis. Es bedeute $\varkappa^x$ bzw. $\varkappa^{x^\bullet}$ die $\varkappa$-Projektion von $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ bzw. von $B = \times_\varkappa \bar{A}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^\bullet}$ auf $A_\varkappa$ bzw. auf $A_\varkappa^* = \bar{A}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^\bullet}$, und es werde $T_\varkappa^\ni = \varkappa^{x\ni} T_\varkappa$ mit $\mathfrak{T}_\varkappa^\ni = \{T_\varkappa^\ni | T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa\}$ und $T_\varkappa^{*\ni} = \varkappa^{x^\bullet \ni} T_\varkappa^*$ mit $\mathfrak{T}_\varkappa^{*\ni} = \{T_\varkappa^{*\ni} | T_\varkappa^* \in \mathfrak{T}_\varkappa^*\}$ gesetzt. Wegen ((5.3.10)!) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^{*\ni} \cap X^2 = \bigcap_\lambda \{(x', x'') | (x' \lambda, x'' \lambda) \in T_\lambda^* \cap A_\lambda^2 = T_\lambda\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^\ni$ induziert (3.3!) das in B gebildete $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}_\varkappa^*$-Strukturen der $A_\varkappa^*$ in X das $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Strukturen der $A_\varkappa$, und wegen $\times_\varkappa T_\varkappa^* (b\varkappa) \cap X = \times_\varkappa (T_\varkappa^* (b\varkappa) \cap A_\varkappa) \neq \varnothing$ für alle $b \in B$ liegt ((3.3.1)!) X dicht in B, das nach (4.2.3) vollständig ist. Damit folgt die Behauptung aus (5.4.9).

Wesentlich schwieriger liegen die Verhältnisse bei der Quotientenbildung, und wir müssen uns sogar mit einer abgeschwächten Vertauschbarkeit zufrieden geben.

Für eine mit $\mathfrak{T}$ vertauschbare, abgeschlossene Kongruenz E über einer separablen $\mathfrak{T}$-Algebra A gilt:

(6.2.3) $f = \left((a^*(T/E) | T/E \in \mathfrak{T}/E) | a^* \in \bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}\right)$ *mit* $a^*(T/E) = \left((A/E)/(T/E) \cap \geqq_{A/E} (E\,a | a)^{\in \in} (a^* \mathfrak{T})\right)^\bullet$ *ist ein gleichmäßig stetiger Homomorphismus von $A^* = \bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ in $(A/E)^* = \overline{(A/E)}^{(\mathfrak{T}/E)^\bullet}$ mit der Kongruenz $f^- = \bar{E}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ und mit $f\,a = E\,a$ für $a \in A$.*

(6.2.4) *$f \sim A^* = (A/E)^*$ ist gleichbedeutend damit, daß zu jeder Filterbasis in A der Gestalt $\{(T \circ E)\,a_T | T \in \mathfrak{T}\}$ Elemente $a'_T \in (T \circ E)\,a_T$ existieren, derart, daß auch $\{T\,a'_T | T \in \mathfrak{T}\}$ eine Filterbasis über A wird.*

(6.2.5) *Ist $\bar{E}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ mit $\mathfrak{T}^*$ vertauschbar, dann ist $g = (f\,a^* | \bar{E}^{\mathfrak{T}^\bullet}\,a^*)$ ein gleichmäßig stetiger Isomorphismus von $\bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}/\bar{E}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ in $\overline{(A/E)}^{(\mathfrak{T}/E)^\bullet}$.*

Beweise. (6.2.3): α) $\mathfrak{T}/E$ ist nach 3.3 eine Kongruenzbasis über A/E und überdies separabel, denn wegen der Vertauschbarkeit und der Abgeschlossenheit von E ergibt sich mit (3.4.3) $\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (E \circ T \circ E) = \bigcap_T (T \circ E \circ T) = \bar{E}^{\mathfrak{T}} = E$, so daß $(E\,a'')\,(\bigcap_T T/E)\,(E\,a')$ wegen (2.4.3) und (1.3.8) in der Tat

[21]) Statt $A \leqq B$ auszuwählen und dann zu $\bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ zu vervollständigen, kann man also auch erst die $\mathfrak{S}$-Hülle von B bilden und dann $\bar{A}^{\mathfrak{S}^\bullet}$ herausgreifen.

$E\,a' = E\,a''$ impliziert. Da $a^*\,\mathfrak{T}$ nach (5.4.8), (5.4.7) und (3.2.2) eine $\mathfrak{T}$-Filterbasis in A ist, also ((3.3.4)!) durch $(E\,a|\,a)$ auf eine $\mathfrak{T}/E$-Filterbasis in A/E abgebilde wird, existieren die $a^*(T/E)$, und wegen (3.2.3) und der Definition von f ist $\{(f\,a^*)\,(T/E)|\,T/E\}$ eine Filterbasis in A/E, und das bedeutet nach (5.4.7) $f\,a^* \in (A/E)^*$.

β) Für den weiteren Beweis benötigen wir zwei Formeln. Nach (3.3.4) gilt $(E\,a|\,a)^\sim (T\,a) = (T/E)\,(E\,a)$ und daher nach Definition von f

($\beta.\alpha$) $(E\,a|\,a)^\sim (a^*\,T) = (T/E)\,(E\,a_T) = (f\,a^*)\,(T/E)$ für alle $a_T \in a^*\,T$.

Hiernach bedeutet $(f\,a^{*\prime\prime})\,(T/E)^*\,(f\,a^{*\prime})$ wegen (5.3.10) und (2.4.3) $a''_T\,(E \circ T \circ E)\,a'_T$ oder wegen der Vertauschbarkeit von E mit $\mathfrak{T}$: $a''_T\,(T \circ E \circ T)\,a'_T$ für ein $a'_T \in a^{*\prime}\,T$ und ein $a''_T \in a^{*\prime\prime}\,T$, und das ist wegen (1.3.8) und (5.3.5) ersichtlich gleichwertig mit der Existenz von Elementen a' und a'' aus A, für die $a^{*\prime\prime}\,T = a''\,T$, $a''\,E\,a'$ und $a'\,T = a^{*\prime}\,T$ gilt, also wegen (5.3.10) gleichwertig mit $a^{*\prime\prime}(T^* \circ E \circ T^*)\,a^{*\prime}$. Also gilt

($\beta.\beta$) $$f^{\sim -}\,(T/E)^* = T^* \circ E \circ T^*.$$

γ) $a_\iota \in a_\iota^*\,T$ für alle ι impliziert nach (2.4.5) und (5.3.8) $\omega_\iota\,a_\iota \in \omega_\iota\,(a_\iota^*\,T) = (\omega_\iota\,a_\iota^*)\,T$, so daß wegen (2.1.3), (2.4.1) und ($\beta.\alpha$) $\big(\omega_\iota(f\,a_\iota^*)\big)\,(T/E) = \omega_\iota\big((f\,a_\iota^*)\,(T/E)\big) = \omega_\iota\,\big((T/E)\,(E\,a_\iota)\big) = (T/E)\,\big(E(\omega_\iota\,a_\iota)\big) = \big(f(\omega_\iota\,a_\iota^*)\big)\,(T/E)$ und damit $\omega_\iota(f\,a_\iota^*) = f(\omega_\iota\,a_\iota^*)$. Wegen (5.3.5) oder (5.1.6) folgt aus ($\beta.\alpha$) $f\,a = \big((T/E)\,(E\,a)|\,T/E\big) = E\,a$. Mit (5.3.10) folgt aus ($\beta.\alpha$) die gleichmäßige Stetigkeit von f: $f^\sim T^* = \{(f\,a^{*\prime}, f\,a^{*\prime\prime})|\,a^{*\prime}\,T = a^{*\prime\prime}\,T\} \subseteq \{(f\,a^{*\prime}, f\,a^{*\prime\prime})|\,(f\,a^{*\prime})\,(T/E) = (f\,a^{*\prime\prime})\,(T/E)\} = (T/E)^* \cap (f^\sim A^*)^2$. Durchschnittsbildung über alle T liefert auf der linken Seite von ($\beta.\beta$) wegen der Separabilität ((4.1.1)!) von $(\mathfrak{T}/E)^*$ sofort $f^{\sim -} I_{(A/E)^*} = f^=$ und auf der rechten Seite wegen (3.4.3) $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$.

(6.2.4): Wegen (2.4.3) und der Vertauschbarkeit von E mit $\mathfrak{T}$ ergibt sich $(E\,a|\,a)^{\sim -}\,\big((T/E)\,(E\,a)\big) = \{a'|\,a'(T \circ E)\,a\} = (T \circ E)\,a$, so daß $\{(T \circ E)\,a_T|\,T\}$ als Urbild von $\{(T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\}$ bezüglich $(E\,a|\,a)$ wegen (5.4.7) genau dann eine Filterbasis in A ist, wenn $\big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big) \in (A/E)^*$ gilt. Aus dieser Bemerkung folgt mit Hilfe von ($\beta.\alpha$) im Beweise von (6.2.3) und der Definition von f die Behauptung: Ist $\big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big) \in (A/E)^*$, dann ist $\{(T \circ E)\,a_T|\,T\}$ eine Filterbasis in A, und wenn jetzt $a'_T \in (T \circ E)\,a_T$ für alle T existieren derart, daß $(T\,a'_T|\,T) \in A^*$ ((5.4.7)!), dann ergibt sich unter Beachtung von (1.3.8) und (2.4.3) sofort

(α) $$f(T\,a'_T|\,T) = \big((T/E)\,(E\,a'_T)|\,T/E\big) = \big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big).$$

Ist umgekehrt $\{(T \circ E)\,a_T|\,T\}$ eine Filterbasis in A, so daß $\big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big) \in (A/E)^*$ wird, und existiert jetzt ein $(T\,a'_T|\,T) \in A^*$, das (α) erfüllt, dann folgt nach (2.4.3) sofort $a'_T(T \circ E)\,a_T$ für alle $T \in \mathfrak{T}$.

(6.2.5): Wegen $f^= = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ folgt die Behauptung sofort aus (6.1.1), wenn beachtet wird, daß nach (6.2.3) die durch f in $f^\sim A^*$ induzierte Kongruenzstruktur (3.3!) zwar feiner (plus fin) ist, als die durch $(\mathfrak{T}/E)^*$ induzierte, dieser aber nicht notwendig gleich zu sein braucht, und daher zwar die gleichmäßige Stetigkeit von g bezüglich der zweiten Struktur erst recht besteht, die von g^- aber nicht mehr behauptet werden kann.

6.3. Die Hüllenzerlegung. Die Zerlegung f einer $\mathfrak{T}$-Algebra in Quotienten ist nach (6.1.2) topologisch mangelhaft: f^- braucht nicht gleichmäßig stetig zu sein. In (6.2.2) aber wird eine $\mathfrak{T}$-Hülle durch einen Simultanisomorphismus in $\mathfrak{T}_\varkappa$-Hüllen zerlegt. Diese Beobachtung legt es nahe, die Verhältnisse in (6.2.2) wie folgt abzuändern: Für alle $\varkappa \in K$ werde $A_\varkappa = A$ gesetzt, und an Stelle des Produktes $\times_\varkappa A_\varkappa = A^K$ mit der $\mathfrak{L}$-Produktstruktur der $\mathfrak{T}_\varkappa$ (die also durch $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} \mathfrak{T}_\varkappa^\ni$ definiert wird) soll A selbst betrachtet werden, und zwar mit der $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} \mathfrak{T}_\varkappa$-Struktur. Wir gelangen so zu den Sätzen (6.3.1) und (6.3.2), wenn wir noch sagen, die Kongruenzbasen $\mathfrak{T}_\lambda$ über A mit $\lambda \in \Lambda$ *kollidieren miteinander*, falls für jedes $(T_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \times_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{T}_\lambda$ die T_λ mit $\lambda \in \Lambda$ miteinander kollidieren (5.1!).

(6.3.1) *Ist $\mathfrak{L}$ eine Aufbaumenge von K und sind die $\mathfrak{T}_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ sowie $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ separable Kongruenzbasen über A, für die $\mathfrak{T} = \bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa \in K} \mathfrak{T}_\varkappa \leqq \geqq_A \mathfrak{S}$ gilt, dann ist*

$$f = \big((a^* T_\varkappa | T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa) | \varkappa \in K\big) | a^* \in \bar{A}^{\mathfrak{S}^\bullet}\big)$$

ein gleichmäßig stetiger Homomorphismus von $A^* = \bar{A}^{\mathfrak{S}^\bullet}$ in das $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_{\varkappa \in K} \bar{A}^{\mathfrak{T}_\varkappa^\bullet}$ der $\mathfrak{T}_\varkappa^*$-Algebren $A_\varkappa^* = \bar{A}^{\mathfrak{T}_\varkappa^\bullet}$ mit $f a = (a|_\varkappa \varkappa)$ für alle $a \in A$ und $f^- = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{T}^{\mathfrak{S}^\bullet}$.

Gilt sogar $\geqq_A \mathfrak{T} = \geqq_A \mathfrak{S}$, dann ist f ein Simultanisomorphismus.

(6.3.2) *Unter der Voraussetzung $\geqq_A \mathfrak{T} = \geqq_A \mathfrak{S}$ gilt $f^\sim \bar{A}^{\mathfrak{S}^\bullet} = \times_{\varkappa \in K} \bar{A}^{\mathfrak{T}_\varkappa^\bullet}$ genau dann, wenn für jedes $\Lambda \in \mathfrak{L}$ die $\mathfrak{T}_\lambda$ mit $\lambda \in \Lambda$ miteinander kollidieren.*

Beweise. (6.3.1): Da nach Voraussetzung jedes $T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa$ ein $S \in \mathfrak{S}$ enthält, ist $a^* \mathfrak{T}_\varkappa$ wegen (5.3.6) in $\geqq_A a^* \mathfrak{S}$ enthalten und damit nach (3.2.3) eine Filterbasis in A, so daß wegen (5.4.7) in der Tat $(f a^*) \varkappa \in A_\varkappa^*$ gilt. Nach Definition von f wird mit (5.3.5) und (5.1.6) $f a = \big((a T_\varkappa | T_\varkappa) | \varkappa\big) = (a|_\varkappa \varkappa)$, und wegen (2.1.3) und (5.3.8) ist $f^\sim$ zulässig. Schließlich folgt aus der Definition von f mit (5.3.10), wenn $\overline{T}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^\bullet, \ni}$ das Urbild von $\overline{T}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^\bullet}$ bei der $\varkappa$-Projektion von X auf $A_\varkappa^*$ bedeutet,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{\sim -} \overline{T}_\lambda^{\mathfrak{T}_\lambda^\bullet, \ni} = \bigcap_\lambda \{(a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}) | \big((f a^{*\prime}) \lambda\big) T_\lambda = \big((f a^{*\prime\prime}) \lambda\big) T_\lambda\}$$
$$= \bigcap_\lambda \{(a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}) | a^{*\prime} T_\lambda = a^{*\prime\prime} T_\lambda\} = \bigcap_\lambda \overline{T}_\lambda^{\mathfrak{S}^\bullet}, \text{ also mit (5.3.11)}$$

$$(\alpha) \qquad f^{\sim -} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{T}_\lambda^{\mathfrak{T}_\lambda^\bullet, \ni} = \overline{\big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda\big)}^{\mathfrak{S}^\bullet}.$$

Unterwirft man (α) der Abbildung $f^\in$, dann erhält man sofort die gleichmäßige Stetigkeit von f. Und bildet man auf beiden Seiten von (α) den Durchschnitt über alle $(T_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \times_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{T}_\lambda$ für alle $\Lambda \in \mathfrak{L}$, dann ergibt sich wegen der Separabilität des $\mathfrak{L}$-Produkts der separablen $\mathfrak{T}_\varkappa^*$-Strukturen (3.3!) $f^= = f^{\sim -} I_X = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{T}^{\mathfrak{S}^\bullet}$, wegen der Separabilität von $\mathfrak{S}^*$ ((4.1.1)!) also $f^= = I$, wenn $\geqq_A \mathfrak{T} = \geqq_A \mathfrak{S}$ gilt, und in diesem Falle behauptet (α) wegen $f^{\sim -} = f^{-\sim}$ ((1.3.4)!) auch die gleichmäßige Stetigkeit von f^-.

(6.3.2): α) Die Kollision der $\mathfrak{T}_\lambda$ mit $\lambda \in \Lambda$ bedeutet $\bigcap_\lambda (T_\lambda a_\lambda) \neq \varnothing$, wie auch die $T_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$ und die $a_\lambda \in A$ gewählt werden. Das ist aber ersichtlich gleichwertig damit, daß $\bigcap_\lambda (a_\lambda^* T_\lambda) \neq \varnothing$ bei beliebiger Wahl der $T_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$ und der $a_\lambda^* \in A_\lambda^*$ gilt, denn für $a_\lambda^* = a_\lambda$ ergibt sich wegen (5.3.5) wieder die erste Aussage. Daher ist bei Beachtung der Filterbasiseigenschaft der $a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa$ ((5.4.7)

und (5.4.8)!) wegen der Beliebigkeit von $A \in \mathfrak{L}$ die Kollisionsbedingung gleichbedeutend mit (3.1!):

($\alpha.\alpha$) $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa\in K} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa$ ist für jedes $(a_\varkappa^* \mid \varkappa) \in \mathsf{X}_\varkappa A_\varkappa^*$ eine Filterbasis in A.

β) ($\alpha.\alpha$) ist notwendig: $f\,a^* = (a_\varkappa^* \mid \varkappa)$ impliziert mit (5.3.7) und (5.3.6) nach Definition von f: $\bigcap_\lambda a_\lambda^* T_\lambda = \bigcap_\lambda \big((f\,a^*)\,\lambda\big) T_\lambda = \bigcap_\lambda a^* T_\lambda = a^* \bigcap_\lambda T_\lambda \in a^* \mathfrak{T} \leqq \geqq_A a^* \mathfrak{S}$, und das liefert wegen der Filterbasiseigenschaft von $a^* \mathfrak{S}$ ((5.4.7)!) gerade ($\alpha.\alpha$). ($\alpha.\alpha$) ist hinreichend: Da jedes S ein $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ enthält und nach ($\alpha.\alpha$) zu beliebig vorgegebenem $(a_\varkappa^* \mid \varkappa) \in X$ ein $a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda^* T_\lambda$ existiert, gilt ((1.3.8)!) $S\,a \geqq \bigcap_\lambda T_\lambda a = \bigcap_\lambda a_\lambda^* T_\lambda$, so daß der von $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa$ in A erzeugte Filter eine Klasse eines jeden $S \in \mathfrak{S}$ enthält. Daher ist nach (3.2.3) und (5.4.7) $a^* = \big((A/S \cap \geqq_A \bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa)^\bullet \mid S\big) \in A^*$. Nun enthält nach Voraussetzung jedes $T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa$ ein $S \in \mathfrak{S}$, so daß wegen (5.3.6) $a^* S \leqq a^* T_\varkappa$ gilt und damit nach Definition von a^*: $a^* T_\varkappa \in \geqq_A \bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa$, d.h. aber ((1.3.8)!) $a^* T_\varkappa = a_\varkappa^* T_\varkappa$, und nach Definition von f folgt $f\,a^* = \big((a_\varkappa^* T_\varkappa \mid T_\varkappa) \mid \varkappa\big) = (a_\varkappa^* \mid \varkappa)$.

Wir nennen den in (6.3.1) auftretenden Simultanisomorphismus f eine *Hüllenzerlegung über A*. (Diese braucht weder eine echte noch eine unechte Zerlegung von A^* im Sinne von 5.1 zu sein.) (6.3.2) nennt also eine genaue Bedingung dafür, daß eine Hüllenzerlegung über A echte Zerlegung einer Hülle von A ist.

Abschließend wollen wir noch, gestützt auf (6.3.1), eine bemerkenswerte, von ZARISKI [1] bei gewissen Idealtopologien benutzte Schlußweise allgemein darstellen. Nach (6.3.1) ist f für $K = \{1\}$ umkehrbar, genau wenn $\bigcap_{T_1} \overline{T_1}^{\mathfrak{S}^\bullet} = I_{A^\bullet}$. Kommt $\mathfrak{T}_1$ aber unter Kongruenzbasen $\mathfrak{T}_\varkappa$ vor, die der scharfen Bedingung in (6.3.1) genügen, dann kann unter günstigen Umständen die Umkehrbarkeit von f auch mit Hilfe einer Hüllenzerlegung erschlossen werden:

(6.3.3) *Es gelten die Voraussetzungen von* (6.3.1) *einschließlich der scharfen Bedingung* $\geqq_A, \mathfrak{T} = \geqq_A, \mathfrak{S}$, *und es sei* $K = \{1, 2, \ldots\}$. *Außerdem seien die weiteren separablen Kongruenzbasen* $\mathfrak{T}_{\varkappa,\varkappa+1}$ ($\varkappa \in K$) *über A gegeben mit* $\mathfrak{T}_{\varkappa,\varkappa+1} \leqq \geqq_A, \mathfrak{T}_\varkappa \cap \geqq_A, \mathfrak{T}_{\varkappa+1}$. *Sind dann die nach* (6.3.1) ($K = \{1\}$!) *gleichmäßig stetigen Homomorphismen*

$$h_\varkappa = \big((a_{\varkappa+1}^* T_{\varkappa,\varkappa+1} \mid T_{\varkappa,\varkappa+1}) \mid a_{\varkappa+1}^* \in A_{\varkappa+1}^*\big)$$

umkehrbar, so auch der gleichmäßig stetige Homomorphismus

$$f_1 = \big((a^* T_1 \mid T_1) \mid a^* \in A^*\big).$$

Beweis. Es sei $g_\varkappa = \big((a_\varkappa^* T_{\varkappa,\varkappa+1} \mid T_{\varkappa,\varkappa+1}) \mid a_\varkappa^* \in A_\varkappa^*\big)$ und $f_\varkappa = \big((a^* T_\varkappa \mid T_\varkappa) \mid a^* \in A^*\big)$, so daß $f = \big((f_\varkappa a^* \mid \varkappa) \mid a^*\big)$ wird. Damit ergibt sich ((5.3.6)!) $(g_\varkappa (f_\varkappa a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa+1} = (a^* T_\varkappa \mid T_\varkappa)\, T_{\varkappa,\varkappa+1} \in \geqq_A (a^* T_\varkappa \mid T_\varkappa) \mathfrak{T}_\varkappa = \geqq_A a^* \mathfrak{T}_\varkappa \leqq \geqq_A a^* \mathfrak{S}$ und $(h_\varkappa (f_{\varkappa+1} a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa+1} = (a^* T_{\varkappa+1} \mid T_{\varkappa+1})\, T_{\varkappa,\varkappa+1} \in \geqq_A a^* \mathfrak{T}_{\varkappa+1} \leqq \geqq_A a^* \mathfrak{S}$, so daß ((1.3.8)!) $(g_\varkappa (f_\varkappa a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa+1} = (h_\varkappa (f_{\varkappa+1} a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa+1}$, also $g_\varkappa \circ f_\varkappa = h_\varkappa \circ f_{\varkappa+1}$ oder $h_\varkappa^- \circ g_\varkappa \circ f_\varkappa = f_{\varkappa+1}$. Damit impliziert $f_1\,a^{*\prime} = f_1\,a^{*\prime\prime}$ sofort $f_\varkappa\,a^{*\prime} = f_\varkappa\,a^{*\prime\prime}$ für alle $\varkappa$, also $f\,a^{*\prime} = f\,a^{*\prime\prime}$ und damit wegen (6.3.1) $a^{*\prime} = a^{*\prime\prime}$.

§ 7. Gruppen und Ringe mit allgemeinen Operatoren.

7.1. Produkte, Quotienten und Hüllen von Gruppen und Ringen. Ist die Ω-Menge A eine additiv geschriebene (aber nicht notwendig kommutative Gruppe bzw. ein Ring, dann nennen wir die $(\{+\} \cup \Omega)$-Menge

bzw. die $(\{+, \cdot\} \cup \Omega)$-Menge eine *$\Omega$-Gruppe* bzw. einen *$\Omega$-Ring*[22]). Zunächst haben wir festzustellen, ob Produkte, Quotienten und $\mathfrak{T}$-Hüllen von Gruppen und Ringen wieder Gruppen und Ringe sind.

(7.1.1) *Das Produkt $\times_{\varkappa \in K} A_\varkappa$ der Ω-Gruppen $A_\varkappa$ ist wieder eine Ω-Gruppe. Sie besitzt das Nullelement $(0|_\varkappa \varkappa \in K)$ und es gilt $(a'_\varkappa|\varkappa) + (a''_\varkappa|\varkappa) = (a'_\varkappa + a''_\varkappa|\varkappa)$ und $-(a_\varkappa|\varkappa) = (-a_\varkappa|\varkappa)$. Sind die $A_\varkappa$ sogar Ω-Ringe, dann wird auch ihr Produkt ein solcher mit $(a'_\varkappa|\varkappa) \cdot (a''_\varkappa|\varkappa) = (a'_\varkappa \cdot a''_\varkappa|\varkappa)$.*

(7.1.2) *Der Quotient A/E einer Ω-Gruppe modulo einer Kongruenz E ist wieder eine Ω-Gruppe. Sie besitzt das Nullelement $E\,0$ und es gilt $E\,a' +^\in E\,a'' = E\,a' + E\,a'' = E(a' + a'')$ und $-^\in(E\,a) = -(E\,a) = E(-a)$. Ist A sogar ein Ring, dann auch A/E mit $E\,a' \cdot^\in E\,a'' \subseteq E\,a' \cdot E\,a'' = E(a' \cdot a'')$.*

(7.1.3) *Die $\mathfrak{T}$-Hülle einer separablen $\mathfrak{T}$-Ω-Gruppe ist wieder eine Ω-Gruppe mit $a^{*\prime} + a^{*\prime\prime} = (a^{*\prime} T + a^{*\prime\prime} T | T)$ und $-a^* = (-(a^* T)|T)$. Ist A sogar ein Ω-Ring, dann auch $\bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ mit $a^{*\prime} \cdot a^{*\prime\prime} = (a^{*\prime} T \cdot a^{*\prime\prime} T | T)$.*

Beweise. (7.1.1): Zunächst ist in (2.1.3) $\omega = +$ und $\omega = \cdot$ zu setzen. Der Rest ist trivial. (7.1.2): Wegen der $\{+\}$-Zulässigkeit von E ergibt sich $E(a' + a'') = \{a | a\,E\,(a' + a'')\} = \{a | a - a'' \in E\,a'\} \subseteq E\,a' +^\in E\,a''$ und $E(-a) = \{a' | a' E(-a)\} = \{a' | (a + a' - a')\,E(a - a - a')\} = \{a' | -a' \in E\,a\} = -^\in(E\,a)$. Der Rest ist wegen (2.4.1) und (2.4.5) trivial. (7.1.3): Nach (5.2.2) und (3.4.1) ist $A^* = \bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet_\mathfrak{T}} = \bar{A}^{\mathfrak{T}^\bullet}$ (5.4!) eine $(\{+\} \cup \Omega)$- bzw. $(\{+, \cdot\} \cup \Omega)$-Teilmenge der Ω-Gruppe bzw. des Ω-Ringes $\times_{T \in \mathfrak{T}} A/T$ ((7.1.2) und (7.1.1)!), in der bzw. in dem die angegebenen Formeln nach (2.1.3) gelten. Nach (5.4.7) brauchen wir also nur noch zu zeigen, daß mit $\{a^* T | T\}$ auch $\{-(a^* T) | T\}$ eine Filterbasis in A ist. Nun, aus $a^* T \subseteq a^* T' \cap a^* T''$ folgt mit (7.1.2) $-(a^* T) = -^\in(a^* T) \subseteq -^\in(a^* T') \cap -^\in(a^* T'') = -(a^* T') \cap -(a^* T'')$.

Wegen (7.1.2) wird in Gruppen und Ringen allgemein

(7.1.4) $$U' +^\in U'' = U' + U'' \quad \text{und} \quad -^\in U = -U$$

für beliebige Teilmengen U, U', U'' notiert.

7.2. Die Kongruenzkerne. Gruppen und Ringe zeichnen sich gegenüber den allgemeinen Algebren durch das Auftreten der zweistelligen Operatoren Addition und Multiplikation aus, die gewissen Axiomen, nämlich der Assoziativität, der Distributivität usw. unterworfen sind. Nach 7.1 übertragen sich diese Axiome auf Produkte, Quotienten und Hüllen. Hier zeigt sich aber bei der Quotientenbildung eine Besonderheit der Addition ($E\,a' +^\in E\,a'' = E\,a' + E\,a''$), die, wie ihr Beweis erkennen läßt, durch die Auflösbarkeit der Addition bedingt ist. Die allgemeinen, keinen weiteren Voraussetzungen unterliegenden Ringe erscheinen nun als ein nicht weiter interessierender Spezialfall der Ω-Gruppen, bei denen uns jetzt in erster Linie natürlich die Kongruenzen interessieren, die sich in der Tat erheblich von den Kongruenzen

[22]) Nimmt man auch noch die Inversenbildung „—" und bei Ringen außerdem noch die Rechts- oder die Linksmultiplikationen $(a' \cdot a | a')$ oder $(a \cdot a' | a')$ (das sind also die partiellen Abbildungen der Multiplikation) oder beide im Sinne von 2.1 „zu den Operatoren hinzu", dann sind die zulässigen Teilmengen genau die Ω-Untergruppen bzw. die Ω-Ideale von A.

der beliebigen Algebren unterscheiden. Zuvor definieren wir noch: $E\,0$ heiße der *Kern der Kongruenz* E.

(7.2.1) *Die Kongruenzen über einer Ω-Gruppe A sind Ω-Untergruppen von A^2 und als Kongruenzen sämtlich miteinander vertauschbar, so daß nach* (2.2.4) $E' \circ E''$ *die kleinste E' und E'' enthaltende Kongruenz ist.*

(7.2.2) $\mathfrak{a} \leqq A$ *ist genau dann Kern einer Kongruenz über A, wenn $\mathfrak{a}$ eine invariante Untergruppe von A ist und für alle $\omega \in \Omega$ aus $a_\iota'' - a_\iota' \in \mathfrak{a}$ $(\iota \in I_\omega)$ stets $\omega_\iota a_\iota'' - \omega_\iota a_\iota' \in \mathfrak{a}$ folgt*[23]. *Die Kongruenzkerne in A bilden also bezüglich der Ordnung „$\leqq$" einen vollständigen Verband mit* $\inf_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a}$ *für jede Menge $\mathfrak{A}$ von Kongruenzkernen $\mathfrak{a}$ in A.*

(7.2.3) $(E\,0 \mid E)$ *ist ein Isomorphismus des vollständigen Verbandes der Kongruenzen über A auf den vollständigen Verband ihrer Kerne in A. Dabei gilt*

$$E = \{(a', a'') \mid a'' - a' \in E\,0\} \quad \text{und} \quad (E' \circ E'')\,0 = E'\,0 + E''\,0.$$

(7.2.4) *Ist $\mathfrak{T}$ eine separable Kongruenzbasis über A, dann ist mit E auch $\overline{E}^{\mathfrak{T}}$ eine Kongruenz über A, und es gilt*

$$\overline{E}^{\mathfrak{T}}\,0 = \overline{(E\,0)}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (T\,0 + E\,0)$$

(vgl. auch HALL *[1]), so daß insbesondere die Hüllen in A von Kongruenzkernen in A wieder Kongruenzkerne in A und genau die Kerne über A abgeschlossener Kongruenzen in A abgeschlossen sind* ((7.2.3)!).

Beweise. (7.2.1): $(a', a'') \in E$, also $(a'', a') \in E$, impliziert $-(a', a'') = (-a', -a'') = (-a' + a'' - a'',\ -a' + a' - a'') \in E$. $a'' E'' a\, E' a'$ impliziert $a'' E' (a' - a + a'')\, E'' a'$, so daß $E'' \circ E' \leqq E' \circ E''$. (7.2.2): $\{a', a''\} \leqq E\,0$ impliziert $a'' E\, a'$ und damit $a'' - a' \in E\,0$, so daß $E\,0$ eine Untergruppe ist, und zwar eine invariante, denn $a\,E\,0$ impliziert sofort $(a' + a - a')\, E (a' + 0 - a')$. Die Notwendigkeit des zweiten Teils der Bedingung für ein $E\,0$ folgt trivial aus der Zulässigkeit von E. Umgekehrt folgt sofort die Ω-Zulässigkeit von $E = \{(a', a'') \mid a'' - a' \in \mathfrak{a}\}$. Da trivial $E\,0 = \mathfrak{a}$ wird, braucht E nur noch als $\{+\}$-zulässige Äquivalenz nachgewiesen zu werden. Die Äquivalenzeigenschaft von E folgt aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{a}$[24]: trivial ist $I \leqq E = E^-$, und $\{a'' - a',\ a''' - a''\} \leqq \mathfrak{a}$ impliziert $a''' - a' \in \mathfrak{a}$. Schließlich impliziert $\{(a_1', a_1''),\ (a_2', a_2'')\} \leqq E$, also $a_1'' - a_1' \in \mathfrak{a}$ und $a_2'' - a_2' \in \mathfrak{a}$, was wegen der Invarianz von $\mathfrak{a}$ durch $-a_2' + a_2'' - a_2' + a_2' = -a_2' + a_2'' \in \mathfrak{a}$ ersetzt werden kann, $a_1'' - a_1' - a_2' + a_2'' \in \mathfrak{a}$ und damit wieder wegen der Invarianz von $\mathfrak{a}$: $a_2'' + a_1'' - a_1' - a_2' \in \mathfrak{a}$, also $(a_2' + a_1',\ a_2'' + a_1'') \in E$. (7.2.3): Die Gleichwertigkeit von $a'' E\, a'$ mit $a'' - a' \in E\,0$ ist wegen der $\{+\}$-Zulässigkeit von E trivial. Mithin ist $(E\,0 \mid E)$ in der Tat umkehrbar und $E \leqq E'$ äquivalent mit $E\,0 \leqq E'\,0$. Weiter wird, da $E' \circ E''$ nach (7.2.1) eine Kongruenz ist, $(E' \circ E'')\,0 = \{a' \mid a'\, E'\, a\, E''\, 0 \text{ für ein } a\} =$

[23]) $\mathfrak{a}$ ist also sicher $\{\omega\}$-zulässig, wenn $\omega_\iota\, 0 = 0$ gilt. Ist A ein Ring, dann ist $\mathfrak{a}$ ein (zweiseitiges) Ideal: $a - 0 \in \mathfrak{a}$ und $a' - a' \in \mathfrak{a}$ implizieren $a' \cdot a - a' \cdot 0 \in \mathfrak{a}$.

[24]) Die Untergruppen $\mathfrak{a}$ definieren so rechtsmonotone Äquivalenzen E, für die also $a''\, E\, a'$ stets $(a'' + a)\, E (a' + a)$ impliziert. Entsprechend definiert jede Teilmenge von A rechts- und auch linksmonotone Relationen über A, mit deren die 0 enthaltenden Klassen sie dann zusammenfallen. (7.2.1) verallgemeinernd läßt sich zeigen, daß genau die rechtsmonotonen Relationen mit allen linksmonotonen vertauschbar sind und umgekehrt.

$\{a' \mid a' - a \in E'0$ *für ein* $a \in E''0\} \leqq E'0 + E''0 = \{a' + a'' \mid a' E'0 E''(-a'')\} \leqq \{a' + a'' \mid a'(E' \circ E'')(-a'')\} = \{a' + a'' \mid (a' + a')(E' \circ E'')\,0\} = (E' \circ E'')\,0$.

(7.2.4): Dies folgt wegen (7.2.1) und (7.2.3) sofort aus (3.4.4) und (3.4.3).

Die Kongruenzen über Ω-Gruppen sind also im wesentlichen ausgezeichnet durch ihre gegenseitige Vertauschbarkeit und durch die Korrespondenz mit ihren Kernen. Diese Eigenschaften sind auch entscheidend für die folgende Verallgemeinerung der beiden ersten Behauptungen von (7.2.4).

(7.2.5) *Ist E eine Kongruenz über der $\mathfrak{T}$-Ω-Gruppe A, dann ist $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ eine Kongruenz über $A^* = \bar{A}^{\mathfrak{T}^*}$ und es gilt $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0 = (\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*}$* [25]).

Beweis. Nach (7.2.4), (7.2.1) und (6.2.3) ist $(\overline{E^{\mathfrak{T}}})^{\mathfrak{T}^*} = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ eine Kongruenz über A^*. Wegen $E \leqq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ und der Abgeschlossenheit von $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0$ auf Grund von (7.2.4) ist $(\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*} \leqq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0$ trivial. Existiert eine Kongruenz F über A^* mit $(\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*} = F0$, so daß $E0 \leqq F0 \leqq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0$, dann folgt nach (7.2.3) $E \leqq F \leqq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$, also, da F nach (7.2.4) abgeschlossen ist, $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*} = F$. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß $(\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*}$ in A^* Kongruenzkern ist, also eine der Bedingungen von (7.2.2) genügende invariante Untergruppe von A^*.

Aus $\{a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}\} \leqq (\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*}$ und $a^* \in A^*$ folgt für jedes $T \in \mathfrak{T}$ wegen (5.3.12) die Existenz von $a'_T \in T^* a^{*\prime} \cap E0 = a^{*\prime} T \cap E0$, $a''_T \in a^{*\prime\prime} T \cap E0$ und von $a_T \in a^* T$. Wegen der Gruppeneigenschaft von $E0$, (7.1.2) und (7.1.3) ergibt sich damit $a'_T - a''_T \in (a^{*\prime} T - a^{*\prime\prime} T) \cap E0 = T^*(a^{*\prime} - a^{*\prime\prime}) \cap E0$, also $a^{*\prime} - a^{*\prime\prime} \in (\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*}$, und wegen der Invarianz auf analoge Weise $a_T + a'_T - a_T \in T^*(a^* + a^{*\prime} - a^*) \cap E0$, also $a^* + a^{*\prime} - a^* \in (\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*}$. Zum Nachweis der zweiten Bedingung von (7.2.2) sei jetzt $a_i^{*\prime\prime} - a_i^{*\prime} \in (\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*}$ für alle $\iota \in I_\omega$, so daß zu jedem $T \in \mathfrak{T}$ und $\iota \in I_\omega$ wegen (5.3.12) und (7.1.3) ein $a_{\iota,T} \in (a_\iota^{*\prime\prime} T - a_\iota^{*\prime} T) \cap E0$ existiert und damit wegen (7.1.2) ein $a'_{\iota,T} \in a_\iota^{*\prime} T$ und ein $a''_{\iota,T} \in a_\iota^{*\prime\prime} T$ mit $a_{\iota,T} = a''_{\iota,T} - a'_{\iota,T}$. Somit ergibt sich ((1.3.8)!), da $E0$ die Bedingungen von (7.2.2) erfüllt, nach (7.1.2), (2.4.1), (2.1.3), (7.1.3) und (5.3.12) $\omega_\iota a''_{\iota,T} - \omega_\iota a'_{\iota,T} \in T(\omega_\iota a''_{\iota,T} - \omega_\iota a'_{\iota,T}) \cap E0 = (\omega_\iota(a_\iota^{*\prime\prime} T) - \omega_\iota(a_\iota^{*\prime} T)) \cap E0 = (\omega_\iota a_\iota^{*\prime\prime} - \omega_\iota a_\iota^{*\prime}) T \cap E0 = T^*(\omega_\iota a_\iota^{*\prime\prime} - \omega_\iota a_\iota^{*\prime}) \cap E0$, also $\omega_\iota a_\iota^{*\prime\prime} - \omega_\iota a_\iota^{*\prime} \in (\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*}$.

Literatur.

Birkhoff, G. [*1*]: Lattice Theory, S. VII. New York 1948. — Bourbaki, N. [*1*]: Topologie générale, Kap. I—II. Paris 1951. — Hall, M. [*1*]: A topology for free groups and related groups, Theorem 3.3. Ann. Math. **52** (1950). — Jacobson, N. [*1*]: Lectures in Abstract Algebra, S. 3. New York 1951. — Krull, W. [*1*]: Charakteren- und Homomorphismentopologie, demnächst in den Veröffentlichungen des Istituto Jorge Juan, Madrid. — [*2*]: Subdirekte Summendarstellungen von Integritätsbereichen. Math. Z. **52**, 810—826 (1950). — Lefschetz, S. [*1*]: Algebraic Topology. New York 1942. — Schmidt, J. [*1*]: Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie, § 2. Math. Nachr. **7** (1952). — Zariski, O. [*1*]: Semi local rings, Theorem 9 (Beweis). Summa Bras. Mat. Bd. I, H. 8.

[25]) Da $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*} \cap A^{\mathfrak{T}} = \overline{E}^{\mathfrak{T}}$ ((5.3.12) impliziert mit (5.3.5) $T^* a \cap A = Ta$!) und damit $(\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}} = (\overline{E\,0})^{\mathfrak{T}^*} \cap A = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*} 0 \cap A = (\overline{E}^{\mathfrak{T}^*} \cap A^{\mathfrak{T}})\,0 = \overline{E}^{\mathfrak{T}}\,0$ gilt, folgen in der Tat rückwärts wieder die ersten Behauptungen von (7.2.4).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 11. Mai 1954.)

HAHN, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 488—494 (1954)

Über einige Grenzwertbeziehungen bei unendlichen Produkten.

Von
WOLFGANG HAHN.

In der Analysis der speziellen Funktionen treten öfter Produkte der Gestalt

$$P(z,\beta,q)=\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-zq^j}{1-zq^{j+\beta}} \tag{1}$$

auf. Darin ist z eine komplexe Veränderliche, β eine reelle oder komplexe Zahl und q ein Parameter, der meist zwischen Null und Eins liegend angenommen wird. Von diesen Produkten ist die Limesformel

$$\lim_{q\to 1}P(z,\beta,q)=(1-z)^{\beta} \tag{2}$$

seit langem bekannt. Man beweist sie mit Hilfe der für $|z|<1$ gültigen Potenzreihenentwicklung[1])

$$\frac{1}{P(z,\beta,q)}=1+\frac{1-q^{\beta}}{1-q}z+\frac{(1-q^{\beta})(1-q^{1+\beta})}{(1-q)(1-q^2)}z^2+\cdots. \tag{3}$$

Die Formel (2) ist Spezialfall einer viel allgemeineren Beziehung, die im folgenden bewiesen werden soll:

Es sei die Funktion $f(z)$ in einer Umgebung des Nullpunkts analytisch, und es sei $f(0)=1$. Der Parameter q sei auf einen im Inneren des Einheitskreises gelegenen Teil eines Winkelraums beschränkt, dessen Spitze der Punkt $q=1$ und dessen Öffnung kleiner als π ist:

$$q=1-p\,e^{i\varphi}\quad\left(0<p\leq\sin\varepsilon;\ +\varepsilon-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq+\frac{\pi}{2}-\varepsilon;\ \varepsilon>0\right) \tag{4}$$

β sei eine beliebige reelle oder komplexe Zahl. Dann gilt

$$\lim_{q\to 1}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{f(zq^j)}{f(zq^{j+\beta})}=(f(z))^{\beta} \tag{5}$$

überall dort, wo die beiden Seiten dieser Formel analytische Funktionen von z sind, also insbesondere in dem durch (7) bestimmten Kreis $|z|<R$. Unter den Potenzen mit dem Exponenten β sind die Hauptwerte zu verstehen.

[1]) Vgl. z. B. HEINE, E.: Handbuch der Theorie der Kugelfunktionen, Bd. I, S. 97 ff. Berlin 1878. Der Nachweis, daß man in (3) den Grenzübergang $q\to 1$ gliedweise vollziehen darf, wird dort nicht erbracht.

Es sei

$$f(z) = 1 + z\,g(z) \tag{6}$$

und z zunächst in einem Kreis gelegen, innerhalb dessen $g(z)$ analytisch und $|z\,g(z)|$ kleiner als eine feste Zahl $a<1$ ist:

$$|z\,g(z)| < a < 1 \quad \text{für} \quad |z| < R. \tag{7}$$

Wir beweisen eine *Hilfsformel*. Es sei t eine natürliche Zahl, $Re\,\beta > 0$ und $|\beta| < B$. Dann gilt in dem durch (4) erklärten Bereich

$$\frac{1-q^{\beta t}}{1-q^t} = \beta + h(\beta, t, q), \tag{8}$$

wobei die Funktion $h(\beta, t, q)$ der Abschätzung

$$|h(\beta, t, q)| < t\,|1-q|\,M$$

genügt; M ist eine von β, t und q unabhängige Konstante.

Im Falle $t=1$ ist mit $q=1-x$

$$\frac{1-q^\beta}{1-q} = \beta - x\,k(x), \quad k(x) = \sum_{r=2}^{\infty} \binom{\beta}{r} (-1)^r\, x^{r-2}.$$

Wir wählen eine Zahl c zwischen Null und 1. Dann ist für $|x| \leq c$

$$|k(x)| \leq \sum_{r=2}^{\infty} \left|\binom{\beta}{r}\right| c^{r-2} \leq \sum_{r=2}^{\infty} \binom{-|\beta|}{r} c^{r-2} (-1)^r$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (1-x)^{-|\beta|}\Big|_{x=c} = \frac{|\beta|\,(|\beta|+1)}{2} (1-c)^{-|\beta|-2}.$$

Sodann schätzen wir die Funktion $k(x)$ auf dem Umfang des Kreises $|1-x|=1$ ab, und zwar auf dem Bogen, auf dem $|x| > c$ ist. Man findet

$$|k(x)| = |x^{-2}(1-(1-x)^\beta - \beta x)| \leq c^{-2}(1 + 2|\beta| + e^{\pi |\mathrm{Im}\,\beta|}). \tag{9}$$

Aus den beiden Teilabschätzungen folgt, daß $k(x)$ im Inneren des Kreises $|1-x|=1$ bezüglich x und β gleichmäßig beschränkt ist; dabei kann man sich den Kreis zur Wahrung der Eindeutigkeit der Potenz durch einen von Null ausgehenden Verzweigungsschnitt aufgeschlitzt denken. Damit ist (8) für $t=1$ bewiesen. Zum Beweis für $t>1$ setzen wir $x_t = 1-q^t$. Wenn q^t in dem Winkelraum (4) liegt, so liegt q^t sicher in einem Bereich W, der sich aus dem Kreis $|q| < \sin\varepsilon$ und dem außerhalb dieses Kreises befindlichen Teil des Winkelraums zusammensetzt. Man erkennt das durch eine elementargeometrische Betrachtung, wobei man beachten muß, daß die Winkelhalbierende eines spitzwinkligen Dreiecks stets kleiner als die Wurzel aus dem Produkt der benachbarten Seiten ist. Dem Bereich W entspricht ein x_t-Bereich, der ganz im Kreis $|1-x_t|=1$ liegt, so daß man (9) anwenden kann. Für c wählen wir den Wert $\sin\varepsilon$ und erhalten $|k(x_t)| < M$, wobei M nicht

mehr von t abhängt. Nun gehen wir von x_t wieder zu q^t zurück und beachten, daß die rechte Seite von (8) in dem (aufgeschlitzten) Bereich W regulär ist, so daß man das Maximumprinzip anwenden kann. Es ist dann

$$\frac{1-q^{\beta t}}{1-q^t} = \beta - (1-q^t)\,k(1-q^t). \tag{10}$$

Mit etwas geänderter Bezeichnung erhält man daraus (8). Da

$$|1-q^t| \leq t\,|1-q|$$

ist, ist die Hilfsformel vollständig bewiesen.

Es genügt, die Formel (5) für $Re\,\beta \geq m$ zu beweisen. Denn wenn $Re\,\beta < m$ ist, so wähle man die positive ganze Zahl N so, daß $Re(N+\beta) \geq m$ wird, und beachte, daß $\prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}) = \prod_{j=0}^{N-1} f(z\,q^{j+\beta}) \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta+N})$ ist. Man hat dann

$$\lim_{q\to 1} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f(z\,q^j)}{f(z\,q^{j+\beta})} = \frac{1}{(f(z))^N} \lim_{q\to 1} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f(z\,q^j)}{f(z\,q^{j+\beta+N})}.$$

Wir wählen $m > 0$ so, daß $|q^\beta| < 1$ wird, und betrachten die Funktion

$$F(z,\beta,q) = \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}), \tag{11}$$

wobei unter dem Logarithmus der Hauptwert zu verstehen ist. Nach (6) ist $f(z\,q^{j+\beta}) = 1 + z\,q^{j+\beta}\,g(z\,q^{j+\beta})$. Wegen $|q| < 1$ und $Re\,\beta \geq m$ ist $|z\,q^{j+\beta}| < R$, wenn $|z| < R$ ist. Daher wird nach (7)

$$|z\,q^{j+\beta}\,g(z\,q^{j+\beta})| \leq |q^{j+\beta}|\,|z\,g(z)| < |q^{j+\beta}|\,a \leq |q^j|\,a.$$

Die in (5) auftretenden Produkte sind also aus Faktoren der Gestalt $1+|q|^j\,a_j$ mit beschränkten a_j gebildet, konvergieren mithin absolut. Bezeichnet man die linke Seite von (5) mit $G(z,\beta,q)$, so ist daher

$$\log G(z,\beta,q) = \sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^j) - \sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^{\beta+j}). \tag{12}$$

Wegen (6) und (7) existiert eine für $|z| < R$ absolut konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,z^n. \tag{13}$$

Die Doppelreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^{\beta+j}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,z^n\,q^{(\beta+j)n} \tag{14}$$

konvergiert absolut, da

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z^n|\,|q^{(\beta+j)n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z\,q^\beta|^n\,\frac{1}{1-|q|^n} < \frac{1}{1-|q|} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z\,q^\beta|^n$$

konvergiert. Man darf die Doppelreihe (14) also umordnen und erhält

$$\sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^{\beta+j}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \frac{q^{\beta n}}{1-q^n}. \tag{15}$$

Setzt man dies in (12) ein und berücksichtigt die Hilfsformel (8), so folgt

$$\log G(z,\beta,q) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n h(\beta,n,q). \tag{16}$$

Die zweite Reihe wird durch

$$M|1-q| \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z|^n = M|z||1-q| \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n||z|^{n-1}$$

majorisiert, wobei die letzte Reihe konvergiert, da nach (13)

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n z^{n-1}$$

für $|z| < R$ absolut konvergiert. Der zweite Term der rechten Seite von (16) strebt also mit $q \to 1$ gegen Null. Es ergibt sich schließlich

$$\lim_{q\to 1} \log \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f(z\,q^j)}{f(z\,q^{\beta+j})} = \beta \log f(z), \tag{17}$$

und das ist gleichbedeutend mit der Behauptung (5).

Nach Durchführung des Beweises kann man auf die durch (7) gegebene Einschränkung der z-Werte verzichten. Die Formel (5) gilt nach dem Fortsetzungsprinzip überall, wo ihre beiden Seiten analytische Funktionen von z sind.

Das Verhalten der durch (14) erklärten Funktion bei der Annäherung $q \to 1$ läßt sich noch etwas näher kennzeichnen. Es gilt:

Wenn der Parameter q auf den durch (4) *erklärten Winkelraum beschränkt bleibt, so ist*

$$\lim_{q\to 1} (1-q) \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}) = \int_0^z \log f(y) \frac{dy}{y}.$$

Nach (15) ist nämlich

$$(1-q) \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n q^{\beta n} \frac{1-q}{1-q^n}. \tag{18}$$

Nun ist für $|q| < 1$ $|1-q^n| \geq 1-|q|$, also für die durch (4) bestimmten q-Werte

$$\left|\frac{1-q}{1-q^n}\right| \leq \frac{|1-q|}{1-|q|} = \frac{|1-q|\,(1+|q|)}{1-|q|^2} \leq \frac{2p}{2p\cos\varphi - p^2} \leq \frac{2}{2\sin\varepsilon - p} < \frac{2}{\sin\varepsilon} = K.$$

Die in (18) auftretende Reihe wird durch

$$K \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||z\,q^{\beta}|^n \leq K \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||z|^n$$

majorisiert, konvergiert also gleichmäßig bezüglich q. Führt man den Grenzübergang $q \to 1$ gliedweise durch, so entsteht die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^z y^n \frac{dy}{y},$$

die ebenfalls absolut konvergiert. Der gliedweise durchgeführte Grenzübergang ist also erlaubt. Vertauscht man noch rechts die Summation mit der Integration, was zulässig ist, da die entstehende Reihe bezüglich y gleichmäßig konvergiert, so erhält man schließlich

$$\lim_{q \to 1} (1-q) \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\, q^{j+\beta}) = \int_0^z \log f(y) \frac{dy}{y}.$$

Wenn man in (1) $z = q^{1+\alpha}$ setzt, so genügt die entstehende Funktion noch einer anderen Grenzbeziehung. Es gilt:

Es seien α und β zwei beliebige komplexe Zahlen, nur die Werte $\alpha+\beta = 0, -1, -2, \ldots$ seien ausgeschlossen. Es sei ferner $|q|<1$, und zwar sei q auf den durch (4) *definierten Bereich beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^{-\beta} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1-q^{j+\alpha}}{1-q^{j+\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{19}$$

Für die Potenzen ist der Hauptwert zu nehmen.

Beim Beweis setzen wir zur Abkürzung

$$(1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^{j+\alpha}}{1-q^{j+\alpha+\beta}} = H(\alpha, \beta, q). \tag{20}$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar

$$H(\alpha, \beta, q) = \frac{H(1, \alpha+\beta-1, q)}{H(1, \alpha-1, q)}, \tag{21}$$

so daß es genügt, die Formel (19) für $\alpha = 1$ zu beweisen. Wir notieren noch die ebenfalls aus der Definition folgende Beziehung

$$H(\alpha, \beta+1, q) = \frac{1-q^{\alpha+\beta}}{1-q} H(\alpha, \beta, q). \tag{22}$$

Es ist für $Re\ \beta \geq m$

$$\left\{ \begin{aligned} \log \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\log(1-q^j) - \log(1-q^{j+\beta}) \right) \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} (q^{jr} - q^{(j+\beta)r}) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} \frac{1-q^{\beta r}}{1-q^r}. \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Die Umordnung ist wegen der absoluten Konvergenz der Doppelreihe gestattet. Nach der Hilfsformel (8) ist

$$(24)\qquad \begin{cases} -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} \frac{1-q^{\beta r}}{1-q^r} = -\beta \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} h(\beta, r, q) \\ \qquad\qquad = \log(1-q)^{\beta} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} h(\beta, r, q). \end{cases}$$

Die verbleibende Reihe wird durch die Reihe $M|1-q| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|q|^r}{r} r = M \frac{|1-q|}{1-|q|}$ majorisiert. Wie oben im Anschluß an (18) gezeigt wurde, ist dieser Ausdruck für die q-Werte in dem Winkelraum (4) gleichmäßig beschränkt. Die Reihe in (23) konvergiert daher absolut und für $|\beta| < B$ gleichmäßig bezüglich q. Mithin ist der Grenzwert

$$(25)\qquad \lim_{q\to 1} \log(1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} = \lim_{q\to 1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r(1-q^r)}{r} h(\beta, r, q)$$

vorhanden, und zwar gleichmäßig bezüglich β, ebenfalls der Grenzwert

$$(26)\qquad K(\beta) = \lim_{q\to 1} (1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}},$$

der folglich, zunächst für $Re\,\beta \geq m$, eine reguläre Funktion darstellt. Von dieser Einschränkung kann man sich leicht befreien, da aus (22) für $\alpha = 1$

$$(27)\qquad K(\beta+1) = (\beta+1)\,K(\beta)$$

folgt, $K(\beta)$ also durch analytische Fortsetzung auch für $Re\,\beta < m$ ($\beta \neq -1, -2, \ldots$) erklärt werden kann. $K(\beta)$ ist also mit Ausnahme der Werte $-1, -2, \ldots$ für alle endlichen β erklärt und analytisch.

Es sei für das Folgende q reell, $0 < q < 1$, und $\beta = s + i\,t$ ($s > 0$). Wir vergleichen die Faktoren des Produkts (20) (mit $\alpha = 1$) für $t = 0$ und $t \neq 0$. Es ist $|(1-q)^{-s}| = |(1-q)^{-s-it}|$ und $|1-q^{j+s}| < |1-q^{j+s+ti}|$. Daraus folgt, daß $|H(1, s, q)| > |H(1, s+i\,t, q)|$ ist. Für den Grenzfall erhält man

$$(28)\qquad |K(\beta)| \leq |K(s)| \qquad (\beta = s + i\,t,\ s > 0).$$

Wir erkennen, daß $K(\beta)$ auf jeder Vertikalen und damit auch in jedem Vertikalstreifen von endlicher Breite, der in der rechten Halbebene liegt, beschränkt ist. Nach einer Bemerkung von Herrn WIELANDT[2]) stimmt eine Funktion mit dieser Beschränktheitseigenschaft, die der Funktionalgleichung (27) genügt, bis auf eine Konstante mit der Gammafunktion (also hier mit $\Gamma(\beta+1)$) überein. Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir

[2]) Vgl. KNOPP, K.: Funktionentheorie, 7. Aufl., Bd. II, S. 47—49, Berlin 1949.

$\beta = 0$ und erhalten aus (20) unmittelbar $K(0) = 1 = \Gamma(1)$. Die Konstante ist also gleich 1, und (19) ist vollständig bewiesen.

Aus (19) kann man leicht die Multiplikationsformel und den Ergänzungssatz der Gammafunktion gewinnen[1]). Es sei noch erwähnt, daß die naheliegende Umformung

$$(1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{\beta \frac{q^j}{j}} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{q^j \frac{\beta}{j}}}{1+q^j \frac{1-q^\beta}{1-q^j}}.$$

nicht ohne weiteres zum Ziel führt, obwohl das Produkt rechts auch im Grenzfall $q \to 1$ konvergiert, da die Konvergenz bezüglich q ungleichmäßig ist.

Daß zwischen der Gammafunktion und den unendlichen Produkten der Gestalt $\prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{j+\beta})^{-1}$, die zuweilen mit Symbolen wie $\Gamma_q(\beta)$ bezeichnet werden, zahlreiche Analogien bestehen, ist schon lange bekannt[1]). Die Limesformel (19) scheint aber bisher noch nicht bewiesen worden zu sein.

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 13. April 1954.)